для A_2 прибуток рівний $0,4 * 6 + 0,6 * 3 = 4,2$.

для A_3 прибуток рівний $0,4 * 8 + 0,6 * 2 = 4,4$.

З отриманих відповідей максимальний прибуток приносить стратегія A_1.

Із застосування критеріїв випливає, що оптимальною стратегією для оперую чого гравця 1 буде стратегія A_1: випустити продукцію до конкурента.

На практиці не завжди відповіді за критеріями співпадають – в таких ситуаціях потрібно обирати оптимальну стратегію за допомогою додаткових міркувань (наприклад, психологічних факторів).

Ігри з природою розвиваються сьогодні в кооперативних та коаліційних теоріях. Без них неможливо уявити сучасні економічні науки, та деякі інші: ризикологію, міжнародні відносини, теорію аукціонів, математичне програмування. Основним в таких іграх є оцінка ймовірності станів нераціонального опонента – звідки можна знайти оптимальну стратегію за допомогою критеріїв прийняття рішень.

Література

1. Бережна Л.В., Економіко-математичні методи та моделі в фінансах / Л. В. Бережна, О.І. Снитюк – К.: Кондор, 2009. – 301 с.
2. Вовк Р.В. Моделювання міжнародних відносин: Навч. посібник / Р.В. Вовк – К.: Знання, 2012. – 246 с.
3. Довбенко М. В. Сучасна економічна теорія. Економічна нобелелогія: Навчальний посібник / М. В. Довбенко – К.: Видавничий центр «Академія», 2005. – 336 с.
4. Костевич Л. С. Теория игр. Исследование операций / Л. С. Костевич, А. А. Лапко – Минск: «Вышэйшая школа», 1982. – 228 с.
5. Крушевский А. В. Теория игр / А. В. Крушевский – К.: Головное издательство издательского обдъеденения «Вища школа», 1977. – 213 с.
6. Мельникова М. Мікроекономіка: Навчальний посібник / М. Мельникова, В. Яременко – К.: Видавничий центр «Професіонал», 2005. – 400 с.
7. Мухачева Э. Л. Математическое программирование / Э. А. Мухачева, Г. Ш. Рубинштейн – Новосибирск: издательство «Наука», 1977. – 315 с.
8. Печерский С. Л. Теория игр для экономистов. Вводный курс. Учебное пособие. / С. Л. Печерский, А. Беляева – СПб.: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с.
9. Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций : пер. с англ.; под ред. И. А. Ушакова. – М. : Сов. радио, 1977. – 304 с.

УДК 514(075.8)

Г.В. Сурган

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ПЕРЕТВОРЕННЯ СИМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРІ

Говорячи про симетрію, ми часто маємо на увазі пропорційність, впорядкованість, гармонійність у розташуванні елементів якоїсь групи або складових якогось предмета. У перекладі з грецької мови симетрія – це співмірність, незмінність, відповідність. Величезну кількість симетричних об’єктів демонструє нам природа:

симетричними є тварини, риби, птахи, комахи, симетрія проявляється також у регулярності зміни дня і ночі, пір року. Більшість творінь людських рук також мають симетричну форму. Вона проявляється у різноманітних творах живопису, музики та архітектури. Проявом симетрії є ритмічна побудова мелодій та віршів. Фактично симетрія є скрізь, де присутня будь-яка впорядкованість.

У своїх роздумах над картиною світобудови людина з давніх часів активно використовувала ідею симетрії. Стародавні греки вважали, що Всесвіт симетричний просто тому, що симетрія є одним з проявів краси та гармонії. Виходячи з міркувань симетрії, вони висловили ряд припущень та здогадок. Так, Піфагор (V ст. до н. е.), вважаючи сферу найбільш симетричним і досконалим тілом, зробив висновок про сферичність Землі і її рух по сфері. При цьому він вважав, що Земля рухається по сфері навколо деякого «центрального вогню». Навколо того самого «вогню» за Піфагором, повинні обертатися відомі в ті часи шість планет, а також Місяць, Сонце, зірки. Окрім того, стародавні греки встановили надзвичайно цікавий факт: існує всього п’ять правильних опуклих многогранників різної форми (тетраедр, куб, октаедр, додекаедр, ікосаедр), які є втіленням симетрії. Уперше досліджені піфагорійцями ці п’ять правильних многогранників були згодом докладно описані Платоном (427-347 до н.е.) і одержали назву платонових тіл [1, 24].

Ідея симетрії активно працює у багатьох природничих науках: фізиці, кристалографії, кристалохімії та біології. Симетрія є одним з ключових понять математики. Зокрема, вивчення властивостей симетрії будь-яких математичних об’єктів (геометричних фігур чи рівнянь) дозволяє краще зрозуміти їх структуру.

Математичне уявлення про симетрію сформувалося порівняно недавно – у XIX ст. Сучасне тлумачення симетрії полягає у наступному: симетричним називають об’єкт, який внаслідок певних перетворень не змінює своєї форми та властивостей. Іншими словами, симетрія передбачає незмінність об’єкта відносно будь-яких перетворень, які виконуються над ним. Відповідні перетворення називають перетвореннями симетрії або симетріями фігури [1, 23].

Один із засновників вчення про симетрію, німецький математик Герман Вейль писав: «Симетрія – у широкому і вузькому значенні, в залежності від того, як ви визначите значення цього поняття, – є тією ідеєю, за допомогою якої людина протягом століть намагається зрозуміти і створити упорядкованість, красу і досконалість». Він дав максимально широке тлумачення симетрії, звертаючи увагу на роль ідеї симетрії як засобу пізнання і творчості [2, 37].

З точки зору геометрії симетрія є окремим видом рухів. Рухом площини (простору) називається таке перетворення площини (простору), при якому зберігається відстань між точками. Більшість просторових рухів добре нам відомі із повсякденного життя. Коли ми йдемо по прямій, то піддаємося паралельному перенесенню. Коли повертаємо за ріг, здійснюємо обертання, а коли підіймаємось гвинтовими сходами – гвинтове переміщення. Перетворення, яке зіставляє відображення у звичайному дзеркалі, являє собою симетрію відносно площини; комбінуючи його з обертанням або з паралельним переносом, можна отримати обертальну симетрію і ковзну симетрію [3, 151].

Розрізняють наступні види геометричної симетрії на площині: симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворотна симетрія (або поворот), ковзна симетрія.

До перетворення симетрії також можна віднести паралельне перенесення, яке є композицією двох центральних симетрій з різними центрами. У такому тлумаченні результатом композиції симетрій площини також є симетрія площини.

Виявляється, кожний рух площини є або осьовою симетрією, або поворотом (зокрема, симетрія відносно точки), або паралельним перенесенням, або ковзною симетрією. Цей факт було доведено у XIX ст. французьким геометром М. Шалем. Більш того, кожен рух площини можна подати як композицію не більше як трьох симетрій відносно прямої. Якщо цей рух містить нерухому точку, то максимальне число симетрій можна скоротити до двох [3, 153]. З іншого боку, композиція двох (або парного числа) симетрій відносно різних центрів є паралельним перенесенням; трьох (або непарного числа) симетрій відносно різних центрів – симетрією відносно точки; композиція повороту і паралельного перенесення –поворотом або паралельним перенесенням.

Будь-який рух площини (простору) або зберігає орієнтацію площини (простору), або змінює її на протилежну. Рухи першого роду зберігають орієнтацію фігури, а рухи другого роду змінюють її на протилежну. Зрозуміло, що композиція будь-яких рухів першого роду завжди є рухом першого роду, а композиція рухів другого роду може й не бути рухом другого роду. До рухів першого роду на площині належать тотожне перетворення, симетрія відносно точки, поворот, паралельне перенесення. Симетрія відносно прямої та ковзна симетрія на площині є прикладами рухів другого роду (див. схему 1). Виходячи з цього, теорему Шаля можна переформулювати як: будь-який рух першого роду, відмінний від тотожного перетворення, є або поворотом, або паралельним перенесенням.

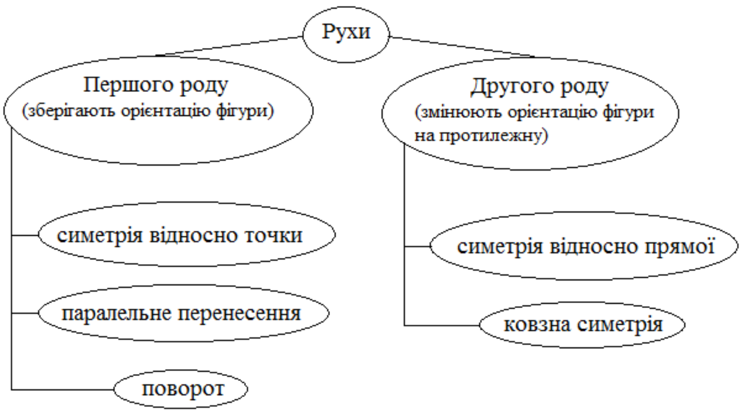

Схема1. Рухи першого та другого роду на площині.

У просторі до основних видів геометричної симетрії відносять відповідно: симетрію відносно точки, симетрію відносно прямої, поворотну симетрію, паралельне перенесення, дзеркальну симетрію, ковзну симетрію, обертальну симетрію та гвинтове переміщення.

Кожен рух у просторі можна подати як композицію поданих рухів.

Більш того, аналогічно як і для площини, у просторі кожен рух можна подати як композицію не більше як чотирьох симетрій відносно площин. Якщо цей рух містить нерухому точку, то максимальне число симетрій можна скоротити до трьох.

У просторі (так як і на площині) існує два види рухів: рухи першого роду (рухи, що не змінюють орієнтацію точок простору) і рухи другого роду (рухи, що змінюють орієнтацію точок простору). До рухів першого роду у просторі належать паралельне перенесення, поворот, симетрія відносно прямої, гвинтовий рух. Симетрія відносно точки, ковзна симетрія, дзеркальна симетрія є прикладом руху другого роду (див. схему 2).

Схема 2. Рухи першого та другого роду в просторі.

Аналіз наукової літератури дозволяє переконатись, що без поняття симетрії не може обійтись ні одна галузь науки. Сучасна наука характеризується зближенням сфер, які традиційно вважались зовсім віддаленими, що привело до появи різноманітних областей знань. При цьому найбільші результати іноді приносить саме сміливе перенесення у нові галузі методів дослідження, які виробилися в інших галузях науки.

Література

1. Боровик В.Н., Зайченко І.В., Мурач М.М., Яковець В.П., Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник. – Суми.: Університетська книга, 2003. – 503с.
2. Вейль Г. Симметрия / Вейль Г. – М.: Наука,1968. – 192с.
3. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию / Кокстер Г. С. М. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 648 с.

Анотація. *Сурган Г. В. Перетворення симетрії на площині та у просторі. Симетрія розглядається як багатопланове і багаторівневе явище, що виражається в різних науках і видах мистецтв. Філософське осмислення поняття симетрії відбувається на матеріалі природничих наук і математики. Наведено основні види симетрії на площині та у просторі, класифікація рухів першого і другого роду.*

Ключові слова: *симетрія, рух, площина, простір.*

Аннотация. *Сурган Г. В. Преобразование симметрии на плоскости и в пространстве. Симметрия рассматривается как многоплановое и многоуровневое явление, выражающееся в различных науках и видах искусств. Философское осмысление понятия симметрии происходит на материале естественных наук и математики. Приведены основные виды симметрии на плоскости и в пространстве, классификация движений первого и второго рода.*

Ключевые слова: *симметрия, движение, плоскость, пространство.*

Abstract. *Surhan G. Symmetry transformation on the plane and in space. Symmetry is regarded as a multidimensional and multilevel phenomenon, expressed in various sciences and arts. Philosophical comprehension of the concept of symmetry occurs on a base of* *material of natural Science and Mathematics. The main types of symmetry on the plane and in space, the classification of motions of the first and second types are given.*

***Key words**: symmetry, motion, plane, space.*

УДК 517.521

Ю.В. Хворостіна, Ю.О. Бамбенкова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

МНОЖИНИ, ПОРОДЖЕНІ ДВОПАРАМЕТРИЧНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ

Вступ. У сучасному підході до побудови більшості математичних теорій широко застосовуються алгебраїчні структури (групи, кільця, поля). Об'єктом нашого дослідження виступають множини, породжені числовими послідовностями, які задаються двома параметрами. Найпростішим випадком таких послідовностей є арифметична, геометрична та гармонійна прогресії [2].

Означення 1. *Арифметична прогресія – це послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d (різниця арифметичної прогресії).*

Означення 2. *Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.*

Означення 3. *Гармонічною прогресією називається послідовність виду*

$$\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \frac{1}{a+d(n-1)}, \frac{1}{a+nd}, \dots\right\}.$$

До двопараметричних числових послідовностей також належить послідовність Фібоначчі, яка є рекурентним співвідношенням другого порядку.

Рекурентнеспіввідношення виду $a_{n+1} = Aa_n + Ba_{n-1}$, $n \geq 2$ (1)

Називають *лінійним рекурентним співвідношенням другого порядку*.

Теорема 1. *Нехай задано співвідношення (1) та вказано початкові умови a_1 і a_2. Тоді, якщо α і β – різні корені рівняння*

$$x^2 - Ax - B = 0$$

то будь-який розв'язок рекуррентного співвідношення (1) має вигляд

$$a_{n+1} = C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}, n \geq 2,$$

якщо ж рівняння має два однакові корені, то довільний розв'язок рекуррентного співвідношення (1) має вигляд

$$a_{n+1} = \alpha^{n+1}(C_1 + nC_2), n \geq 2,$$

де C_1, C_2 – деякі коефіцієнти, що залежать від початкових умов і коренів рівняння.

Означеннння 4.*Числова послідовність з початковими членами U_1, U_2, кожен член якої, починаючи з третього, задовольняє співвідношення*

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, n \geq 2 \ (2)$$

називають послідовністю Фібоначчі [1].

Теорема 2.Загальний розв'язок співвідношення (2) має вигляд