

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 40, № 4

Суми – 2025

**Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 2 від 29.09.2025 р.)**

Редакційна колегія

М.П. Вовк	доктор педагогічних наук, старший науковий співробітник (Україна)
М.Гр. Воскоглу	доктор філософії, почесний професор математичних наук (Греція)
М.Г. Друшляк	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Р.А. Зіатдінов	доктор педагогічних наук, професор (Південна Корея)
А.П. Кудін	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
О.Ю. Кудріна	доктор економічних наук, професор (Україна)
О.О. Лаврентьєва	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Т.Д. Лукашова	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Т.Ю. Осипова	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
М.В. Працьовитий	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Д.О. Сарфо	доктор педагогічних наук, професор (Гана)
О.В. Семеніхіна	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
О.М. Семеног	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
В.І. Статівка	доктор педагогічних наук, професор (Китай)
І.Я. Субботін	доктор фізико-математичних наук, професор (США)
О.С. Чашечникова	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
О.В. Школьнік	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
А.М. Добровольська	доктор педагогічних наук, доцент (Україна)
О.О. Пипка	доктор фізико-математичних наук, доцент (Україна)
С.Д. Фатмар'янті	доктор фізичних наук, Університет Мухаммадії Пурворехо (Індонезія)
В.О. Швець	кандидат педагогічних наук, професор (Україна)
В.Г. Шамоля	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 40, № 4. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2025. 77 с.

*Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.*

Журнал індексується наукометричною базою **Index Copernicus Journals Master List**

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

**УДК 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571**

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty**

**ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)**

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 40, No. 4

Sumy – 2025

**Recommended for publication by the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(Protocol No 2 from 29.09.2025)**

Editorial Board

M.P. Vovk	Doctor of Pedagogical Sciences, Senior Research Fellow (Ukraine)
M.Gr. Voskoglou	Doctor of Philosophy, Professor Emeritus of Mathematical Sciences (Greece)
M.G. Drushlyak	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
R.A. Ziatdinov	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (South Korea)
A.P. Kudin	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
O.Yu. Kudrina	Doctor of Economic Sciences, Professor (Ukraine)
O.O. Lavrentjeva	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
T.D. Lukashova	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
T.Yu. Osypova	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
M.V. Pratsiovytyi	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
J.O. Sarfo	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ghana)
O.V. Semenikhina	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
O.M. Semenog	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
V.I. Stativka	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (China)
I.Ya. Subbotin	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (USA)
O.S. Chashechnykova	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
O.V. Shkolnyi	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
A.M. Dobrovol'ska	Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor (Ukraine)
O.A. Pypka	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor (Ukraine)
S.D. Fatmaryanti	Dr. of Physics Education, Universitas Muhammadiyah Purworejo (Indonesia)
V.O. Shvets	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Professor (Ukraine)
V.G. Shamonina	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Associate Professor (Ukraine)

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 40, No. 4. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2025. 77 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of the intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

**UDC 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571**

ЗМІСТ

Ачімпонг Ф. А., Авуа Ф. К. 6	ВІВЧЕННЯ ЗМІСТУ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТІ ПРОФЕСІЙНО-ТЕХНІЧНОЇ ОСВІТИ: СИСТЕМАТИЗАЦІЙНИЙ ОГЛЯД 6
Авдонін К. 13	ДОПОВНЕННЯ МЕТОДИКИ ВИКЛАДЕННЯ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ АТОМА ВОДНЮ 13
Бохонов Ю. 18	НЕРІВНОСТІ ГЕЛЬДЕРА ТА МІНКОВСЬКОГО ТА ЇХНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ 18
Витвицька О., Тимків І. 23	ЗАСТОСУВАННЯ ЦИФРОВИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВИРОБНИЧИХ ЗАДАЧ 23
Гнатюк О., Колмакова В., Решітник Ю., Білик К. 30	ПРОФЕСІЙНА ОРІЄНТАЦІЯ ДІТЕЙ З ООП ЗАСОБАМИ STEAM-ОСВІТИ 30
Курченко О., Синявська О. 40	МОНОТОННІ ЛАНЦЮЖКИ МНОЖИН В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ 40
Сухіх А. 45	ІНТЕГРАЦІЯ ПЛАТФОРМ ВІДЕОЗВ'ЯЗКУ ТА ДОПОВНЕНОЇ РЕАЛЬНОСТІ В МОДЕЛІ УРОКІВ ЗМІШАНОГО І ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ 45
Тихоненко Ю., Школьний О. 52	ОРГАНІЗАЦІЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНСЬКІЙ ПРОФІЛЬНІЙ СТАРШІЙ ШКОЛІ 52
Шамоня В., Сорока М., Семеніхіна О. 59	STEM-ОРІЄНТОВАНЕ НАВЧАННЯ АРХІТЕКТУРИ КОМП'ЮТЕРА У ФОРМУВАННІ ІНЖЕНЕРНОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ 59
Швець В., Мартинюк К. 65	ФОРМУВАННЯ У ШКОЛЯРІВ ГРОМАДЯНСЬКОЇ ІДЕНТИЧНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В 5-6 КЛАСАХ 65
Деордіца Т., Сухомовська О. 73	РЕЦЕНЗІЯ НА КНИГУ: АСТРОФІЗИКА ДЛЯ ТИХ, ХТО ЦІНУЄ ЧАС 73
АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК 76	

CONTENTS

Acheampong P.A., Awuah F.K. 6	THE STUDY OF MATHEMATICS CONTENT IN THE CONTEXT OF VOCATIONAL EDUCATION: A SYSTEMATIC REVIEW 6
Avdonin K. 13	ADDITIONAL METHODS FOR TEACHING THE QUANTUM THEORY OF THE HYDROGEN ATOM 13
Bokhonov Yu. 18	THE INEQUALITIES OF HELDER AND MINKOVSKY AND THEIR GENERALIZATIONS 18
Vytvytska O., Tymkiv I. 23	APPLICATION OF DIGITAL LEARNING TOOLS FOR SOLVING PRODUCTION TASKS 23
Hnatiuk O., Kolmakova V., Reshitnyk Yu., Bilyk K. 30	PROFESSIONAL ORIENTATION OF CHILDREN WITH SPECIAL NEEDS BY MEANS OF STEAM EDUCATION . 30
Kurchenko O., Syniavska O. 40	MONOTONE CHAINS OF SETS IN OLYMPIAD PROBLEMS 40
Sukhikh A. 45	INTEGRATION OF VIDEO COMMUNICATION AND AUGMENTED REALITY PLATFORMS INTO THE MODEL OF BLENDED AND DISTANCE LEARNING LESSONS IN GENERAL SECONDARY EDUCATION INSTITUTIONS.. 45
Tykhonenko Yu., Shkolnyi O. 52	ORGANIZATION OF REPETITION AND SYSTEMATIZATION OF THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE IN A UKRAINIAN UPPER SECONDARY PROFILE SCHOOL 52
Shamonia V., Soroka M., Semenikhina O. 59	STEM-ORIENTED TEACHING OF COMPUTER ARCHITECTURE IN DEVELOPING ENGINEERING THINKING OF FUTURE COMPUTER SCIENCE TEACHERS 59
Shvets V., Martyniuk K. 65	FORMATION OF CIVIC IDENTITY IN SCHOOLCHILDREN DURING MATHEMATICS EDUCATION IN GRADES 5-6 65
Dieorditsa T., Sukhomovska O. 73	BOOK REVIEW: ASTROPHYSICS FOR THOSE WHO VALUE TIME 73



ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА (PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)

p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X

2025, 40(4), <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-01>

UDC: 377:51:37.016(045)

ВИВЧЕННЯ ЗМІСТУ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТІ ПРОФЕСІЙНО-ТЕХНІЧНОЇ ОСВІТИ: СИСТЕМАТИЧНИЙ ОГЛЯД

Філіп Аджей АЧЕМПОНГ ✉

Університет науки й технології імені Кваме Нкруми, Гана
p.a.acheampong@mail.com
<https://orcid.org/0009-0004-7151-0451>

Френсіс Кводво АБУА

Університет науки й технології імені Кваме Нкруми, Гана
awuahfrancis67@hismail.com

THE STUDY OF MATHEMATICS CONTENT IN THE CONTEXT OF VOCATIONAL EDUCATION: A SYSTEMATIC REVIEW

Philip Adjei ACHEAMPONG ✉

Kwame Nkrumah University of Science and Technology, Ghana
p.a.acheampong@mail.com
<https://orcid.org/0009-0004-7151-0451>

Francis Kwadwo AWUAH

Kwame Nkrumah University of Science and Technology, Ghana
awuahfrancis67@hismail.com

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Математика має фундаментальне значення для професійно-технічної освіти (ПТО). Це пов'язано з тим, що математика дозволяє учням закладів ПТО розвивати навички розв'язування задач, необхідні у відповідних галузях професійної діяльності. Незважаючи на це, існує багато свідчень того, що учні закладів ПТО в усьому світі мають слабкі математичні навички. Різні дослідження зосереджувалися на успішності та зацікавленості учнів математикою, але мало уваги приділялося вивченню змісту математики в професійно-технічній освіті. У цьому дослідженні представлено систематичний аналіз змісту математики у професійно-технічній освіті з січня 2015 р. по січень 2024 р.

Матеріали і методи. Дані були зібрані шляхом аналізу 17 статей з математики в ПТО із загального пошуку Google Scholar, Scopus, журналу Eric та бази даних EBSCOHost. Числові дані були представлені у вигляді відсотків і частот, тоді як якісні дані були проаналізовані тематично.

Результати. Дослідження показало, що найбільше статей було опубліковано у 2022 році, далі йдуть 2017 та 2021 роки. Найменше статей було опубліковано у 2015, 2018 та 2020 роках. Результати також показали, що більшість авторів пов'язані з Південною Африкою, за нею йдуть Швеція та Індонезія, а найменше – з Туреччиною та Катаром. Науковці зосереджуються на двох основних темах: викладання математики у закладах ПТО та важливість математики для ПТО.

Висновки. Результати підкреслюють важливість додаткових досліджень у цій галузі для підвищення якості математичної освіти в закладах ПТО в усьому світі з метою задоволення потреб швидкозмінного ринку праці.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: систематичний огляд; бібліометричний аналіз; зміст математики; професійно-технічна освіта; компетентності.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Acheampong P. A., Awuah F. K. The study of mathematics content in the context of vocational education: a systematic review. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 6-12. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-01>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Mathematics is fundamental to Technical and Vocational Education and Training (TVET). This is because mathematics enables TVET students to develop the problem-solving skills required in their respective trade areas. Despite this, there is ample evidence that TVET students around the world have poor mathematical skills. To address this issue, various studies have focused on TVET students' performance and interest, teaching mathematics in vocational education, and the relevance of mathematics, with little emphasis on the study of mathematics content in vocational education. This current study presents a systematic analysis of mathematics content in vocational education from January 2015 to January 2024.

Materials and methods. Data were collected by analyzing 17 articles on mathematics in TVET from Google Scholar general search, Scopus, the Eric journal, and the EBSCOHost database. The numerical data were presented as percentages and frequencies, whereas the qualitative data were analysed thematically.

Results. The study found that the majority of articles were published in 2022, followed by 2017 and 2021. However, the fewest number of articles were published in 2015, 2018, and 2020. The findings also revealed that the majority of authors are affiliated with South Africa, followed by Sweden and Indonesia, with Turkey and Qatar having the fewest affiliations. Finally, the findings revealed that the authors focused on two major themes: teaching mathematics in the context of TVET and the importance of mathematics in TVET.

Conclusions. This review emphasizes the importance of additional research in this area to improve the quality of mathematics education in TVET programs around the world in order to meet the workforce's changing needs.

KEYWORDS: systematic review; bibliometric analysis; mathematics content; technical and vocational education and training; competencies.

FOR CITATION: Acheampong, P. A., & Awuah, F. K. (2025). The study of mathematics content in the context of vocational education: a systematic review. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 6-12. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-01>.

INTRODUCTION

Technical and Vocational Education and Training (TVET) is critical for providing individuals with the skills required for careers in a variety of industries (Okolie et al., 2020). This is because TVET programs are tailored to the needs of the job market, ensuring that students who complete TVET training have the necessary skills to find work in their desired fields or start their own

businesses (Ngware et al., 2024). This is consistent with SDG 4 Agenda 2030 target 8.6, which states that in order to address both current and future issues, individuals must be empowered to become effective and resilient. This will ensure that TVET remains relevant to the economy and society (Keevy et al., 2021). To keep up with changes in sustainability, environmental protection, migration, and digital technology, technical and vocational education and training (TVET) must update its facilities, skills, and methods more quickly than previously (Keevy et al., 2021).

To accomplish this, TVET students must have strong problem-solving abilities, which is one of the focuses of mathematics. To ensure this, research studies have highlighted the need for TVET students to acquire the mathematics competencies and skills required to comprehend the concepts taught in various TVET programs (Frejd & Muhrman, 2022). As a result, incorporating mathematics content into TVET programs is critical to ensuring that students have the necessary knowledge and skills to excel in their chosen vocations (Dalby & Noyes, 2015). FitzSimons and Boistrup (2018), for example, claimed that all types of skilled work contain elements of mathematics (including statistics), which are used explicitly or implicitly, and sometimes completely embedded within vocational activities. In line with this, Jassem and Alyaqout (2018) stated that mathematical competencies such as measurement, geometric calculations, and trigonometry are essential in preparing students for successful careers in welding and fabrication.

Despite the importance of mathematics in TVET, there is a lack of research into the specific mathematical concepts covered in TVET programs. A systematic review of the literature is required to determine current trends, areas for improvement, and the focus of previous studies. As a result, the purpose of this study is to conduct a thorough examination of the current body of literature on the mathematical content included in TVET programs worldwide from 2015-2024, as well as the literature's trend and the focus of previous studies. The findings of this study will fill gaps in the literature and have important implications for educators, policymakers, and stakeholders involved in TVET programs. This study aims to contribute to ongoing efforts to improve mathematics education in TVET programs by identifying best practices and areas for improvement.

Research Questions

The present systematic review was guided by two research questions:

1. What is the distribution of articles by date and country of affiliation/publication?
2. What is the primary focus of the articles on mathematics and TVET?

RESEARCH METHODS

Search Strategy

Various search techniques were used to locate relevant papers through online database searches that best matched the study's goal. In addition to specific search terms, the researcher used ancestor search techniques, which involved looking through previously identified literature references to find additional relevant papers for the study (Cooper, 2010). This method provided valuable context for the systematic review. To reduce bias in the study, the number of articles published on websites has nearly reached its limit. Online databases such as Eric, Google Scholar, Scopus, and EBSCOHost were used to collect relevant papers for the study. This is due to the study's focus on education, and the sources are the most widely used databases in both the social sciences and education. The three sources were also well-established and recognized in the field of social sciences, which includes this study. Lastly, these sources provided free databases that increased the researcher's access to the relevant literature. The following keywords: "mathematics content for TVET," "Mathematics for masonry, carpenters, welders, seamstress, engineers," "integration of mathematics in TVET program," "Importance of mathematics in TVET," "how mathematics is taught in TVET schools," "improving TVET students interest in Mathematics," etc, "mathematics competencies for TVET" were used to begin the search online. To ensure more thorough and comprehensive coverage of mathematical content in vocational education, each keyword was run independently in each database. Only peer-reviewed journals were considered in the study because they provided the most reliable source of scientific data and improved the study's quality.

Study Selection

This systematic review was conducted from January 2024 to July 2024. The article search for the review began on January 5th, 2024. Initially, the internet search returned 779 articles from the four databases. The articles are distributed according to the databases Eric (117), Google Scholar (313), Scopus (252), and EBSCOHost (97). Before exporting the remaining articles (78) to Mendeley, a manual screen was performed to remove the 701 articles that had been eliminated. The abstracts and titles were thoroughly reviewed and screened using the Mendeley software. At this level, 47 articles were removed from the total because their topics and abstracts did not align with the focus of this study, leaving 31 articles to be evaluated for eligibility using full-text articles. At this point, 14 of the 31 articles had been eliminated, leaving only 17 articles. The 14 articles that were excluded consisted of 9 duplicates and 5 irrelevant articles. For the purposes of this systematic review, the 17 articles were synthesized. Figure 1 depicts an overview of the systematic literature review search protocol, which is based on Moher et al.'s (2009) 'Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analysis' (PRISMA).

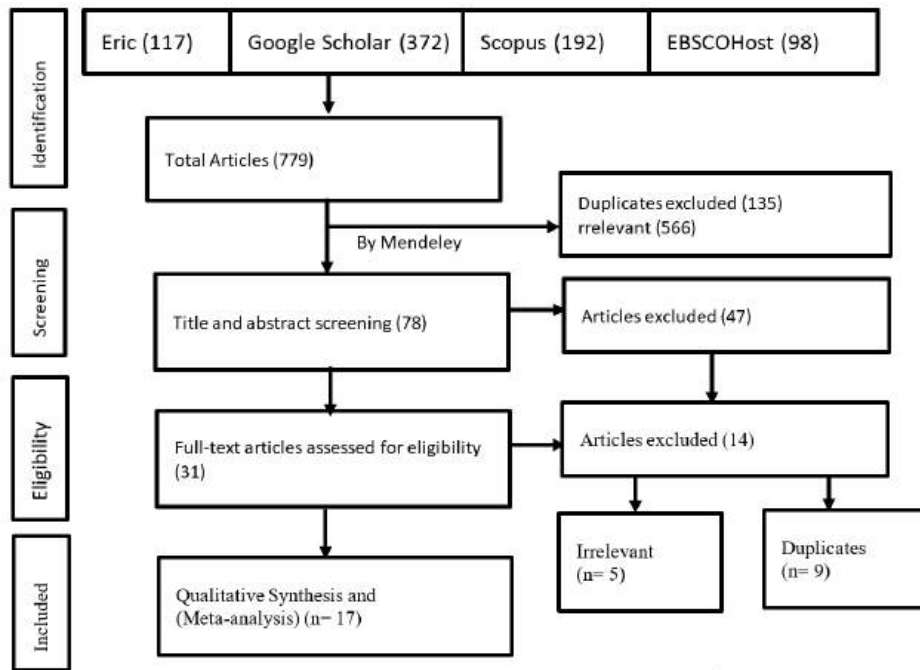


Fig. 1. Flow Diagram of Studies' Screening and Selection (based on PRISMA)

Source: Own Work

Inclusion Criteria

To identify the literature included in the study, an inclusion criterion was followed, as shown in Table 1.

Table 1. Inclusion Criteria for the Systematic Review

Criterion	Inclusion criteria
Period of the empirical studies	Articles published between January 2015 and January 2024 were selected for the study because they are considered current literature and provide current information on mathematics content for vocational education.
Level of education	Elementary, secondary, and tertiary
Focus	mathematics content in the context of vocational education
Research approach	Qualitative, quantitative, and mixed methods
Geographical Spread	Across the globe
Design	survey, case study, and document analysis
Research Base	Empirical evidence forms the base of the study

Source: Own Work

Evaluation of the Methodological Quality

In an analysis of multiple reviews, the credibility of the findings is determined by the outcomes of the included reviews, which are based on the findings of the original studies in each review. Two critical questions were raised: 1. Was the review properly conducted, and 2. Was the quality of the primary studies assessed in the review? These questions were answered with an adjusted version of the 'assessment of multiple systematic reviews' (AMSTAR) tool (Shea et al., 2007). It is important to note that reviews were not disregarded due to their quality.

Data Extraction and Analysis

To extract each downloaded article, the researcher's bibliometric analysis sheet/table was utilized. The table was created based on the study's inclusion criteria. Author's name, context, book/thesis/articles. Context (study area), topic, contribution, research design, findings/conclusions, and what the author(s) left out (limitation). Other characteristics discovered in the literature were determined by the research questions. The first research question was presented using frequencies and percentages, while the second was thematically analysed.

RESEARCH RESULTS

The analysis included 17 empirical articles from a systematic review of educational research published between January 2015 and January 2024 on mathematics content in vocational education settings. The results showed that the majority of the articles were published in 2022, followed by 2017 and 2021. However, the lowest number of articles was published in 2015, 2018, and 2020, accounting for only 5.9%. This could be due to a lack of attention paid to articles about mathematics content in TVET education during those years. It can also be seen that South Africa is the country of affiliation for the most authors, with 29.4% representing five articles. Sweden and Indonesia had the next highest number of published articles after South Africa. Turkey and Qatar, on the other hand, had the fewest number of published articles. The disparity in affiliation could be attributed to funding for research and publishing in the field of TVET education, as well as the fact that mathematical content is more readily available

in those countries. Countries with strong research infrastructure, such as well-equipped universities, research centers, and libraries, may have more resources available for researchers to conduct studies on TVET education and mathematical content (Tun & Juchelková, 2022).

Research Question One: Distribution of the Articles according to Date and the Country of Affiliation/Publication?

Table 2. Distribution of the Articles according to Date and the Country of Affiliation/Publication

	<i>Frequency</i>	<i>Percentages</i>
<i>Year of Publication</i>		
2015	1	5.9
2017	3	17.6
2018	1	5.9
2019	2	11.8
2020	1	5.9
2021	2	11.8
2022	5	29.4
2023	2	11.8
<i>Country of Affiliation/Publication</i>		
Indonesia	3	17.6
Qatar	1	5.9
South Africa	4	23.5
Sweden	3	17.6
Turkey	1	5.9
UK	2	11.8
USA	3	17.6

Source: Own Work

Researchers in countries with established research networks and partnerships may have more opportunities to collaborate on studies involving TVET education and mathematical curriculum (Schröder, 2019). Collaborations with scholars from other countries can also result in more diverse and extensive investigations, which lead to more publications (Hoekman et al., 2010; Bozeman et al., 2013). Some countries may prioritize TVET education and mathematics content in their national policies and objectives (Ayonmike et al., 2015). The bibliometric analyses of the articles are shown in Table 3.

Research Question Two: What are the main focuses of the articles on mathematics content and TVET?

The articles revealed two major themes: the application of mathematics in TVET and the teaching of mathematics in TVET schools. Thirteen of the 17 articles focused on mathematics teaching in TVET schools, while the other four articles focused on mathematics application in TVET. This indicated that researchers are interested in the application of mathematics to specific trade areas, as well as the effectiveness of mathematics education in TVET schools.

The study found that the authors focused on two major issues. These were the teaching of mathematics in TVET (Dalby & Noyes, 2015; Mustakim, 2017; Kelly, 2018; Said, 2021; Frejd & Muhrman, 2022; Tarhan et al., 2021; Muhrman, 2022; Vimbelo & Bayaga, 2023) and the importance of mathematics in TVET (FitzSimons & Boistrup, 2017; Dominikus et al., 2017; Deda & Amsikan, 2019). Researchers are interested in the mathematics competencies required in various TVET programs, as well as the most effective ways to develop these skills in students. Mathematics plays an important role in technical and vocational education, according to studies.

All TVET trades require some basic mathematics, particularly in technology, engineering, construction, welding, and fabrication. For example, welding and fabrication necessitate a variety of mathematical concepts when forming, arranging, and welding materials. Almost every trade requires material cost calculation and profit estimation (Jassem & Alyaqout, 2018). For example, Deda and Amsikan (2019) demonstrated that traditional woven fabric motifs in the Kefamenanu community necessitate a wide range of geometric concepts. Jassem and Alyaqout (2018) also agreed that mathematical calculations are required in welding before beginning any project or producing any product. This ensures that the welder receives the proper welding dimensions, materials for the welding process, the most cost-effective materials, and the time required to complete a specific product (Jassem & Alyaqout, 2018). According to Istas et al. (2021), mathematics and algebra are extremely important in engineering work, despite the fact that most university students do not apply them. A variety of mathematical concepts are used in carpentry and joinery, including angle, geometry, trigonometry, area, volume, ratio and proportion, and bearing.

FitzSimons and Boistrup (2017) also stated that all forms of skilled work contain elements of mathematics (including statistics), which are used explicitly or implicitly, and sometimes completely embedded within vocational activities. As a result, it is possible to conclude that all successful TVET programs require some level of mathematical competency. The findings also highlighted ways to improve mathematics education in TVET. Because mathematical competencies are required in all TVET areas, it is expected that relevant mathematical concepts and skills be integrated into TVET courses and effectively taught to TVET professionals. Frejd and Muhrman (2022) recognized the need for greater integration of mathematics and vocational subjects in the classroom setting. The mathematics curriculum should be tailored to the specific competencies required in the learners' trade areas, allowing them to immediately apply their mathematical skills and competencies in their chosen fields. Furthermore, contextualized mathematics instruction in TVET institutions has been shown to improve students' mathematical achievement (Mustakim, 2017).

In England, for example, mathematics (as a compulsory component of the program for vocational students) is taught in accordance with the specific context and practical needs of the various TVET (Dalby & Noyes, 2015). Mirabueno and Boyon

(2020), in their study of students' mathematics performance from junior to senior high school, recommended that senior high school mathematics subjects be designed to teach skills relevant to the students' chosen tracks. This is consistent with Lave and Wenger's (1991) situated learning theory, which states that learning is situated in the "activity, context, and culture in which it occurs" (Lave & Wenger, 1991). Given the importance of vocational education programs, mathematics taught in schools should be able to address the skills required in various industries to propel the economy forward.

Table 3. Bibliometric Analysis of the Articles

<i>Author(s) Name</i>	<i>Topic</i>	<i>The country of affiliation/publication</i>	<i>Year</i>
1. Diane Dalby and Andrew Noyes	Connecting Mathematics Teaching with Vocational Learning	UK	2015
2. P. Frejd & K. Muhrma	Is the mathematics classroom a suitable learning space for making workplace mathematics visible?– An analysis of a subject-integrated team teaching approach applied in different learning spaces	Sweden	2022
3. Irfan Rusmar and Mustakim	Teaching Mathematics In Technical Vocational Education (TVET)	Indonesia	2017
4. Gail E. FitzSimons and & Lisa Björklund Boistrup	In the workplace, mathematics does not announce itself: towards overcoming the hiatus between mathematics education and work	Sweden	2017
5. Karolina Muhrman	How can students in vocational education be motivated to learn mathematics?	Sweden	2022
6. Makhosi P. Madimabe, Bunmi I. Omodan, and Cias T. Tsotetsi	Indigenous Knowledge As An Alternative Pedagogy To Improve Student Performance In The Teaching And Learning Of Mathematical Geometry In Tvet College	South Africa	2020
7. Makhosi P. Mademabe, Bunmi Isaiyah Omodan, and Cias T. Tsotetsi	Incorporation of Indigenous Knowledge in the Mathematical Geometry Discipline at a TVET College	South Africa	2022
8. Siphokazi Vimbelo and Anass Bayaga	Humanising Pedagogy in Mathematics Education at South African Technical and Vocational Education and Training (TVET) Colleges: Influence on TVET Teaching and Learning	South Africa	2023
9. S. Vimbelo and A. Bayaga	Current Pedagogical Practices Employed By A Technical Vocational Education And Training College's Mathematics Lecturers	South Africa	2023
10. Ziad SAID	Integrating STEM in to TVET Education Programs in Qatar: Issues, Concerns and Prospects	Qatar	2021
11. Beth Kelly	Motivating adults to learn mathematics in the workplace: a trade union approach	UK	2018
12. Brooke Istas and Candace Walkington	When Am I (N)ever Going to Use This? How Engineers Use Algebra (NSF DRL)	USA	2022
13. Tracy E. Dobie	Expanding conceptions of utility: middle school students' perspectives on the usefulness of mathematics	USA	2019
14. Yohanis Ndapa Deda), Stanislaus Amsikan	Geometry Concept on the Motifs of Woven Fabric in Kefamenanu Community	Indonesia	2019
15. Leyva, C Walkington, H Perera, M Bernacki	Making mathematics relevant: An examination of student interest in mathematics, interest in STEM careers, and perceived relevance	USA	2022
16. Murat Tarhan, Elif Nur Akkaş & Ülkü Ayvaz	Gaining entrepreneurship skills in mathematics education: the middle school mathematics course curriculum of Turkey	Turkey	2021
17. WS Dominikus, T Nusantara, MM Subanji, M Muksar	Ethnomathematical ideas in the weaving practice of Adonara Society	Indonesia	2017

Source: Own work based on the systematic review of literature like Leyva et al. (2022), Tarhan et al. (2021), etc.

Muhrman (2022) supported this by stating that mathematics instruction should be relevant to the workplace. That is, teachers are expected to select mathematical content and examples that are relevant to the specific subject matter being taught. According to Hodgen et al. (2018), mathematics instruction in TVET institutions can be taught separately, as part of vocational instruction, or as part of vocational competencies without being recognized as mathematics. In most countries, such as Germany, Singapore, and Korea, mathematics is embedded in a specific TVET trade area, and students learn it as part of their chosen TVET. Kelly (2018) also stated that workers can be motivated to learn mathematics at work by aligning mathematical concepts with their professions. To summarize, when mathematics is made more meaningful to TVET students in relation to their chosen career or daily life, they will develop a positive attitude toward it and an interest in mathematics.

CONCLUSIONS AND PROSPECTS FOR FURTHER RESEARCH

The systematic review sought to assess the mathematics content and TVET. The study focused on the review of related articles from January 2015 to January 2024. The systematic review of literature on mathematics content in vocational education revealed significant trends. The majority of articles were published in recent years, with 2017 and 2018 having the most publications, indicating a growing interest in the topic during those years. The predominance of qualitative research methods indicates a focus on in-depth exploration and comprehension of the subject. The concentration of articles from South Africa, Sweden, and Indonesia demonstrates a global perspective on the integration of mathematics in TVET. However, the low representation of countries such as Turkey and Qatar suggests that more research is needed in these areas. The articles focused primarily on the application of mathematics in TVET and the effective teaching of mathematics in TVET schools. However, the research literature shows a noticeable lack of representation from the majority of African countries. This study has no limitations. Some of the articles reviewed did not address ethical concerns (Mustakim, 2019; Frejd & Muhman, 2022). Furthermore, some of these articles lack theoretical frameworks to back up their findings (Dalby & Noyes, 2015). Furthermore, this study did not include other types of research, such as doctoral theses and book chapters. This may result in the loss of important information and have an impact on the research findings. This review emphasizes the importance of additional research in this area to improve the quality of mathematics education in TVET programs around the world in order to meet the workforce's changing needs.

The current study focused on a systematic review of mathematics content and TVET. The study was primarily concerned with the distribution of studies on mathematics content and TVET, as well as the primary focus of the articles on these topics. Further research can investigate the alignment between the content of mathematics taught and the competencies required in TVET in various countries. A study can also conduct comparative studies across multiple countries to gain a more comprehensive understanding of how mathematics is integrated into TVET programs around the world. This can help identify best practices and areas for improvement in a variety of settings. Furthermore, more research is needed to investigate the specific challenges and barriers encountered in countries such as Turkey and Qatar when implementing effective mathematics education in TVET schools, as well as to propose strategies for improvement. Finally, future research could look into the impact of industry partnerships and collaborations on improving the relevance of mathematics education in TVET programs and preparing students for the demands of the workforce.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES

1. Akkas, E. N., Tarhan, M., & Ayvas, Ü. (2020). Gaining Entrepreneurship Skills with the Activities Designed Related to Primary School Mathematics Curriculum: The Case of Turkey. *Acta Didactica Napocensia*, 13(2), 93-112.
2. Ayonmike, C. S., Okwelle, P. C., & Okeke, B. C. (2015). Towards Quality Technical Vocational Education and Training (TVET) Programmes in Nigeria: Challenges and Improvement Strategies. *Journal of Education and Learning*, 4(1), 25-34.
3. Bozeman, B., Fay, D., & Slade, C. P. (2013). Research collaboration in universities and academic entrepreneurship: the state of the art. *The journal of technology transfer*, 38(1), 1-67.
4. Cooper, H. (2010). *Research synthesis and meta-analysis: A step-by-step approach* (4th ed.). Los Angeles: Sage.
5. Dalby, D., & Noyes, A. (2015). Connecting Mathematics Teaching with Vocational Learning. *Adults Learning Mathematics*, 10(1), 40-49.
6. Deda, Y. N., & Amsikan, S. (2019). Geometry concept on the motifs of woven fabric in Kefamenanu community. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 4(1), 23-30.
7. Dobie, T. E. (2019). Expanding conceptions of utility: middle school students' perspectives on the usefulness of mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(1), 28-53. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1564969>
8. Dominikus, W. S., Nusantara, T., Subanji, M. M., & Muksar, M. (2017). Ethnomathematical ideas in the weaving practice of Adonara Society. *Journal of Mathematics and Culture*, 11(4), 83-95.
9. FitzSimons, G. E., & Boistrup, B. L. (2017). In the workplace, mathematics does not announce itself: Towards overcoming the hiatus between mathematics education and work. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 329-349.
10. Frejd, P., & Muhman, K. (2022). Is the mathematics classroom a suitable learning space for making workplace mathematics visible? – An analysis of a subject integrated team-teaching approach applied in different learning spaces. *Journal of Vocational Education & Training*, 74(2), 333-351. <https://doi.org/10.1080/13636820.2020.1760337>
11. Hodgen, J., Wake, G., & Dalby, D. (2017). Mathematics in the successful technical education of 16-19 year olds. *London: Gatsby. Retrieved January 17, 2020.*
12. Hoekman, J., Frenken, K., & Tijssen, R. J. (2010). Research collaboration at a distance: Changing spatial patterns of scientific collaboration within Europe. *Research policy*, 39(5), 662-673.

13. Howell, E., Walkington, C., Bernacki, M., & Istas, B. (2020, January). The connection between perception of utility in careers with math and STEM career interest. In *Proceedings of the 23rd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.
14. Istas, B., Walkington, C., Leyva, E., & Bernacki, M. L. (2021, July). When Am I (N) ever Going to Use This? How Engineers Use Algebra (NSF DRL). In *2021, ASEE Virtual Annual Conference Content Access*.
15. Jassem, A. H. N., & Alyaqout, H. M. A. (2018). Mathematics in Welding Design. *Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 15(6), 78–83. <https://doi.org/10.9790/1684-1506017883>
16. Keevy, J., Shiohira, K., Matlala, R., & Molokwane, P. (2021). TVET Delivery: Providing Innovative Solutions. New Qualifications and Competencies for Future-Oriented TVET. Volume 3. *UNESCO-UNEVOC International Centre for Technical and Vocational Education and Training*.
17. Kelly, B. (2019). Motivating adults to learn mathematics in the workplace: A trade union approach. *International Journal of Lifelong Education*, 38(2), 132-147.
18. Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.
19. Leyva, E., Walkington, C., & Perera, H. (2022). Making Mathematics Relevant : an Examination of Student Interest in Mathematics, Interest in STEM Careers, and Perceived Relevance. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 612–641. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00159-4>
20. Madimabe, M. P., Bunmi, I. O., & Cias, T. T. (2020). Indigenous knowledge as an alternative pedagogy to improve student performance in the teaching and learning of mathematical Geometry in TVET College. *Proceedings of ADVED*, 2020(6th).
21. Madimabe, M. P., Omodan, B. I., & Tsotetsi, C. T. (2022). Incorporation of Indigenous knowledge in the mathematical geometry discipline at a TVET college. *Journal of Research in Mathematics Education*, 11(3), 296-312.
22. Mirabueno, J. A. S., & Boyon, M. C. L. (2020). Senior high school academic progression in mathematics. *PEOPLE: International Journal of Social Sciences*, 5(3), 840-849.
23. Moher, D., Liberati, A., Tetzlaff, J., & Altman, D. G. (2009). Preferred reporting items for systematic reviews and meta-analyses: The PRISMA statement, *PLoS Medicine*, 6(7), e1000097.
24. Muhrman, K. (2022). *How can students in vocational education be motivated to learn mathematics?* 12(3), 47–70.
25. Mustakim, I. R. (2017). Teaching mathematics in technical vocational education (TVET). In *Proceedings of the 1st International Conference on Innovative Pedagogy (ICIP) 2017*. STKIP Bina Bangsa Getsempena.
26. Ngware, M. W., Ochieng', V., Kiroro, F., Hungi, N., & Muchira, J. M. (2024). Assessing the acquisition of whole youth development skills among students in TVET institutions in Kenya. *Journal of Vocational Education & Training*, 76(1), 197-222.
27. Okolie, U. C., Elom, E. N., Igwe, P. A., Nwajiuba, C. A., Binuomote, M. O., & Igu, N. (2020). How TVET teachers foster employability skills: insights from developing countries. *International Journal of Training Research*, 18(3), 231-249.
28. Said, Z. (2021). Integrating STEM into TVET education programs in QATAR: Issues, concerns, and prospects. *The Eurasia Proceedings of Educational and Social Sciences*, 23, 15-24.
29. Schröder, T. (2019). A regional approach for the development of TVET systems in the light of the 4th industrial revolution: the regional association of vocational and technical education in Asia. *International Journal of Training Research*, 17(sup1), 83-95.
30. Shea, B. J., Grimshaw, J. M., Wells, G. A., Boers, M., Andersson, N., Hamel, C., ... & Bouter, L. M. (2007). Development of AMSTAR: a measurement tool to assess the methodological quality of systematic reviews. *BMC Medical Research Methodology*, 7, 1-7.
31. Tarhan, M., Akkaş, E. N., & Ayvaz, Ü. (2022). Gaining entrepreneurship skills in mathematics education: the middle school mathematics course curriculum of Turkey. *International journal of mathematical education in science and technology*, 53(12), 3228-3249.
32. Tun, M. M., & Juchelková, D. (2022). A Preliminary Approach toward Development of the TVET Research and Development (R&D) Sector for Sustainable Development in Myanmar. *Sustainability*, 14(9), 5474.
33. Vimbelo, S., & Bayaga, A. (2023A). Humanising pedagogy in mathematics education at South African technical and vocational education and training (TVET) colleges: Influence on TVET teaching and learning. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 22(9), 633-655.
34. Vimbelo, S., & Bayaga, A. (2023B). Current pedagogical practices employed by a technical vocational education and training College's mathematics lecturers. *South African Journal of Higher Education*, 37(4), 305-321.

| Received: 19.04.2025 | Accepted: 25.05.2025 | Published: 29.09.2025 |



ДОПОВНЕННЯ МЕТОДИКИ ВИКЛАДЕННЯ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ АТОМА ВОДНЮ

Костянтин АВДОНІН ✉

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації
імені Героїв Крут, Україна
avdonink13@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6805-0870>

ADDITIONAL METHODS FOR TEACHING THE QUANTUM THEORY OF THE HYDROGEN ATOM

Kostiantyn AVDONIN ✉

Military institute of telecommunications and informatization
named after Heroes of Krut, Ukraine
avdonink13@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6805-0870>

АНОТАЦІЯ

У даній роботі запропонована можливість застосування інтегральних рівнянь, відповідних рівнянню Шредінгера, до знаходження радіальної складової хвильової функції квантової системи двох частинок та допустимих значень головного квантового числа системи. Актуальність роботи обумовлена необхідністю доповнення методики викладення такої важливої ключової задачі квантової механіки, як квантова теорія атома водню, яке полягає в розширенні сукупності методів знаходження розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню та їх систематизації, що буде сприяти кращому розумінню даної теми. Запропонована послідовність викладення матеріалу враховує останні тенденції розвитку методів пошуку розв'язків стаціонарного рівняння Шредінгера в аналітичному вигляді, демонструє можливість знаходження енергетичного спектру квантової системи частинок за допомогою інтегральних рівнянь.

Формулювання проблеми. Квантова теорія атома водню у підручниках та навчальних посібниках з фізики найчастіше викладають, спираючись на одночастинкове рівняння Шредінгера для електрону, переходячи до системи відліку пов'язаної з ядром атома, нехтуючи рухом ядра, або частину матеріалу викладають при розгляді руху електрону в центральному силовому полі. Для узагальнення методики викладання, краще одразу розглядати квантову систему двох частинок: електрону і ядра атома водню.

Матеріали і методи. Головними методами вирішення поставленої проблеми є: засоби пошуку розв'язків звичайних, лінійних, диференціальних рівнянь у частинних похідних, теорія багатовимірних інтегральних рівнянь та теорія функцій Гріна.

Результати. З'ясовано, що радіальні складові хвильових функцій атома водню, що визначають енергетичний спектр, можна отримувати без переходу до сферичної системи, що спрощує викладення матеріалу теми. Запропоновано узагальнення послідовності викладення матеріалу по квантовій теорії атома водню.

Висновки. Запропоноване узагальнення методики знаходження розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню дозволяє підсилити повноту викладення матеріалу теми «Квантова механіка», підвищує ступінь доказовості викладення матеріалу та сприяє його розумінню.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: атом водню; інтегральне рівняння; квантова механіка; методика.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Авдонін К. Доповнення методики викладення квантової теорії атома водню. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 13-17. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-02>.

ABSTRACT

This paper proposes the possibility of applying integral equations corresponding to the Schrödinger equation to find the radial component of the wave function of a quantum system of two particles and the permissible values of the principal quantum number of the system. The relevance of the work is due to the need to supplement the methodology for presenting such an important key problem of quantum mechanics as the quantum theory of the hydrogen atom, which consists of expanding the set of methods for finding solutions to the Schrödinger equation for the hydrogen atom and their systematization, which will contribute to a better understanding of this topic. The proposed sequence of presenting the material takes into account the latest trends in the development of methods for finding solutions to the stationary Schrödinger equation in analytical form, demonstrating the possibility of finding the energy spectrum of a quantum system of particles using integral equations.

Formulation of the problem. The quantum theory of the hydrogen atom in physics textbooks and manuals is most often taught based on the single-particle Schrödinger equation for the electron, switching to a reference frame associated with the atomic nucleus, neglecting the motion of the nucleus, or part of the material is taught when considering the motion of the electron in a central force field. To generalize the teaching methodology, it is better to immediately consider a quantum system of two particles: an electron and a hydrogen atom nucleus.

Materials and methods. The main methods for solving the problem are: means of finding solutions to ordinary, linear, and partial differential equations, the theory of multidimensional integral equations, and the theory of Green's functions.

Results. It was found that the radial components of the wave functions of the hydrogen atom, which determine the energy spectrum, can be obtained without transitioning to a spherical system, which simplifies the presentation of the topic material. A generalization of the sequence of presentation of the material on the quantum theory of the hydrogen atom is proposed.

Conclusions. The proposed generalization of the method for finding solutions to the Schrödinger equation for the hydrogen atom allows for a more complete presentation of the material on the topic "Quantum Mechanics", increases the degree of provability of the presentation of the material, and facilitates its understanding.

KEYWORDS: hydrogen atom; integral equation; quantum mechanics; methodology.

FOR CITATION: Avdonin, K. (2025). Additional methods for teaching the quantum theory of the hydrogen atom. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 13-17. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-02>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Необхідною складовою частиною підготовки високоякісних фахівців, дослідників у галузі створення і дослідження властивостей нових композитних та наноструктурованих матеріалів є отримання глибоких знань по квантовій механіці, володіння основними методами отримання результатів. Однією з ключових задач квантової механіки, розв'язок якої ілюструє сутність квантової механіки та використовується у теорії багатовалентного атома та фізиці твердого тіла, є квантова теорія атома водню. Викладення матеріалу по квантовій теорії атома водню у підручниках має певні недоліки. У деяких посібниках знаходження розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню проводиться шляхом знаходження точних розв'язків наближеного, одночастинкового рівняння Шредінгера для електрону, при нехтуванні рухом ядра атома, що знижує рівень доказовості матеріалу. Доцільно знаходити точні розв'язки рівняння Шредінгера для атома водню і потім переходити до обґрунтованих наближень. У багатьох підручниках по квантовій фізиці квантова теорія атома водню викладається у двох окремих параграфах, що ускладнює розуміння теми. Окрім цього, у підручниках не приділяється достатня увага інтегральним рівнянням, відповідним рівнянню Шредінгера, що звужує коло методів майбутніх досліджень.

Аналіз актуальних досліджень. На сьогоднішній день інтегральні рівняння, відповідні хвильовій функції системи частинок, є ефективним, дійовим засобом отримання результатів. Наприклад, у роботі (Barlette et al., 2001) інтегральні рівняння застосовують до теорії розсіяння, у випадку центральносиметричного потенціалу, ілюструються поняття функції Гріна, інтегральні рівняння розсіяння Ліпмана-Швінгера для хвильової функції та оператора переходу. У роботі (Mikulski et al., 2014) спираючись на інтегральне рівняння типу Фредгольма отриманий аналітичний вигляд u - коливної функції. У роботі (Visinelli & Gondolo, 2010) отримане нове інтегральне рівняння, яке дозволяє обчислити амплітуду розсіяння або анігіляції двох частинок, що перебувають під впливом двох потенціалів, якщо відома відповідна амплітуда одного з потенціалів. При огляді викладення матеріалу по квантовій теорії атома водню у сучасних підручниках можна відмітити, наприклад, роботу (Губарев, 2024), в якій використовується найбільш типовий підхід для сучасних підручників з курсу загальної фізики: розглядається одночастинкове рівняння Шредінгера для електрону, початок системи координат вибирається у ядрі атома, нехтуючи рухом ядра атома. Потім, після переходу до сферичної системи координат, розділяють змінні і отримують систему з трьох незалежних рівнянь, добуток розв'язків яких буде хвильовою функцією електрону в атомі водню. У роботі (Юхновський, 2002) квантовій теорії атома водню передують більш загальні задачі: розгляд квантової частинки у центральному силовому полі, частинним випадком якої є атом водню. Хвильова функція атома водню знаходиться за допомогою точного рівняння Шредінгера для атома водню, у вигляді добутку хвильової функції центру мас атома і хвильової функції атома, відносно центру мас, шляхом переходу до сферичної системи координат. У роботі (Висоцький, 2008) теж розглядається точне рівняння Шредінгера, яке не повністю розв'язується, приділяється більша увага фізичному змісту розв'язків. У роботі (Кубишкін, 2016) радіальна складова хвильової функції основного стану знаходиться з її асимптотичної поведінки, наступні радіальні складові хвильової функції знаходяться шляхом прямої підстановки у вихідне рівняння добутку хвильової функції основного стану і скінченного поліному від модуля радіус-вектора. У роботі (Боровий & Оліх, 2011) більша частина квантової теорії атома водню теж викладається з використанням матеріалу іншого параграфу: частинка у центрально-симетричному полі, де більш детально аналізується поведінка радіальної складової хвильової функції частинки при малих відстанях до силового центру.

Стационарне рівняння Шредінгера для атома водню має вигляд:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2\mu_1}\Delta_1 + \frac{\hbar^2}{2\mu_2}\Delta_2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right)\psi = (W_{12} + W_C)\psi, \quad (1)$$

де \vec{r}_1 ; \vec{r}_2 – радіус-вектори електрону та ядра, μ_1 ; μ_2 – маси електрону та ядра, Δ_1 ; Δ_2 – лапласіани для електрону та ядра, відповідно; W_{12} – енергія атома водню, відносно центру мас; W_C – кінетична енергія центру мас атома водню. Якщо перейти до інших змінних за правилом:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad ; \quad \vec{\eta} = \frac{\mu_1\vec{r}_1 + \mu_2\vec{r}_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (2)$$

то хвильову функцію атома можна шукати у вигляді добутку двох функцій: $\psi = \varphi(\vec{r})\varphi_C(\vec{\eta})$ і представити рівняння (1) у вигляді:

$$\varphi_C \left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r\varphi + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\varphi + W_{12}\varphi \right) + \varphi \left(\frac{\hbar^2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\Delta_\eta\varphi_C + W_C\varphi_C \right) = 0. \quad (3)$$

де $\mu = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, Δ_r ; Δ_η – лапласіани у нових змінних.

Покладаючи рівними нулю дужки у виразі (3) можна звести пошук розв'язків рівняння (1) до знаходження розв'язків двох незалежних рівнянь:

$$(\Delta_r - k^2)\varphi = u\varphi, \quad (4)$$

$$(\Delta_\eta + k_C^2)\varphi_C = 0, \quad (5)$$

де $k = \frac{\sqrt{2\mu(-W_{12})}}{\hbar}$; $u = -\frac{2\alpha}{r}$; $\alpha = \frac{\mu e^2}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}$; $k_C = \frac{\sqrt{2(\mu_1 + \mu_2)W_C}}{\hbar}$.

Метою роботи є демонстрація можливості отримання радіальної складової розв'язків рівняння (4), шляхом застосування, відповідного йому, інтегрального рівняння.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При знаходженні розв'язків лінійного, диференціального рівняння у частинних похідних (4), була використана теорія багатовимірних, інтегральних рівнянь та частинний випадок функції Гріна, відповідної одночастинковому рівнянню Шредінгера.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримання радіальної складової хвильової функції. Однорідне, інтегральне рівняння, відповідне диференціальному рівнянню (4), отримане у роботі (Avdonin & Kovalchuk, 2019), має вигляд:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\vec{\xi}) \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}, \tag{6}$$

де $G(\vec{r} - \vec{\xi}) = -\frac{\exp(-k|\vec{r} - \vec{\xi}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|}$ – одночастинкова функція Гріна, відповідна рівнянню (4).

Якщо підставити у рівняння (6) функцію Гріна і приведену потенціальну енергію в явному вигляді, то:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\exp(-k|\vec{r} - \vec{\xi}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|} \frac{2\alpha}{\xi} \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}. \tag{7}$$

У роботі (Авдонін, 2023) показано, що згортку функцій Гріна можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{2k} \frac{\partial G(\vec{r})}{\partial k} = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) G(\vec{\xi}) d\vec{\xi}. \tag{8}$$

Для одночастинкової функції Гріна з рівності (8) випливає:

$$\exp(-kr) = \frac{k}{\alpha} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\exp(-k|\vec{r} - \vec{\xi}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|} \frac{2\alpha}{\xi} \exp(-k\xi) d\vec{\xi}, \tag{9}$$

тобто:

$$\exp(-kr) = \frac{k}{\alpha} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\xi) \exp(-k\xi) d\vec{\xi}, \tag{10}$$

Порівнюючи вирази (7) і (10) можна побачити, що при рівному одиниці постійному множнику перед інтегралом у виразі (10), розв'язком однорідного, інтегрального рівняння (6) буде експонента: $\exp(-kr)$.

Таким чином, радіальна складова першої хвильової функції атома водню і відповідне їй значення хвильового числа будуть такими:

$$\varphi_1 = \exp(-k_1 r); \quad k_1 = \alpha. \tag{11}$$

Радіальну складову другої хвильової функції теж можна знайти, як розв'язок інтегрального рівняння (6).

Запишемо рівняння (10) у вигляді:

$$\frac{\alpha}{k} \exp(-kr) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\xi) \exp(-k\xi) d\vec{\xi}. \tag{12}$$

Знайдемо похідну по k від рівняння (12):

$$-\left(\frac{\alpha}{k^2} + \frac{\alpha r}{k}\right) \exp(-kr) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G(\vec{r} - \vec{\xi})}{\partial k} u(\xi) \exp(-k\xi) d\vec{\xi} - \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\vec{\xi}. \tag{13}$$

Доданок у виразі (13), який містить похідну від функції Гріна, можна перетворити, використовуючи властивість симетричності згортки, наступним чином:

$$\frac{k}{\alpha} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G(\vec{r} - \vec{\xi})}{\partial k} u(\xi) \exp(-k\xi) d\vec{\xi} = -\frac{k}{\alpha} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\vec{\xi}. \tag{14}$$

Враховуючи вираз (14) похідну (13) можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{\alpha}{k^2} + \frac{\alpha r}{k}\right) \exp(-kr) = 2 \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\vec{\xi}. \tag{15}$$

Вираз (15) можна перетворити наступним чином:

$$\frac{2k}{\alpha} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\vec{r} - \vec{\xi}) u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\vec{\xi} = (1 + kr) \exp(-kr). \tag{16}$$

Покладаючи множник перед інтегралом у виразі (16) рівним одиниці, знаходимо значення хвильового числа для

другої хвильової функції: $k_2 = \frac{\alpha}{2}$. З рівності (16) випливає, що друга хвильова функція буде добутком експоненти і поліному першої степені від змінної $k_2 r$:

$$\varphi_2 = (1 + ak_2 r) \exp(-k_2 r). \quad (17)$$

де a – постійна, безрозмірна величина.

Підставляючи рівність (17) в інтегральне рівняння (6) та використовуючи рівності (10) і (16), з новим значенням хвильового числа, одержимо: $a = -1$. Тоді, радіальна складова другої хвильової функції буде такою:

$$\varphi_2 = (1 - k_2 r) \exp(-k_2 r). \quad (18)$$

Для отримання радіальної складової третьої хвильової функції знайдемо похідну по k від рівняння (15):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2\alpha}{k^3} + \frac{2\alpha r}{k^2} + \frac{\alpha r^2}{k}\right) \exp(-kr) &= 2 \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G(\bar{r} - \bar{\xi})}{\partial k} u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\xi - \\ &- 2 \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\bar{r} - \bar{\xi}) u(\xi) \xi^2 \exp(-k\xi) d\xi \end{aligned} \quad (19)$$

Перетворюючи доданок у виразі (19), який містить похідну від функції Гріна, з використанням представлення похідної по k від функції Гріна у вигляді згортки:

$$\frac{\partial G(\bar{r} - \bar{\xi})}{\partial k} = 2k \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\bar{r} - \bar{q}) G(\bar{\xi} - \bar{q}) d\bar{q}, \quad (20)$$

та рівності (15), маємо:

$$\begin{aligned} 2 \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G(\bar{r} - \bar{\xi})}{\partial k} u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\xi &= - \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\bar{r} - \bar{\xi}) u(\xi) \xi^2 \exp(-k\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{k} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\bar{r} - \bar{\xi}) u(\xi) \xi \exp(-k\xi) d\xi \end{aligned} \quad (21)$$

Використовуючи вираз (21) та рівність (16) похідну (19) можна перетворити і записати у вигляді:

$$\frac{3k}{\alpha} \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G(\bar{r} - \bar{\xi}) u(\xi) k^2 \xi^2 \exp(-k\xi) d\xi = \left(\frac{3}{2} + \frac{3kr}{2} + k^2 r^2\right). \quad (22)$$

Покладаючи множник перед інтегралом у виразі (22) рівним одиниці, знаходимо значення хвильового числа для третьої хвильової функції: $k_3 = \frac{\alpha}{3}$. З рівності (22) випливає, що третя хвильова функція буде добутком експоненти і поліному другої степені від змінної $k_3 r$:

$$\varphi_3 = (1 + ak_3 r + bk_3^2) \exp(-k_3 r). \quad (23)$$

де a, b – постійні, безрозмірні величини.

Підставляючи рівність (23) в інтегральне рівняння (6) та використовуючи рівності (10), (16) та (23) з новим значенням хвильового числа, одержимо: $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$. Тоді, радіальна складова третьої хвильової функції буде такою:

$$\varphi_3 = \left(1 - 2k_3 r + \frac{2}{3} k_3^2 r^3\right) \exp(-k_3 r). \quad (24)$$

Беручи похідні третього, четвертого і т. д. порядку від виразу (12) та виконуючи запропонований алгоритм, можна знаходити радіальні складові наступних хвильових функцій атома водню у вигляді добутку експоненти на поліноми Лагера та показати, що дозволені значення для хвильового числа обернено пропорційні до номеру хвильового числа.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі запропонований рекурентний шлях отримання радіальних складових хвильової функції атома водню, який спирається на інтегральне рівняння, відповідне рівнянню Шредінгера для атома водню, без переходу до сферичної системи координат. Слід відмітити, що знайдені радіальні складові хвильових функцій не потребують перевірки на ортогональність, оскільки розв'язки однорідного, інтегрального рівняння (6) завжди ортогональні, як показано у роботі (Авдонін, 2023). Застосування інтегральних рівнянь, при викладенні теми «Квантова теорія атома водню», доповнює повноту і доказовість матеріалу, що буде сприяти підвищенню якості навчального процесу у закладах вищої освіти. В якості одного з напрямів подальших досліджень можна запропонувати пошук кутової складової хвильової функції атома водню, за допомогою інтегральних рівнянь. Окрім цього, запропонований метод пошуку розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню можна використати у побудові квантової теорії систем частинок з кулонівською взаємодією.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автор підтверджує відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Avdonin, K.V. & Kovalchuk O.V. (2019). Integral equations for the wave function of particle systems. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*, 22(3), 319-322. <https://doi.org/10.15407/spqeo22.03.319>
2. Barlette, V.E., Leite, M.M., & Adhikari, S.K. (2001). Integral equations of scattering in one dimension. *Am. J. Phys.*, 69, 1010–1013. <https://doi.org/10.1119/1.1371011>
3. Mikulski, D., Eder, K., & Konarski, J. (2014). Fredholm integral equation for the perturbation theory in quantum mechanics. *J. Math. Chem.*, 52, 2317–2321. <https://doi.org/10.1007/s10910-014-0387-0>
4. Visinelli, L., & Gondolo P. (2010). An integral equation for distorted wave amplitudes. *Arxiv preprint arXiv: 1007.2903*. <https://arxiv.labs.arxiv.org/html/1007.2903>
5. Авдонін, К. (2023). Метод знаходження хвильової функції системи частинок. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 7–10. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001>
6. Боровий, М.О., & Оліх, О.Я. (2011). Фізичні основи квантової механіки. *КНУ*.
7. Висоцький, В.І. (2008). Квантова механіка та її використання у прикладній фізиці. *ВПЦ «Київський університет»*.
8. Губарев, С.В. (2024). Квантова механіка. Конспект лекцій. *ДДТУ*.
9. Кобушкін, О.П. (2016). Квантова механіка. *НТУУ «КПІ»*.
10. Юхновський, І.Р. (2002). Основи квантової механіки. *Либідь*.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Avdonin, K.V. & Kovalchuk O.V. (2019). Integral equations for the wave function of particle systems. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*, 22(3), 319-322. <https://doi.org/10.15407/spqeo22.03.319>
2. Barlette, V.E., Leite, M.M., & Adhikari, S.K. (2001). Integral equations of scattering in one dimension. *Am. J. Phys.*, 69, 1010–1013. <https://doi.org/10.1119/1.1371011>
3. Mikulski, D., Eder, K., & Konarski, J. (2014). Fredholm integral equation for the perturbation theory in quantum mechanics. *J. Math. Chem.*, 52, 2317–2321. <https://doi.org/10.1007/s10910-014-0387-0>
4. Visinelli, L., & Gondolo P. (2010). An integral equation for distorted wave amplitudes. *Arxiv preprint arXiv: 1007.2903*. <https://arxiv.labs.arxiv.org/html/1007.2903>
5. Avdonin, K. (2023). Metod znakhodzhennia khvylovoi funktsii systemy chastynok [Method of finding the wave function of a system of particles]. *Fyzyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 7-10. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001>
6. Borovyi, M.O. & Olikh, O.Ia. (2011). *Fyzychni osnovy kvantovoi mekhaniky [Physical foundations of quantum mechanics]*. KNU.
7. Vysotskyi, V.I. (2008). *Kvantova mekhanika ta yii vykorystannia u prykladnii fizytsi [Quantum mechanics and its use in applied physics]*. VPTs «Kyivskyi universytet».
8. Hubariev, S.V. (2024). *Kvantova mekhanika. Konspekt leksii [Quantum mechanics. Lecture notes]*. DDTU.
9. Kobushkin, O.P. (2016). *Kvantova mekhanika [Quantum mechanics]*. NTUU «KPI».
10. Iukhnovskyyi, I.R. (2002). *Osnovy kvantovoi mekhaniky [Fundamentals of quantum mechanics]*. Lybid.

| Матеріал надійшов до редакції: 11.06.2025 р. | Прийнято до друку: 21.07.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



НЕРІВНОСТІ ГЕЛЬДЕРА ТА МІНКОВСЬКОГО ТА ЇХНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Юрій БОХОНОВ ✉

Київський політехнічний інститут
ім. Ігоря Сікорського, Україна
yubochonoff@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

THE INEQUALITIES OF HELDER AND MINKOVSKY AND THEIR GENERALIZATIONS

Yuriy BOKHONOV ✉

Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine
yubochonoff@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

АНОТАЦІЯ

Постановка задачі. Велика кількість математичної літератури присвячена класичним нерівностям. Нерівності Гельдера, окремим випадком яких є нерівність Коші-Буняковського, а також нерівність Мінковського, що є нерівністю многокутника в нормованому просторі, які лежать в основі геометрії унітарних та нормованих просторів – скінченних та нескінченновимірних. У статті розглядається узагальнення цих конструкцій – як у дискретній формі, тобто для скінченних сум та рядів, так і для інтегралів. Істотно, що нерівності для сум доводяться елементарними методами, без використання диференціального числення. Отримані результати можуть бути використані в науковій діяльності для обчислення деяких виразів у вигляді сум або інтегралів, а також учнями при підготовці до олімпіад і навіть для вивчення математики в шкільних гуртках.

Матеріали і методи. Для доведення узагальненої нерівності Мінковського та інтегральних нерівностей Гельдера та Мінковського використана узагальнена нерівність Гельдера для сум, яка була раніше отримана автором і, у свою чергу, була виведена з нерівності Коші.

Результати. Було доведено узагальнені нерівності Мінковського – для скінченних сум та нескінченних рядів з невід'ємними членами та інтеграл для невід'ємних функцій, а також узагальнену інтегральну нерівність Гельдера та, в окремому випадку, нерівність Коші-Буняковського.

Висновки. Застосування узагальнених нерівностей Гельдера та Мінковського для сум, рядів та інтегралів є досить ефективним методом, який дозволяє отримати цікаві наслідки, важливі оцінки – потрібно лише успішно вибрати скінченновимірні або нескінченновимірні вектори чи функції та застосувати до них доведені нерівності. На цьому шляху є великий простір для творчої діяльності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нерівність Гельдера; нерівність Мінковського; лінійний простір; норма; інтегральна нерівність.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Bokhonov Yu. The inequalities of Helder and Minkovsky and their generalizations. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 18-22. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-03>.

ABSTRACT

Formulation of the Problem. A large amount of mathematical literature is devoted to classical inequalities. Helder's inequalities, a special case of which is the Cauchy-Buniakovsky inequality, as well as Minkowski's, which is a polygon inequality in a normed space, underlie the geometry of unitary and normed spaces - finite and infinite-dimensional (Banach). The article considers the generalization of these constructions - both in discrete form, that is, for finite sums and series, and for integrals. It is essential that inequalities for sums are proved by elementary methods, without the use of differential calculus. The results obtained can be used in scientific activities for evaluating some expressions in the form of sums or integrals, as well as by students in preparation for Olympiads and even for studying mathematics in school circles.

Materials and Methods. To prove the generalized Minkowski inequality and the integral inequalities of Helder and Minkowski, the generalized Helder inequality for sums, which was previously obtained by the author which, in turn, was derived from Cauchy's inequality.

Results. The generalized Minkowski inequalities were proved for finite sums and infinite series with non-negative members and the integral for non-negative functions, as well as the generalized integral Helder inequality and, in a special case, the Cauchy-Buniakovsky inequality.

Conclusion. The application of the generalized Helder and Minkowski inequalities for sums, series, and integrals is a fairly effective method that allows you to obtain interesting consequences, important estimates – you only need to successfully select finite-dimensional or infinite-dimensional vectors or functions and apply the proved inequalities to them. On this path, there is a great deal of space for creative activity.

KEYWORDS: Helder's inequality; Minkowski's inequality; linear space; norm; integral inequality.

FOR CITATION: Bokhonov, Yu. (2025). The inequalities of Helder and Minkovsky and their generalizations. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 18-22. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-03>.

INTRODUCTION

Problem statement. Proving inequalities is one of the important topics in the school course, especially in educational institutions with an in-depth study of mathematics. Some similar problems are solved using classical inequalities, in particular, Cauchy, Cauchy-Bunyakovsky, Helder (Hölder), Minkowski, etc. It is interesting to prove which of these inequalities can be proved without using differential calculus methods, using elementary methods, limited in means, as a rule, require a creative approach, which is very valuable, especially in the education of the future mathematical elite. The beginner develops skills for creative, independent work.

Analysis of current research. Numerous mathematical literature is devoted to classical inequalities and their consequences. The author develops the concept of previous works (Bokhonov, 2022; Bokhonov & Bokhonova, 2023): some inequalities can be proved using known inequalities, usually classical or their generalizations, by selecting in a certain way successful replacements of the modified ones, after which the considered inequality becomes a partial case. On this path, the authors managed, in particular, to prove the classical inequality for medium degrees, which is a general fact and application, for example, in probability theory. They also managed to solve several Olympiad problems using the general Cauchy-Buniakovsky inequality. The application of classical inequalities in the educational process in the course of mathematical analysis and their generalization (unfortunately, without proofs) is devoted to the article (Zhuravska & Shramenko, 2010), as well as D. S. Mitrinovic & J. E. Pecaric (1993). The article (Martynenko & Chkana, 2017) is devoted to the proof of inequalities using methods of mathematical analysis. A review of results related to classical inequalities can be found in (Steele, 2004). On the other hand, for example, the Cauchy-Bunyakovsky inequality suggests a significant generalization – transfer to C^* -modules (Aldaz et al., 2015).

The purpose of the work is to generalize the classical Hölder and Minkowski inequalities to the infinite-dimensional case, reduce them to integrals, and demonstrate the obtained results on the example of specific problems.

RESEARCH METHODS

The study is based on the analysis of both school mathematics course programs and mathematical analysis for first-year undergraduate students of technical higher education institutions and mechanical and mathematical faculties of universities. The results of the cited previous works of the author are applied.

RESEARCH RESULTS

Let us proceed to the formulation and consideration of the problem.

Let be $A_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})^T, a_{jk} \geq 0, k = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ - a system of vectors of a linear space \mathbb{R}^n (“ T ” stands for transpose). You can give up on inalienability a_{kj} and work with vectors whose coordinates are the moduls of these numbers.

Next, norms of the form will be used $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

One of the tasks is to generalize the classical Minkowski inequality for $m \geq 2$ column vectors:

$$\left((a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1m})^p + \dots + (a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nm})^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (a_{11}^p + \dots + a_{n1}^p)^{\frac{1}{p}} + \dots + (a_{1m}^p + \dots + a_{nm}^p)^{\frac{1}{p}}, p > 1 \tag{1}$$

The second problem is to transfer the generalized Hölder inequality, proven by the author in (Bokhonov, 2022; Bokhonov & Bokhonova, 2023) for finite-dimensional vectors, to the infinite-dimensional case:

$$\forall p_k > 1, k = 1, \dots, m, \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1 \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n1}^{p_1})\right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_{nm}^{p_m})\right)^{\frac{1}{p_m}}. \tag{3}$$

The third problem is to prove the generalized integral inequality of Hölder. Let f_1, \dots, f_m – continuous non-negative in $[a, b]$ functions. Then, if condition (2) is satisfied and the following integrals converge,

$$\left(\int_a^b (f_1(x))^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}} < \infty, j = 1, \dots, m \tag{4}$$

the inequality (generalized Hölder) takes place:

$$\int_a^b f_1(x) \dots f_m(x) dx \leq \left(\int_a^b (f_1(x))^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\int_a^b (f_m(x))^{p_m} dx\right)^{\frac{1}{p_m}}. \tag{5}$$

On condition $p_1 = \dots = p_m \equiv p$ we obtain the generalized Cauchy-Buniakovsky inequality.

The fourth problem is to prove the generalized Minkowski integral inequality for $p > 1$:

$$\left(\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_m(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (f_1(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\int_a^b (f_m(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

The inequalities of Cauchy-Bunyakovsky, Hölder and some others are stated, for example, in the cited works. At the same time, the methods of mathematical analysis are used for the proof in most of them. The purpose of the proposed article is to prove inequalities (3) for sums by elementary methods, without the use of differential calculus, which allows them to be studied by high school students. Then they are transferred to integrals, which allows the results to be used in preparation for student olympiads.

II. Proving inequalities

1. Generalized Minkowski inequality. For $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, using Hölder's inequality, we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p &= \sum_{i=1}^n a_{i1} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^{p-1} + \dots + \sum_{i=1}^n a_{im} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1})^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n (a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1})^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n (a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Noticing, that $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, $q(p-1) = p$, dividing both parts on

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ we obtain on the left-hand side:} \\ \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p \right)^{1-\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

and as a result we obtain the generalized Minkovski inequality:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1})^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n (a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\|A_1 + A_2 + \dots + A_m\|_p \leq \|A_1\|_p + \|A_2\|_p + \dots + \|A_m\|_p.$$

2. Consider infinite-dimensional vectors $A_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}, \dots)^T \in l_{p_k}$, $k = 1, \dots, m$. That is, the series converges

$\|A_k\|_k^{p_k} = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{ik})^{p_k} < \infty, k = 1, \dots, m, a_{i,k} \geq 0$. This allows us to move to the limit in the generalized Hölder inequality, proved in

(Bokhonov & Bokhonova, 2023) for finite-dimensional vectors under condition (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n1}^{p_1}) \right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_{nm}^{p_m}) \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

and obtain inequality (3) for infinite-dimensional vectors.

Similarly, the generalized Minkowski inequality in the infinite-dimensional case is proved:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_{i1})^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Proving the generalized integral inequality of Hölder.

Divide the segment $[a, b]$ with points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ and, bearing in mind (2), we introduce the notation:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a_{i1} = f_1(x_i) \Delta x_i^{\frac{1}{p_1}}, \dots, a_{im} = f_m(x_i) \Delta x_i^{\frac{1}{p_m}}.$$

Let's use the generalized Hölder inequality:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i1} a_{i2} \dots a_{im} &= \sum_{i=1}^n f_1(x_i) \dots f_m(x_i) \Delta x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1}^{p_1}) \right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\sum_{i=1}^n (a_{im}^{p_m}) \right)^{\frac{1}{p_m}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (f_1(x_i))_{i1}^{p_1} \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\sum_{i=1}^n (f_m(x_i))_{im}^{p_m} \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p_m}}. \end{aligned}$$

Going to the limit in the proved inequality when $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, we obtain inequality (5), which we had to prove.

$$\int_a^b f_1(x) \dots f_m(x) dx \leq \left(\int_a^b (f_1(x))^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\int_a^b (f_m(x))^{p_m} dx \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

4. Proving the generalized integral inequality of Minkovsky.

Let us introduce the notation:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a_{i1} = f_1(x_i) \Delta x_i^p, \dots, a_{im} = f_m(x_i) \Delta x_i^p, p > 1.$$

Let's use the generalized Minkowski inequality for sums:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n (f_1(x_i) + \dots + f_m(x_i))^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1})^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n (a_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n (f_1(x_i))^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n (f_m(x_i))^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Passing to the limit at in the proved inequality, we obtain inequality (6), which we had to prove:

$$\left(\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_m(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (f_1(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\int_a^b (f_m(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

III. Examples

We will show how to apply the obtained results to prove some inequalities. For an easier form of notation, we will use vectors of small dimensions. Obviously, similar results hold for vectors of arbitrary dimensions. The coordinates of the vectors are assumed to be non-negative, as before.

1. $A = (a, a^2, a^3)^T, B = (b, b^2, b^3)^T, C = (c, c^2, c^3)^T, p = 3$. Let's apply the inequality (1):

$$\begin{aligned} \left((a+b+c)^3 + (a^2+b^2+c^2)^3 + (a^3+b^3+c^3)^3 \right)^{\frac{1}{3}} &\leq (a^3+a^6+a^9)^{\frac{1}{3}} + (b^3+b^6+b^9)^{\frac{1}{3}} + (c^3+c^6+c^9)^{\frac{1}{3}} = \\ &= a(1+a^3+a^6)^{\frac{1}{3}} + b(1+b^3+b^6)^{\frac{1}{3}} + c(1+c^3+c^6)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

2. $A_1 = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)^T, A_2 = \left(\frac{b}{c}, \frac{c}{b}\right)^T, A_3 = \left(\frac{c}{a}, \frac{a}{c}\right)^T, p = 3$. Let's apply the inequality (1):

$$\left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{c}{b}\right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\left(\frac{c}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{c}\right)^3 \right)^{\frac{1}{3}}.$$

3. $A = (a, a, b)^T, B = (b, b, c)^T, C = (c, c, a)^T, p = 3$. Let's apply the inequality (1):

$$\begin{aligned} \left((a+b+c)^3 + (a+b+c)^3 + (b+c+a)^3 \right)^{\frac{1}{3}} &\leq (2a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} + (2b^3+c^3)^{\frac{1}{3}} + (2c^3+a^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \\ \sqrt[3]{3}(a+b+c) &\leq (2a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} + (2b^3+c^3)^{\frac{1}{3}} + (2c^3+a^3)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

4. Evaluate the integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \sin 2x \dots \sin 2mx| dx$.

$$\text{We have: } \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \sin 2x \dots \sin 2mx| dx \right) \leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m} dx \right)^{\frac{1}{2m}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{2m} dx \right)^{\frac{1}{2m}} \dots \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2mx)^{2m} dx \right)^{\frac{1}{2m}}.$$

Let us evaluate the integral of the general form on the right-hand side: $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin kx)^{2m} dx \right)^{\frac{1}{2m}}, k = 1, \dots, 2m$.

Let's make a substitution in it: $t = kx : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} k \forall x : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dx = \frac{1}{k} dt$ and as a result we get:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin kx)^{2m} dx \right)^{\frac{1}{2m}} &= \left(\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2} k} (\sin t)^{2m} dt \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\frac{k}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2m} dt \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2m} dt \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} \right)^{\frac{1}{2m}} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma(m) m!} \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 2^{2m-1} m((m-1)!)^2} \Gamma(2m) \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\frac{\pi}{2^{2m} m((m-1)!)^2} \right)^{\frac{1}{2m}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi (2m-1)!}{m((m-1)!)^2} \right)^{\frac{1}{2m}}. \end{aligned}$$

Note that Legendre's formula for Euler's gamma function was used here: $\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a), a > 0$. Hence

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \sin 2x \dots \sin 2mx| dx \leq \frac{\pi}{2^{2m} m((m-1)!)^2}.$$

CONCLUSIONS AND PROSPECTS FOR FURTHER RESEARCH

To obtain further results, to prove new meaningful inequalities, it is necessary to make a successful selection of vectors or functions and apply to them the generalized inequalities of Hölder, Cauchy-Buniakovsky or Minkowski. One can also set the task of giving an interpretation of the obtained results from the point of view of the theory of polylinear forms. It is also interesting to prove similar inequalities for multiple integrals of a function of many variables.

CONFLICT OF INTEREST

The author declares no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Aldaz, J. M., Barza, S., Fujii, M., & Moslehian, M. S. (2015). *Advances in Operator Cauchy—Schwarz inequalities and their reverses*. *Annals of Functional Analysis*, 6(3), 275–295. <https://doi.org/10.15352/afa/06-3-20>
2. Bokhonov, Yu., & Bokhonova, T. (2023). Nerivnosti Koshi-Buniakovskoho i Helder ta yikhnie uzahalnennia [The inequalities of Cauchy-Buniakovsky and Helder and their generalizations]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 11-14. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002> (in Ukrainian).
3. Bokhonov, Yu.Ye. (2022). Uzahal'nennya nerivnostey Koshi-Bunyakovskoho ta Helder [Generalization of the Cauchy-Buniakovski and Helder inequalities]. *Science in the context of global transformation of society. Materials of the scientific and practical conference* (Poltava, August 26-27, 2022), Odesa: "Young Scientist" Publishing House. (in Ukrainian).
4. Martynenko, O. V., & Chkana, Ya. O. (2017). Vykorystannia metodiv matematychnoho analizu dlia dovedennia nerivnostei [Using methods of mathematical analysis to prove inequalities]. *Aktualni pytannia pryrodnycho-matematychnoi osvity – Current issues in natural science and mathematics education*, 1(9), 35–44. http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/1362/2/APPMO_N9_2017.pdf. (in Ukrainian).
5. Mitrinovic, D.S., & Pecaric, J.E. (1993). *Springer Science+Business Media Dordrecht*, 83-99. URL: https://books.google.ru/books?id=A0XwCAAAQBAJ&pg=PA83&hl=ru&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false
6. Steele, J.M. (2004). *The Cauchy-Schwarz Master Class*. Cambridge University Press.
7. Zhuravs'ka, H.V., & Shramenko V.M. (2010). Nerivnosti: Metodychni vkazivky do kursiv liniinoi alhebry ta matematychnoho analizu [Inequalities: Methodological guidelines for courses in linear algebra and mathematical analysis]. Kyiv Polytechnic Institute. URL: <https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/neravenstva1.pdf>. (in Ukrainian).

| Received: 31.03.2025 | Accepted: 22.06.2025 | Published: 29.09.2025 |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ЗАСТОСУВАННЯ ЦИФРОВИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВИРОБНИЧИХ ЗАДАЧ

Оксана ВИТВИЦЬКА ✉

Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу, Україна
okvitvitska@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8722-5450>

Іван ТИМКІВ

Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу, Україна
tymkiv_if@ukr.net

<https://orcid.org/0009-0007-4138-6180>

APPLICATION OF DIGITAL LEARNING TOOLS FOR SOLVING PRODUCTION TASKS

Oksana VYTVYTSKA ✉

Ivano-Frankivsk National Technical University
of Oil and Gas, Ukraine
okvitvitska@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8722-5450>

Ivan TYMKIV

Ivano-Frankivsk National Technical University
of Oil and Gas, Ukraine
tymkiv_if@ukr.net

<https://orcid.org/0009-0007-4138-6180>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У сучасних умовах цифрової трансформації освіти та виробництва особливого значення набуває формування у здобувачів освіти вміння самостійно ставити та розв'язувати задачі оптимізації, що передбачає як оперування класичними математичними методами, так і володіння сучасними цифровими інструментами. Незважаючи на наявність широкого арсеналу готових математичних методів, актуальною залишається проблема розвитку здатності здобувачів освіти самостійно формулювати задачу оптимізації: визначити цільову функцію, систему обмежень, а також інтерпретувати отримані результати у контексті реальної ситуації. Ця здатність є складовою аналітичного та критичного мислення, важливої компоненти компетентнісного підходу в освіті. Водночас, ефективне розв'язання задач оптимізації в сучасному освітньому та професійному середовищі неможливе без застосування цифрових засобів, що наближує освітній процес до реалії професійної діяльності.

Матеріали і методи. У дослідженні використано: методи теоретичного аналізу, системного підходу, математичного і комп'ютерного моделювання, цифрові методи дослідження та метод аналізу отриманих результатів.

Результати. На основі аналізу виробничої ситуації сформульовано математичні моделі, які її характеризують, отримано розв'язки поставлених задач оптимізації з використанням цифрових засобів навчання.

Висновки. Запропонований у статті підхід до розв'язання виробничої задачі з використанням цифрових освітніх інструментів дозволяє не лише продемонструвати ефективність сучасних технологій у моделюванні реальних виробничих процесів, але й сприяє формуванню ключових професійних умінь у здобувачів освіти. Застосування таких інструментів активізує аналітичне мислення, формує навички постановки та формалізації задач, розвиває цифрову грамотність і забезпечує практичну підготовку майбутніх фахівців до діяльності в умовах цифрової економіки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: задачі оптимізації; виробничі ситуація; математичне моделювання; цифрові технології дослідження; логістичні мережі.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Витвицька О., Тимків І. Застосування цифрових засобів навчання для розв'язання виробничих задач. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 23-29. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-04>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. In the context of digital transformation in education and production, the ability of students to independently formulate and solve optimization problems is gaining particular importance. This requires both the application of classical mathematical methods and the use of modern digital tools. Optimization problems arise in various areas of human activity — from economics and logistics to managerial processes — making their systematic study an integral part of training professionals in different fields. Despite the availability of a wide range of established mathematical methods, the development of students' ability to formulate an optimization problem — define the objective function, set constraints, and interpret the results in a real-world context — remains a relevant educational challenge. This ability is part of analytical and critical thinking and is a key component of the competence-based approach in education. At the same time, the effective solution of optimization problems in modern educational and professional settings is impossible without the use of digital tools such as spreadsheet processors, mathematical packages, programming environments, and web applications. These tools not only enhance motivation for learning but also significantly expand opportunities for modeling complex production or logistical processes, bringing the educational process closer to real professional activities.

Materials and methods. The research uses methods of theoretical analysis, systems approach, mathematical and computer modeling, digital research tools, and result analysis.

Results. Based on the analysis of a production situation, mathematical models were formulated to describe it, and solutions to the formulated optimization problems were obtained using digital educational tools.

Conclusion. The approach proposed in the article to solving a production task using digital educational tools not only demonstrates the effectiveness of modern technologies in modelling real production processes but also contributes to the development of key professional competencies in learners. The use of such tools stimulates analytical thinking, fosters the ability to formulate and formalize problems, enhances digital literacy, and ensures the practical preparation of future specialists for work in a digital economy environment.

KEYWORDS: optimization problems; production situation; mathematical modeling; digital research technologies; logistics networks.

FOR CITATION: Vytvitska, O., & Tymkiv, I. (2025). Application of digital learning tools for solving production tasks. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 23-29. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-04>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Одним із важливих етапів підготовки спеціалістів високої кваліфікації з відповідними компетентностями є вивчення методів оптимізації при розв'язуванні задач у різних галузях людської діяльності, адже задачі оптимізації виникають щоразу, коли необхідно знайти найкращий варіант серед багатьох можливих за певними критеріями — мінімізація витрат, максимізація прибутку, раціональне використання ресурсів тощо. Дослідження операцій, математичне програмування, теорія ймовірності — це далеко не повний перелік дисциплін, які вивчають і науково обґрунтовують методи підвищення ефективності керування організаційними системами різного призначення та різних рівнів: це можуть бути окремі виробництва, галузі господарства, структури управління, господарські комплекси тощо. Проте недостатньо лише володіти готовими методами — критично важливим є вміння самостійно поставити задачу оптимізації, тобто: ідентифікувати проблему, сформулювати цільову функцію та обмеження, а також інтерпретувати отримані результати. Це вміння є основою для розвитку аналітичного мислення, що особливо актуально в умовах нової української школи та компетентнісного підходу. Крім того, ефективне розв'язання таких задач потребує використання цифрових інструментів — табличних процесорів (наприклад, Excel), середовищ моделювання, прикладних математичних програм (GeoGebra, Wolfram Alpha, Python тощо), web-застосунків. Саме тому формування цифрових навичок при розв'язуванні оптимізаційних задач набуває особливої ваги: воно сприяє підвищенню мотивації, дозволяє проводити складні обчислення, будувати графіки та моделювати реальні ситуації.

Відповідно — дослідження, спрямоване на формування в учнів і студентів вміння ставити і розв'язувати задачі оптимізації з використанням цифрових технологій, є вкрай актуальним і відповідає вимогам сучасної освіти, спрямованої на підготовку компетентних, креативних і технологічно підготовлених фахівців.

Аналіз актуальних досліджень. У 2021 році Міністерство цифрової трансформації України, спираючись на концептуальну еталонну модель DigComp 2.1, розроблену Європейською Комісією, запропонувало Рамку цифрових компетентностей для громадян України. Базовою сферою у Рамці цифрових компетентностей для громадян України є основи комп'ютерної грамотності, що передбачає розвиток наступних цифрових компетентностей: використання мобільних та комп'ютерних пристроїв, базового програмного забезпечення, застосунків та прикладного програмного забезпечення, Інтернету та онлайн-застосунків, а також управління цифровою ідентичністю. Тому актуальними є дослідження закордонних і вітчизняних науковців, які стосуються розвитку інформаційної грамотності та формування навичок моделювання і розв'язання задач оптимізації у здобувачів освіти. У працях (Fitria, 2023; Bond, 2022) розглядається використання освітніх технологій для розвитку навичок розв'язання проблем у студентів вищих навчальних закладів. van Laar et al. (2020) досліджували фактори, що впливають на розвиток цифрових навичок, зокрема, Taranto et al., (2022) наголошують на використанні методів операційних досліджень для розвитку навичок моделювання та розв'язування задач серед студентів. Моделювання процесів, оптимізацію та контроль якості із застосуванням штучного інтелекту у виробництві висвітлено у (Fekete et al., 2024). Sue Chen (2025) висвітлює ефективність цифрових платформ управління освітніми ресурсами та стратегії їх оптимізації для підвищення якості навчання. Вітчизняні автори (Саєнко та ін., 2022), вивчаючи проблеми впровадження цифрових технологій у навчальний процес, також досліджують вплив цифрових інструментів на формування навичок розв'язування складних задач, включаючи задачі оптимізації. У праці (Копняк & Покин'єрєда, 2021) розглядається питання розвитку цифрових навичок, необхідних для аналізу та розв'язування задач оптимізації в державному управлінні. Практичну реалізацію отриманих навичок описують (Бех та ін., 2007).

Метою статті є формування вміння використовувати цифрові освітні засоби у процесі математичного моделювання і розв'язання виробничих задач на прикладі дослідження виробничої ситуації, пов'язаної з визначенням оптимальних схем постачання сировини для забезпечення виробництва продукції.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі використовувалися методи теоретичного аналізу, системного підходу, математичного моделювання і формалізації задач оптимізації, моделювання з використанням цифрових технологій та аналізу отриманих результатів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення поставленої мети розглянемо задачу про виробництво продукції з використанням певних видів ресурсів і організацію забезпечення цього виробництва сировиною. Розв'язування цієї задачі передбачає загальну постановку виробничої ситуації, складання математичної моделі, отримання розв'язків сформульованих задач та їх аналіз.

Загальна постановка виробничої ситуації: для безперервного виробництва n кінцевих продуктів треба мати відповідні склади для зберігання вихідної сировини. Сировина надходить від k постачальників із використанням існуючої транспортної мережі, для якої відомі відстані між точками окремих ділянок шляхів можливого постачання, а також питомі транспортні витрати — витрати на перевезення одиниці продукції на 1 км. Необхідно розрахувати ємності складів сировини згідно з її потребами для виконання плану випуску продукції з мінімальною собівартістю при обмеженнях на витрати електроенергії і водопостачання та заданих питомих нормах витрат сировини, електроенергії, води і значеннях собівартості виробництва одиниці продукції кожного виду та вибрати схему постачання сировини для забезпечення планового виробництва n кінцевих продуктів.

Для побудови математичної моделі введемо позначення: x_j — кількість кінцевої продукції ($j = 1, \dots, n$); b_i — кількість вихідної сировини ($i = 1, \dots, m$); A — задані обсяги електроенергії (кВт/рік); V — задані обсяги водопостачання (м^3); Q — план виробництва вихідної продукції (т); x_j — питомі норми витрат електроенергії; v_j — питомі норми витрат води; q_{ij} — питомі норми витрат сировини; c_j — собівартість продукції; c_{ij} — питомі транспортні витрати на 1 км; x_{ij} — обсяги перевезень від k -го постачальника до i -го складу; S_{ij} — відстань між i -ою та j -ою точками (ij)-го зв'язку.

Проаналізувавши дані з описаної виробничої ситуації можна виділити комплекс задач оптимізації та їх математичні моделі (табл.1):

Таблиця 1. Математичні моделі задач виробничої ситуації

Ресурсно-виробнича задача: $f, Q, A, V, b_i, x_j,$	Транспортна задача: $a_k, b_i, c_{ij}, x_{ij}.$	Задача про пошук найкоротшого шляху: $S_{ij}.$
$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$ $\sum_{j=1}^n x_j = Q,$ $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq A, \sum_{j=1}^n v_j x_j \leq V,$ $\sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$	$f_{\text{Тр}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$ $\sum_{i=1}^k x_{ij} = a_i, \quad j = 1, \dots, m,$ $\sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, m.$	$\sum_i \sum_j s_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$ $\sum_{(1n)} x_{1n} = 1,$ $\sum_{(ij)} x_{ij} = 1,$ $\sum_{(ik)} x_{ik} = \sum_{(kj)} x_{kj},$ $x_{ij} \in \{0; 1\}.$

Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).

Окремо кожна з наведених задач є класичною задачею оптимізації, і для кожної розроблені методи розв’язування. Для реальної виробничої ситуації, яка охоплює різні типи задач оптимізації, характерною є невизначеність певних параметрів і навіть можливі випадки некоректності заданих початкових умов. Зокрема, у описаній виробничій ситуації не задано кількість сировини, необхідної для виробництва продукції. Ці дані використовуються при складанні моделей ресурсно - виробничої задачі і транспортної задачі. Тому в ході розв’язання виробничої ситуації треба вміти скоригувати вхідні дані і знайти варіант розв’язку.

Реалізацію цього процесу розглянемо на прикладі.

Нехай задано: план виробництва продукції – $Q = 6000$ т, обсяги електроенергії – $A = 2000$ кВт/рік, обсяги водопостачання – $V = 25000$ м³, питомі норми витрат на 1 т продукції наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Питомі норми витрат на 1 т продукції

Ресурси	Види продукції		
	A	B	C
Електроенергія (кВт)	0,4	0,3	0,3
Вода (м ³)	3,5	5,0	2,0
Сировина I (т)	0,2	0,5	0,3
Сировина II (т)	0,5	0,3	0,5
Сировина III (т)	0,2	0,4	0,3
Собівартість (у.о./т)	22	25,4	23,5

Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007)

Вартість перевезень однієї т сировини на 1 км від двох постачальників до трьох складських приміщень задано матрицею: $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Мережа автомобільних шляхів постачання сировини наведена на рис.1.

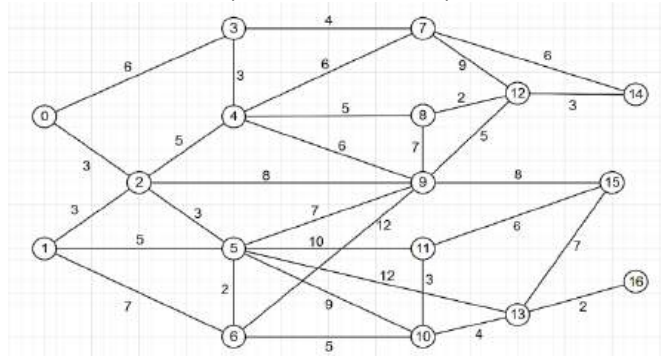


Рис. 1. Граф логістичної мережі постачання сировини

Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).

Запишемо математичну модель ресурсно - виробничої задачі: нехай x_j – обсяги кінцевої продукції, ($j = 1,2,3$). Тоді система обмежень матиме вигляд:

$$\begin{cases} 0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,3x_3 \leq 2000, \\ 3,5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 25000, \\ 0,2x_1 + 0,5x_2 + 0,3x_3 \leq b_1, \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 \leq b_2, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq b_3 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3, \end{cases}$$

b_i – обсяги сировини i -го виду, ($i = 1,2,3$).

Цільова функція визначає собівартість виготовленої продукції: $f = 22x_1 + 25,4x_2 + 23,5x_3 \rightarrow \min$.

Серед початкових даних нема запасів сировини для виготовлення продукції. Тому пропонується розв'язати задачу лінійного програмування без обмежень на сировину, а тільки з урахуванням запасів електроенергії, води та обсягів виробництва. Сформульовану вище задачу лінійного програмування можна розв'язати за допомогою симплексного методу. Ми пропонуємо реалізувати симплекс-метод у доступному для користувача середовищі *Excel* із застосуванням надбудови *Розв'язувач* (Витвицька & ін., 2024). Розв'язок наведено на рисунку 2.

	A	B	C	D	E	F
1		Питомі норми витрат на 1 т виду продукції				
2	Ресурси	A	B	C		
3	електроенергія (кВт)	0,4	0,3	0,3	2000	2000
4	Вода (м3)	3,5	5	2	15000	25000
5	Сировина I (т)	0,2	0,5	0,3	1600	
6	Сировина II (т)	0,5	0,3	0,5	3000	
7	Сировина III (т)	0,2	0,4	0,3	1600	
8	Собівартість (у.о./т)	22	25,4	23,5	138000	
9					6200	
10						
11		x1	x2	x3		
12		2000	0	4000	6000	6000

Рис. 2. Результати розв'язування ресурсно-виробничої задачі за допомогою надбудови *Розв'язувач*

Джерело: розраховано авторами.

Таким чином, продукції *A* треба виробити в обсязі 2000 т, *B* – 0 т, *C* – 4000 т. При цьому собівартість продукції f становитиме 138000 у.о. В процесі розв'язування отримано кількість сировини, необхідної для вироблення продукції – ці значення знаходяться на перетині відповідних рядків і стовпця *E*. Саме ці значення використаємо для побудови моделі і розв'язування транспортної задачі: $b_1 = 1600$ т, $b_2 = 3000$ т, $b_3 = 1600$ т.

Запаси сировини також невизначені, тому встановимо їх кількість для кожного постачальника як максимальне значення потреб у сировині, а саме – як суму $b_1 + b_2 + b_3 = 6200$ т.

Нехай x_{ij} – обсяги перевезень від i -го постачальника до j -го споживача.

Система обмежень транспортної задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 6200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 6200, \\ x_{11} + x_{21} = 1600, \\ x_{12} + x_{22} = 3000, \\ x_{13} + x_{23} = 1600, \\ x_{ki} \geq 0, \quad k = 1,2, i = 1,2,3. \end{cases}$$

Цільова функція транспортної задачі:

$$f_{\text{Тр}} = 5x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} \rightarrow \min$$

За таких умов є необхідність ввести фіктивного споживача з потребами 6200 т і нульовими вартостями перевезень.

Розв'язок цієї задачі теж знайдено в середовищі *Excel* (рис.3).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Вхідні дані					
2		Споживачі					
3	Постачальники сиров.	B1	B2	B3	B4		
4	A1	5	4	1	0		
5	A2	3	2	4	0		
6							
7		Результати					
8		B1	B2	B3	B4		Запаси
9	A1	0	0	1600	4600	6200	6200
10	A2	1600	3000	0	1600	6200	6200
11		1600	3000	1600	6200		
12	Потреби	1600	3000	1600	6200		
13							
14				Вартість перевезень		12400	

Рис. 3. Результати розв'язування транспортної задачі за допомогою надбудови *Розв'язувач*

Джерело: розраховано авторами.

Отже, від першого постачальника до 3 складу треба перевезти 1600 т, від другого постачальника до 1 складу треба перевезти 1600 т, від другого постачальника до 2 складу треба перевезти 3000 т.

ОБГОВОРЕННЯ

Задача пошуку найкоротшого шляху полягає у мінімізації суми ваг ребер, що складають маршрут між двома заданими вершинами на зваженому орієнтованому графі. Для її розв'язання застосовують підходи на основі алгоритму Дейкстри (Dijkstra, 1959) та різні його модифікації (Слюсар & Громяк, 2023). Однак алгоритм Дейкстри непридатний для графів, що містять ребра з від'ємною вагою. Для пошуку найкоротшого шляху в таких графах зазвичай використовують алгоритм Беллмана - Форда (Bellman, 1958; Ford, 1962). Алгоритм Флойда-Уоршелла знаходить найкоротші шляхи між усіма парами вершин (Floyd, 1962).

Ефективне розв'язання поставленої задачі вимагає не лише знань теоретичних основ, а й володіння сучасними цифровими інструментами, які дозволяють автоматизувати обчислення, візуалізувати процес і адаптувати рішення до конкретних умов. Розглянемо деякі з них:

1. Microsoft Excel (надбудова *Розв'язувач*) – дозволяє моделювати граф через матрицю суміжності та реалізувати пошук найкоротшого шляху як задачу лінійного програмування.
2. Веб-ресурс [Visualgo.net](https://visualgo.net) – пропонує інтерактивну візуалізацію алгоритмів, зокрема Дейкстри, Bellman-Ford та інших. Користувач має змогу створити власний граф, задати ваги, спостерігати покрокову роботу алгоритму.
3. Python (бібліотека NetworkX) – надає функціонал для створення графів, призначення ваг, а також реалізації пошукових алгоритмів.
4. GeoGebra – дозволяє моделювати графові структури і демонструвати базові ідеї пошуку шляху на площині.
5. Онлайн-сервіс Wolfram Alpha підтримує аналітичне розв'язання задач оптимізації, зокрема і пошук найкоротших шляхів.

Для вирішення поставленої задачі ми скористалися Web-ресурсом visualgo.net, оскільки даний ресурс демонструє покрокове виконання алгоритмів, що дає змогу в реальному часі бачити, як обираються вершини, обчислюються відстані та формуються оптимальні шляхи; кожен крок анімується та супроводжується коментарями, що полегшує розуміння логіки роботи алгоритмів; наявна можливість самостійного створення графа: додавання вершин, ребер, задавання ваг, що дозволяє моделювати реальні задачі; сервіс вільно доступний для користувачів.

Результати розв'язання задачі про пошук найкоротшого маршруту представлено на рисунках 4-6.

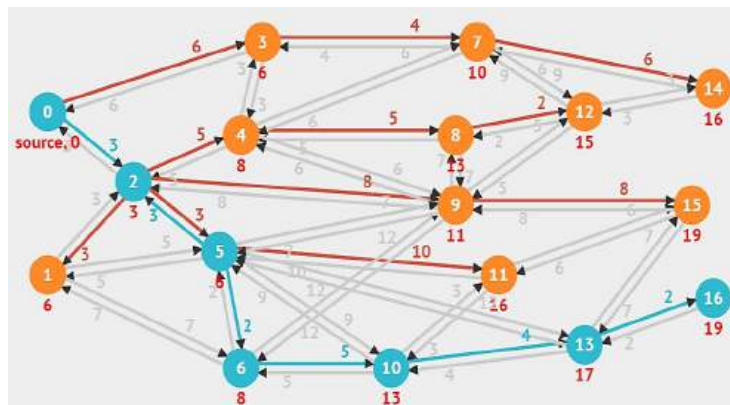


Рис. 4. Результати пошуку найкоротшого шляху від першого постачальника до третього складу

Джерело: отримано авторами.

Отже, мінімальна відстань від першого кар'єру до третього складу становить 19 км. Транспортні витрати на перевезення 1 т сировини від першого кар'єру до третього складу становлять: $1 \times 19 = 19$ у. о.

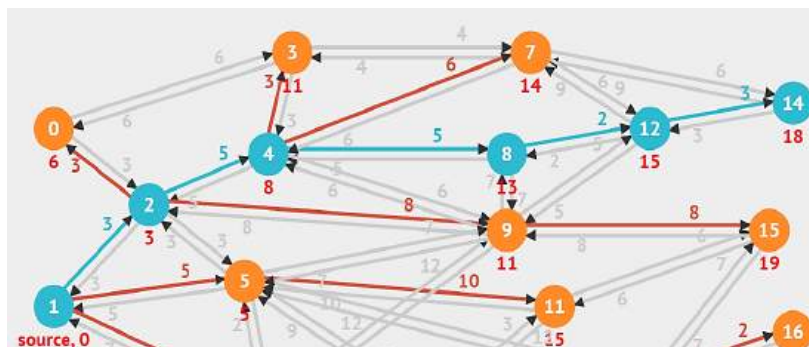


Рис. 5. Результати пошуку найкоротшого шляху від другого постачальника до першого складу

Джерело: отримано авторами.

Мінімальна відстань від другого постачальника до першого складу становить 18 км, транспортні витрати на перевезення 1 т сировини – $3 \times 18 = 54$ у. о.

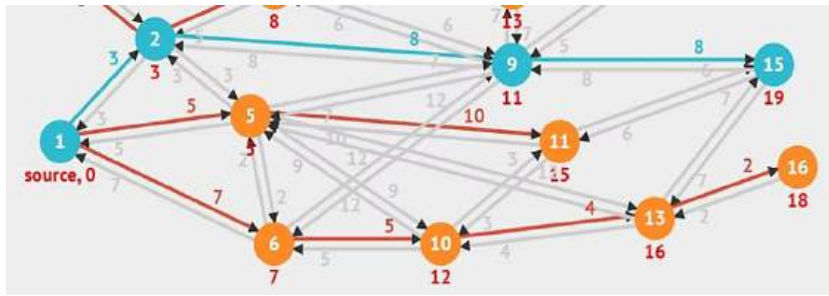


Рис. 6. Результати пошуку найкоротшого шляху від другого постачальника до другого складу

Джерело: отримано авторами.

Мінімальна відстань від другого постачальника до другого складу становить 19 км, транспортні витрати на перевезення 1 т сировини – $2 \times 19 = 38$ у. о.

Загальні транспортні витрати на перевезення знайденої кількості сировини становлять: $f_{\text{Тр}} = 19 \times 1600 + 54 \times 1600 + 38 \times 3000 = 230800$ у.о.

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом продукції та постачанням сировини для виробничого процесу становлять: $f_3 = f + f_{\text{Тр}} = 138000 + 230800 = 368800$.

Отже, склади повинні забезпечувати можливість зберігання не менше 1600 т сировини першого виду, не менше 3000 т сировини другого виду, не менше 1600 т сировини третього виду. Для виконання плану виробництва з мінімальною собівартістю треба випускати перший вид продукції в обсязі 2000 т і третій вид продукції в обсязі 4000 т, другий вид продукції за даних умов виробляти недоцільно. У процесі виробництва обсяги електроенергії витрачаються повністю, а водопостачання має достатній запас. Аналіз найкоротших маршрутів вказує на завантаженість вузла 2.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

В контексті формування у здобувачів освіти навичок застосування цифрових освітніх засобів при розв'язанні виробничих задач проаналізовано конкретну виробничу ситуацію, виокремлено комплекс взаємопов'язаних оптимізаційних задач, які її описують, і сформульовано математичні моделі цих задач. Для отримання розв'язку ресурсно-виробничої і транспортної задач використовувалося доступне для користувача середовище – надбудова *Розв'язувач* табличного процесора *Excel*; для дослідження алгоритмів оптимізації на графах – візуальний web-застосунок *Visualgo*.

Запропонований у дослідженні підхід до розв'язання виробничих задач із залученням цифрових освітніх засобів підтверджує практичну цінність сучасних технологій для моделювання реальних виробничих ситуацій. Такий підхід не лише підвищує ефективність навчального процесу, але й сприяє розвитку професійно значущих компетентностей у здобувачів освіти. Використання цифрових інструментів стимулює аналітичне мислення, сприяє формуванню навичок постановки і математичної формалізації задач, розвиває цифрову компетентність та забезпечує якісну професійну підготовку майбутніх фахівців до роботи в умовах цифрової трансформації економіки. Таким чином, поєднання математичного моделювання з цифровими освітніми технологіями створює основу для формування компетентного, технологічно підготовленого спеціаліста, здатного до ефективного прийняття рішень у складних виробничих ситуаціях.

Запропоновані підходи можна застосувати до розв'язання інших типів оптимізаційних задач, що є перспективою подальших досліджень.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bellman, R. (1958). On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1), 87-90.
2. Bond, M. (2022). Understanding the role of digital technologies in education: A review. *Education and Information Technologies*, 27, 123–145. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100013>

3. Dijkstra, E.W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1, 269–271.
4. Fekete, D., Makkai, J., Várkonyi-Kóczy, A. R., & Rudas, I. (2024). Artificial intelligence in manufacturing: State of the art, perspectives, and applications. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*. <https://doi.org/10.3311/PPee.22087>
5. Fitria, Y. (2023). The application of educational technology to develop problem-solving skills in higher education students. *Social and Humanities Education Journal*, 3 (4), 199–209. <https://doi.org/10.17977/um026v3i42023p199>
6. Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest Path. *Communications of the ACM*, 5(6), 345. <https://doi.org/10.1145/367766.368168>
7. Ford, L. R., Jr., & Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in networks*. Princeton University Press.
8. Sue Chen, A. (2025). Research on the efficiency and optimization strategy of teachers' digital management platform in education resource management. *SHS Web of Conferences*, 213, 01003. <https://doi.org/10.1051/shsconf/2025213010038>.
9. Taranto, E., Colajanni, G., Gobbi, A., Picchi, M., & Raffaele, A. (2022). Fostering students' modelling and problem-solving skills through operations research, digital technologies and collaborative learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55 (8), 1957–1998. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2115421>
10. van Laar, E., van Deursen, A. J. A. M., van Dijk, J. A. G. M., & de Haan, J. (2020). Determinants of 21st-century skills and 21st-century digital skills for workers: A systematic literature review. *SAGE Open*, 10 (1). <https://doi.org/10.1177/2158244019900176>
11. Бех, О. В., Городня, Т. А., & Щербак, А. Ф. (2007). *Збірник задач з математичного програмування: Навчальний посібник*. Львів: Магнолія 2006.
12. Витвицька, О. М., Тирлич, В. В., & Тимків, І. Р. (2024). *Лабораторний практикум з дослідження операцій. Лінійне програмування*. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ.
13. Копняк, К. В., & Покинчерета, В. В. (2021). Формування цифрової компетентності державних службовців у процесі фахової підготовки. *Державне управління: удосконалення та розвиток*, 10. <https://doi.org/10.32702/2307-2156-2021.10.31>
14. Міністерство цифрової трансформації України. (2021). Опис Рамки цифрових компетентностей для громадян України. URL: <https://bit.ly/3a7lXu9>
15. Саєнко, Н. С., Голуб, Т. П., Лавриш, Ю. Е., Лук'яненко, В. В., & Литовченко, І. М. (2022). Інтеграція цифрових технологій в освітній процес: виклики та перспективи: монографія. Київ: Центр учбової літератури. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/54226>
16. Слюсар, В. І., & Громлюк, К. А. (2023). Удосконалений метод Дейкстри для визначення найкоротших маршрутів між вузлами зв'язку у системі військового зв'язку. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*, 1(46), 5–12. <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2023-46-1-5-12>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bellman, R. (1958). On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1), 87–90.
2. Bond, M. (2022). Understanding the role of digital technologies in education: A review. *Education and Information Technologies*, 27, 123–145. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100013>
3. Dijkstra, E.W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1, 269–271.
4. Fekete, D., Makkai, J., Várkonyi-Kóczy, A. R., & Rudas, I. (2024). Artificial intelligence in manufacturing: State of the art, perspectives, and applications. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*. <https://doi.org/10.3311/PPee.22087>
5. Fitria, Y. (2023). The application of educational technology to develop problem-solving skills in higher education students. *Social and Humanities Education Journal*, 3 (4), 199–209. <https://doi.org/10.17977/um026v3i42023p199>
6. Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest Path. *Communications of the ACM*, 5(6), 345. <https://doi.org/10.1145/367766.368168>
7. Ford, L. R., Jr., & Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in networks*. Princeton University Press.
8. Sue Chen, A. (2025). Research on the efficiency and optimization strategy of teachers' digital management platform in education resource management. *SHS Web of Conferences*, 213, 01003. <https://doi.org/10.1051/shsconf/2025213010038>.
9. Taranto, E., Colajanni, G., Gobbi, A., Picchi, M., & Raffaele, A. (2022). Fostering students' modelling and problem-solving skills through operations research, digital technologies and collaborative learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55 (8), 1957–1998. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2115421>
10. van Laar, E., van Deursen, A. J. A. M., van Dijk, J. A. G. M., & de Haan, J. (2020). Determinants of 21st-century skills and 21st-century digital skills for workers: A systematic literature review. *SAGE Open*, 10 (1). <https://doi.org/10.1177/2158244019900176>
11. Bekh, O. V., Horodnia, T. A., & Shcherbak, A. F. (2007). *Zbirnyk zadach z matematychno prohramuvannia [Collection of mathematical programming problems]*. Lviv: Mahnoliia 2006 (in Ukrainian).
12. Vytvytska, O. M., Tyrlych, V. V., & Tymkiv, I. R. (2024). *Laboratornyi praktykum z doslidzhennia operatsii. Liniine prohramuvannia [Operations Research Laboratory Workshop: Linear Programming]*. Ivano-Frankivsk: IFNTUNG. (in Ukrainian).
13. Kopniak, K., & Pokynchereta, V. (2021). Formation of digital competence of civil servants in the process of professional training [Formuvannia tsyfrovoy kompetentnosti derzhavnykh sluzhbovtziv u protsesi fakhovoi pidhotovky]. *Derzhavne upravlinnya: udoskonalennya ta rozvytok – Public administration: improvement and development*, 10. <https://doi.org/10.32702/2307-2156-2021.10.31>
14. Ministerstvo tsyfrovoy transformatsii Ukrainy. (2021). Opys Ramky tsyfrovoykh kompetentnostei dlia hromadian Ukrainy Міністерство цифрової трансформації України [Ministry of Digital Transformation of Ukraine]. (2021). *Opys Ramky tsyfrovoykh kompetentnostei dlia hromadian Ukrainy – Description of the Digital Competence Framework for Citizens of Ukraine*. URL: <https://bit.ly/3a7lXu9>
15. Saenko, N. S., Holub, T. P., Lavrysh, Yu. E., Lukianenko, V. V., & Lytovchenko, I. M. (2022). *Intehratsiia tsyfrovoykh tekhnolohii v osvithii protses: vyklyky ta perspektivy [Integration of digital technologies into the educational process: challenges and prospects]*. Kyiv: Tsentri uchbovyi literatury. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/54226>
16. Sliusar, V. I., & Hromliuk, K. A. (2023). Udoskonalenyi metod Deikstry dlia vyznachennia naikorotshykh marshrutiv mizh vuzlami zviazku u systemi viiskovoho zviazku [Improved Dijkstra method for determining the shortest routes between communication nodes in a military communication system]. *Suchasni informatsiini tekhnolohii u sferi bezpeky ta obrony – Modern information technologies in the field of security and defense*, 1(46), 5–12. <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2023-46-1-5-12> (in Ukrainian).

| Матеріал надійшов до редакції: 18.03.2025 р. | Прийнято до друку: 19.05.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ПРОФЕСІЙНА ОРІЄНТАЦІЯ ДІТЕЙ З ООП ЗАСОБАМИ STEAM-ОСВІТИ

Оксана ГНАТЮК

Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини, Україна
oxanagnatyk@udpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-1207-9081>

Віра КОЛМАКОВА

Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини, Україна
kolmakova@udpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5414-0939>

Олія РЕШІТНИК ✉

Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини, Україна
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7937-2880>

Каріна БІЛИК

Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини, Україна
karina.bilyk@udpu.edu.ua

PROFESSIONAL ORIENTATION OF CHILDREN WITH SPECIAL NEEDS BY MEANS OF STEAM EDUCATION

Oksana HNATIUK

Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Ukraine
oxanagnatyk@udpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-1207-9081>

Vira KOLMAKOVA

Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Ukraine
kolmakova@udpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5414-0939>

Yuliia RESHITNYK ✉

Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Ukraine
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7937-2880>

Karina BILYK

Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Ukraine
karina.bilyk@udpu.edu.ua

АНОТАЦІЯ

Постановка проблеми. У статті розглядається питання професійної орієнтації дітей з особливими освітніми потребами (ООП) у контексті соціокультурної діяльності та реформ Нової української школи. Наголошується на необхідності використання адаптованих підходів до професійного орієнтування, які враховують індивідуальні особливості розвитку учнів. Запропоновано використання STEAM-освіти як ефективного інструменту формування професійної мотивації та усвідомленого вибору майбутньої професії дітьми з особливими освітніми потребами. Актуальність проблеми зумовлена необхідністю забезпечення рівного доступу до якісної освіти та створення безбар'єрного освітнього простору. В умовах інклюзивного навчання особливої уваги потребує ефективна професійна орієнтація учнів, що має враховувати психофізичні особливості дітей, вимоги ринку праці та сучасні освітні технології. Однак, існуючі підходи до професійного самовизначення дітей з ООП часто є застарілими та не відповідають сучасним тенденціям, зокрема можливостям STEAM-освіти. Виявлено недостатню взаємодію освітніх установ, соціальних служб і роботодавців у процесі професійної інтеграції таких учнів, що ускладнює їхню адаптацію та працевлаштування по завершенню навчання в закладах освіти.

Матеріали і методи. У дослідженні застосовано комплексний підхід, що включає аналіз науково-методичної літератури, емпіричні методи та педагогічний експеримент. Використано STEAM-комплекти (електронний, магнітний конструктори) та екологічні матеріали для проектування й програмування.

Результати дослідження підтверджують, що STEAM-освіта сприяє розвитку компенсаторних навичок у дітей з ООП, підвищує їхню мотивацію та адаптацію до освітнього процесу. Інтерактивні методи й практичні заняття допомагають

ABSTRACT

Formulation of the problem. The paper considers the issue of professional orientation of children with special educational needs (SEN) in the context of socio-cultural activities and reforms of the New Ukrainian School. The need to use adapted approaches to professional orientation that take into account the individual characteristics of students' development is emphasized. The use of STEAM education is proposed as an effective tool for forming professional motivation and conscious choice of future profession by children with special educational needs. The relevance of the problem is due to the need to ensure equal access to quality education and create a barrier-free educational space. In the context of inclusive education, effective professional orientation of students requires special attention, which should take into account the psychophysical characteristics of children, the requirements of the labor market, and modern educational technologies. However, existing approaches to professional self-determination of children with SEN are often outdated and do not correspond to modern trends, in particular, the possibilities of STEAM education. Insufficient interaction between educational institutions, social services, and employers in the process of professional integration of such students was revealed, which complicates their adaptation and employment after completing their studies in educational institutions.

Materials and methods. The study used a comprehensive approach, including an analysis of scientific and methodological literature, empirical methods, and pedagogical experiments. STEAM sets (electronic, magnetic constructors) and ecological materials for design and programming were used.

Results. Results confirm that STEAM education contributes to the development of compensatory skills in children with SEN, increases their motivation, and adaptation to the educational process. Interactive methods and practical classes help students

учням здобувати нові компетентності, ефективно взаємодіяти з однолітками та, в подальшому, покращувати свою конкурентоспроможність на ринку праці. Впровадження засобів STEAM-освіти сприяє кращій соціалізації дітей з ООП та їх подальшому успішному професійному становленню.

Висновки. STEAM-освіта, як інструмент професійної орієнтації для дітей з особливими освітніми потребами, є перспективним напрямом розвитку української освіти. Її психодидактична складова та контактне вивчення дисциплін полегшують інтеграцію дітей з ООП у суспільство.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: професійна орієнтація; діти з особливими освітніми потребами; інклюзивна освіта; STEAM-освіта; професійне самовизначення; соціальна адаптація; компетентності; ринок праці; інтерактивні технології; конструктори.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Гнатюк О., Колмакова В., Решітник Ю., Білик К. Професійна орієнтація дітей з ООП засобами STEAM-освіти. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 30-39. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-05>.

acquire new competencies, effectively interact with peers, and, in the future, improve their competitiveness in the labor market. The introduction of STEAM education contributes to the better socialization of children with SEN and their subsequent successful professional development.

Conclusion. STEAM education, as a tool for professional orientation for children with special educational needs, is a promising direction in the development of Ukrainian education. Its psychodidactic component and contact learning of disciplines facilitate the integration of children with special educational needs into society.

KEYWORDS: professional orientation; children with special educational needs; inclusive education; STEAM education; professional self-determination; social adaptation; competencies; labor market; interactive technologies; constructors.

FOR CITATION: Hnatiuk, O., Kolmakova, V., Reshitnyk, Yu., & Bilyk, K. (2025). Professional orientation of children with special needs by means of STEAM education. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 30-39. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-05>.

ВСТУП

Одним із ключових завдань сучасної освіти є створення умов для самореалізації учнів, зокрема дітей з особливими освітніми потребами (ООП), у соціокультурній діяльності, що сприятиме їхній успішній адаптації у суспільстві, формуванню соціальних навичок, професійному становленню та свідомому вибору професійного шляху в майбутньому.

В контексті реформ Нової української школи значна увага приділяється підготовці дітей до усвідомленого життєвого вибору та майбутньої професійної діяльності (НУШ, 2016; Куркуріна & Сергієнко, 2019; Професійна орієнтація у НУШ, 2020). Інклюзивна освіта, як невід'ємна складова цих реформ, вимагає застосування адаптованих підходів до профорієнтації з урахуванням особливостей розвитку кожної дитини (Методичні рекомендації, (б.д.); Докучина, 2019; Утьосова, 2023).

Одним із ефективних інструментів для досягнення цих цілей може стати STEAM-освіта. Вона не лише залучає дітей з ООП до навчання, але й сприяє формуванню професійної мотивації та свідомого вибору майбутньої професії. Основою STEAM-освіти є практичне (контактне) вивчення механізмів, наукових фактів і теорій, що забезпечує інтерактивний підхід до навчання.

Постановка проблеми. Аналіз психолого-педагогічних літературних джерел показує, що питання профорієнтації дітей з ООП отримало значну увагу дослідників, проте використання засобів STEAM-освіти в цьому контексті було предметом дослідження лише небагатьох науковців. Це обґрунтовує необхідність подальшого вивчення потенціалу STEAM-освіти як інструменту професійної орієнтації, що враховує індивідуальні особливості дітей з ООП. Особливу актуальність має дослідження впливу інтерактивних технологій, проектної діяльності та міждисциплінарного підходу на формування ключових компетентностей, розвиток когнітивних навичок і мотивації до навчання. У контексті нашого дослідження під STEAM-освітою розуміємо інтегрований підхід до навчання, що поєднує природничі науки, технології, інженерію, мистецтво та математику для формування у дітей з ООП практичних навичок та інтересу до відповідних професійних сфер. Професійну орієнтацію дітей з ООП розглядаємо як процес формування стійкого інтересу до певних видів професійної діяльності через практичне знайомство з елементами цих професій, розвиток відповідних компетентностей та усвідомлення власних можливостей у цих сферах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В Законах України про освіту та Національній стратегії створення безбар'єрного простору в Україні зазначається, що надання освітніх послуг має базуватися на принципах недискримінації та враховувати багатоманітність людини. Забезпечення рівного доступу до можливостей для всіх, незалежно від індивідуальних особливостей є важливою умовою для розкриття потенціалу кожного учня, формування толерантного суспільства та підтримки професійного і особистісного розвитку усіх учасників освітнього процесу. Реалізація цих принципів сприяє дотриманню прав кожної людини, забезпечуючи можливість отримувати освітні послуги на рівні з іншими. Це досягається через інтеграцію фізичної, інформаційної, цифрової, соціальної, громадянської, економічної та освітньої безбар'єрності у всі сфери державної політики (Національна стратегія розвитку ІН, 2024; Національна стратегія створення БП, 2021). Безбар'єрність у процесі професійного самовизначення є не лише важливою складовою інклюзивної освіти, а й показником рівня суспільного прогресу, де кожна дитина має рівні можливості для побудови успішного майбутнього.

Актуальність питань, спрямованих на розуміння та заохочення здобувачів освіти з ООП до професійної діяльності, пов'язаної з галузями STEAM, підтверджені численними дослідженнями вітчизняних та зарубіжних вчених. Аналіз міжнародних досліджень вказує на необхідність глибокого вивчення процесів залучення зацікавлених сторін, а також їхніх потреб, цілей та завдань в освітній екосистемі для формування готовності учнів до вибору професії.

Ряд досліджень (Wei et al., 2013; Dunn et al., 2018; Leavy et al., 2023; Ortiz-Revilla et al., 2023; Rodrigues-Silva & Alsina, 2023) підтверджують, що діти, зокрема із ООП, здатні планувати, ініціювати та реалізовувати складні проекти, а сучасні технології (Fowler et al., 2022; Lytra & Drigas, 2021; Drigas & Karyotaki, 2016; Drigas et al., 2022; Vouglanis, 2024) відкривають перед ними нові можливості, сприяючи покращенню освітніх практик та результатів.

В роботі (Dunn et al., 2018) проаналізовано участь студентів з особливими освітніми потребами у програмі AASD-STEM (Alabama Alliance for Students with Disabilities in Science, Technology, Engineering, and Mathematics) та підкреслено позитивні зміни в їхній поведінці, наполегливість та успіхи у навчанні, що, у свою чергу, сприятиме їх подальшому працевлаштуванню.

Дослідження, проведене засновниками американської STEM Academy для дітей з ООП, показало, що 35% молодих людей з розладами аутистичного спектру обирають STEM-кар'єру. Також 5-12% підопічних з іншими особливостями розумового розвитку цікавляться точними науками та готові зробити їх своєю професією (Wei et al., 2013). Діяльність STEM Academy була спрямована не лише на навчання, але й на працевлаштування випускників з ООП.

Професійне самовизначення, окремі аспекти профорієнтації та працевлаштування осіб з особливими освітніми потребами було предметом досліджень низки вітчизняних науковців (Вітковська, 2002; Докучина, 2019; Косенчук, 2022; Сороко, 2019; Трифонова, 2015; Утьосова, 2023; Шиделко, 2017) та інші. Так, зокрема, в дослідженні (Докучина, 2019) автор підкреслює, що є низка спільних та відмінних ознак профорієнтаційної роботи у спеціальних закладах освіти та закладах загальної середньої освіти під час організації інклюзивного навчання.

Проведення профорієнтаційних заходів для дітей з ООП мають відбуватись з урахуванням вікових та психофізичних особливостей учнів, стану здоров'я та обмежень, пов'язаних з порушенням функціональних систем організму, а також потреб ринку праці. Професійна діагностика таких учнів проводиться із застосуванням адаптованих методик і психолого-педагогічної оцінки (Методичні рекомендації (б.д.); Утьосова, 2023; Косенчук, 2022).

Особливу роль у профорієнтаційній роботі відіграє професійне консультування, яке допомагає учням усвідомити свої можливості й інтереси, а також стимулює до правильного вибору майбутньої професії. Саме професійне консультування має стати пріоритетним завданням, оскільки на основі результатів професійної діагностики сприяє усвідомленому вибору майбутньої професії з урахуванням власних можливостей та бажань. Важливо розвивати в учнів уміння оцінювати свої можливості й співвідносити їх із вимогами професії, усвідомлюючи різницю між «хочу» та «можу». При цьому не слід нав'язувати їм обмеження через фізичні або психічні особливості, а варто підкреслювати переваги доступних професій, розвиваючи адекватну самооцінку та професійні інтереси. Вибір професії учнями з ООП повинен здійснюватися за їх власною ініціативою, проте важливо, щоб у цьому процесі брали участь батьки, адже їхній вплив на вибір майбутньої професії відіграє важливу роль. Крім того необхідним є залучення соціальних служб, роботодавців, закладів професійно-технічної та вищої освіти для здійснення профорієнтаційної роботи. Така взаємодія сприятиме професійній адаптації учнів до майбутньої професії та допоможе вдосконалити профорієнтаційні заходи.

Організація навчання з дисциплін природничо-математичного циклу в умовах інклюзивного освітнього середовища має особливе значення (Національна стратегія розвитку, 2024; Сороко, 2019).

Проте, дослідження показують, що загалом у світі спостерігається високе безробіття серед людей з особливими потребами. Причинами цього є різні фактори: небажання працювати, фізична або психічна непридатність до виконання певних видів роботи, труднощі у роботі в команді, потреба у підтримці на робочому місці тощо.

Метою статті є дослідження впливу STEAM-освіти на професійну орієнтацію дітей з особливими освітніми потребами, а також аналіз ефективних підходів до формування професійних орієнтирів через практичне знайомство з різними видами професійної діяльності.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Експериментальне дослідження проводилось протягом 2023-2024 навчального року на базі інклюзивного освітнього хабу «Черкащани» із 10 дітьми з особливими освітніми потребами.

Для досягнення мети дослідження були використані такі теоретичні методи як порівняльний аналіз дослідницьких праць вітчизняних і зарубіжних науковців, узагальнення та систематизація науково-теоретичних і практичних даних, власного практичного досвіду.

Для діагностики ефективності запропонованого підходу використано:

- анкетування батьків на початку та наприкінці експерименту;
- спостереження за навчальною діяльністю дітей за визначеними критеріями;
- аналіз виконаних проєктів дітьми з особливими освітніми потребами;
- опитування дітей щодо їхніх професійних уподобань до початку та після завершення циклу занять.

Для оцінки сформованості інтересу до STEAM-професій було розроблено діагностичну карту спостережень із показниками: стійкість інтересу до діяльності, самостійність у виконанні завдань, ініціативність у пошуку розв'язків, здатність до командної роботи, орієнтація дітей з ООП до професійних уподобань.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження підтверджують, що втрата певних навичок у людей з особливими освітніми потребами (ООП) компенсується розвитком інших умінь, що допомагає їм досягати значних успіхів у навчанні за допомогою STEM-технологій. Це, у свою чергу, підвищує їхню конкурентоспроможність на ринку праці (Чому STEM-освіта, 2020).

На відміну від традиційного STEM-підходу, STEAM-освіта включає елемент мистецтва (Arts), що має особливе значення для дітей з ООП. Саме ця інтеграція мистецтва з технічними дисциплінами робить STEAM-підхід ефективнішим для формування професійних інтересів дітей з ООП, оскільки розширює їхнє уявлення про можливі професії на перетині технологій і творчості.

Завдяки використанню засобів STEAM-освіти, учні з ООП отримують певну свободу дій (помилки не як поразки, а як здобуття нових знань, власний вибір способу проведення досліджень, власне моделювання почерговості виконання завдань тощо). Важливим етапом формування мотивації є свідомий самостійний вибір.

Ще однією перевагою STEAM-освіти є розвиток навичок взаємодії з однолітками через групові завдання (4-6 осіб). На прикладі кооперативного навчання, учні готуються до групової роботи через виконання коротких завдань в парах, потім в малих групах, ротаційних трійках, і в кінці загальної взаємодії з учнями усього класу.

Страх перед помилками, тиском з боку вчителя або однолітків, публічними виступами – це виклики з якими стикаються учні і без ООП. STEAM-освіта допомагає створити атмосферу співпраці та взаємної підтримки, що підвищує успішність усіх категорій учнів (Чому STEAM-освіта, 2020).

5 серпня 2020 року була схвалена Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEAM-освіти), метою якої є сприяння економічному зростанню та конкурентоспроможності України. Концепція спрямована на модернізацію освіти, залучення роботодавців і науковців, формування компетентностей для вирішення суспільних проблем шляхом інтеграції природничих наук, технологій, інженерії та математики (Концепція, 2020).

Реалізація Концепції сприяє:

- використанню сучасного обладнання й інноваційних технологій в освіті;
- розробці новітніх освітніх програм з урахуванням потреб дітей з ООП;
- формуванню навичок самоосвіти та міждисциплінарних зв'язків.

Залучення дітей з ООП до колективної взаємодії потребує додаткової уваги. Однак це має відбуватися без зайвого тиску і обов'язкових завдань. Для формування професійного інтересу до інженерії дитині слід дати можливість відчувати це через власний досвід. Найкращі способи для цього - заохочення, демонстрація прикладу та тактовна пропозиція взяти участь. Для початкового залучення важливо створити «ситуацію успіху».

Коли дитина з ООП відчуває успіх, це збільшує її мотивацію та самоусвідомлення. Важливо допомогти таким дітям зрозуміти, що вони здатні виконувати це завдання, і таким чином формувати пізнавальний інтерес. Надалі потрібно поступово ускладнювати діяльність і навчити дітей сприймати та виправляти помилки, допущені під час виконання завдань.

Для швидкого впровадження засобів STEAM-освіти і залучення дітей з ООП до колективної діяльності використовується метод «хвильових занурень». Цей метод полягає у тому, що протягом обмеженого часу учні вивчають конкретну тему в розрізі різних предметів. Він нещодавно почав застосовуватися в педагогічній практиці і використовується для міждисциплінарної інтеграції в STEAM-освіті, особливо в початковій школі, через довготривалі проекти. Метод допомагає зняти напругу у дітей і зменшити зовнішній тиск, базуючись на засадах психодидактики. Особливістю роботи з дітьми з ООП в умовах інклюзивного освітнього середовища є розуміння їхніх страхів та переживань. Дитина може пропустити перше або друге «занурення», але з часом, зацікавившись, приєднатися до виконання завдань. Метод передбачає організацію різнопланової практичної діяльності в межах кількох навчальних дисциплін. Організація «хвильових занурень» в умовах організації інклюзивного освітнього середовища вимагає злагодженої співпраці вчителів природничо-математичного циклу. Найкращим варіантом є проведення STEAM-орієнтованих занурень під час предметних тижнів або в рамках позашкільних заходів. Зокрема, Нова українська школа рекомендує організацію інженерних тижнів та міждисциплінарних гуртків у позашкільних закладах, що дозволяє кожному охочому спробувати свої сили в різних напрямках.

Одним із прикладів такої ініціативи є гурток «STEAM – ДЛЯ ВСІХ», що діє на базі інклюзивного освітнього хабу «Черкащани». Його відвідують 10 дітей з особливими освітніми потребами віком від 7 до 14 років.

У рамках діяльності гуртка ми здійснювали професійну орієнтацію учнів з ООП, використовуючи доступні технології та засоби, які можна придбати в кожному іграшковому магазині. Зокрема, нами було розроблено методики із використанням конструктора ZNATOK та магнітних конструкторів (рис. 1, 2). Це дозволило нам спонукати учнів з ООП до оригінальних і незвичних способів отримувати нову інформацію. Використання даних конструкторів допомагає краще розвивати у дітей з ООП дрібну моторику, увагу, логіку, пам'ять та математичні здібності. Складаючи схеми з конструктором ZNATOK, учні в ігровій формі отримують перші базові знання з електроніки, навчаються читати електронні схеми та збирати найпростіші пристрої. У комплект конструктора ZNATOK входить посібник, який містить теоретичні пояснення, питання і завдання. Особливо цінним є те, що у посібнику представлена нумерація деталей з їхнім зображенням поруч (рис. 3). Це дозволяє учням самостійно працювати з конструктором. Така побудова посібника дозволяє краще працювати та розвивати самостійні навички роботи дітям з ООП.



Рис. 1. Електронний конструктор ZNATOK
Джерело: отримано авторами.



Рис. 2. Магнітний конструктор
Джерело: отримано авторами.

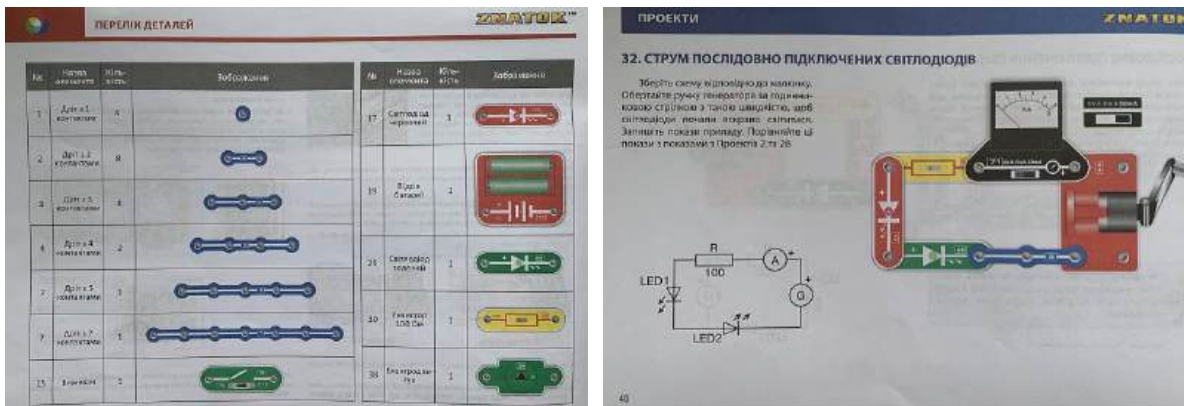


Рис. 3. 3 посібника до електронного конструктора ZNATOK

Джерело: отримано авторами.

У схемах використовується ручне, магнітне, світлове, водне, звукове, електричне, а також сенсорне керування. Зібравши електричну схему, учні можуть отримати акустичний, оптичний або електричний вихідний сигнал. Варто зазначити, що навіть схеми зі схожими назвами побудовані на основі різних електричних кіл що дає змогу продемонструвати широкую різноманітність електронних технологій. У керівництві до кожної електричної схеми наводять лише один спосіб її складання. Водночас завдяки власній винахідливості й творчому підходу учні можуть змінювати схеми, збирати їх іншими способами або вигадувати власні цікаві варіанти. Випробувавши схему на цьому конструкторі, можна зібрати таку ж зі своїх деталей і застосувати її в житті.

Запропонований спосіб з'єднання деталей є оригінальним та забезпечує швидкий і ефективний результат без використання пайки, а також легкий у використанні дітям з ДЦП та сенсорними порушеннями. Очевидно, що використання конструктора ZNATOK учнями з ООП можливе також і з використанням програмування Arduino (рис. 4). Адже, виконання досліджень з програмування із використанням засобів STEAM-освіти допомагає формувати в учнів алгоритмічне мислення.



Рис. 4. Конструктор ZNATOK (серія Arduino START)

Джерело: отримано авторами.

Під час використання конструктора ZNATOK з програмуванням Arduino (модуль з популярного сімейства мікроконтролерів AVR, програмувати на мові C++) також дозволяє розвивати творче мислення. Адже, смартфони, літаки, автомобілі, телевізори, пральні машини, холодильники і навіть сучасні праски мають в своєму складі мікроконтролери, які керують цією самою технікою і здійснюють зв'язок або з людиною, або з іншими приладами. Не кажучи вже про робототехніку, яка неможлива без мікроконтролерів.

Отримані знання при роботі із конструктором ZNATOK допоможуть в подальшому учням з ООП у навчанні, а в перспективі можуть допомогти і створювати нові зразки роботів, побутової техніки, комп'ютерів, смартфонів, працюючи у високотехнологічних компаніях.

Для групових занять із використанням засобів STEAM-освіти здійснювався підбір дітей у групи, які можуть ефективно взаємодіяти, оскільки серед них були учні з мовленнєвими порушеннями. Для вирішення цього завдання керівник гуртка разом із логопедом та дефектологом розробили стратегію комунікації між дітьми під час занять. Такі заняття зазвичай потребували присутності кількох фахівців: вчителя фізики або природничих наук, логопеда та дефектолога. Це вимагало інтеграції знань з різних галузей, оскільки необхідні як спеціальні знання з предмету, так і розуміння особливостей роботи з дітьми з ООП. Організація занять у такому форматі була доцільною, оскільки вона допомагала запобігти перевантаженню учнів з ООП матеріалом, а інші учасники групи могли надавати їм необхідну підтримку. Оскільки проектна діяльність є одним із головних підходів у STEAM-освіті, важливо розглядати її через призму інклюзивної освіти.

Керівник гуртка виконував роль фасилітатора, який координував діяльність та спонукав учасників до застосування певних методів і підходів у дослідженні. При цьому дорослі не були прямими керівниками процесу, а

виконували роль наставників. Після виконання завдань не оцінювалася діяльність окремих учнів, оскільки головним результатом був створений проєкт.

Пропонуємо кілька рекомендацій, які сприятимуть ефективній організації занять за участю дітей з ООП та їхніх батьків:

- максимально уникати обмежень у діяльності дітей. Однак перед початком заняття обов'язково провести бесіду про правила безпеки та обговорити шляхи виконання завдання чи проєкту;
- сприяти активній комунікації між учасниками, допомагаючи їм разом знаходити реалістичні способи виконання завдань. Заохочувати колективне обговорення, наголошуючи на важливості внеску кожного;
- під час заняття дорослі мають бути поруч, підтримувати дітей, водночас залишаючи їм простір для самостійної діяльності. Важливо демонструвати довіру до їхніх рішень, не знецінювати їхні думки та здібності та не нав'язувати власного бачення.

Під час занять із використанням засобів STEAM-освіти важливо акцентувати увагу на сильних сторонах кожної дитини та створювати умови для досягнення так званого «стану потоку». Цей термін, розроблений американський психологом Міхаєм Чиксентмігаї, описує стан повної зосередженості на завданні, що супроводжується відчуттям спокою, задоволення та легкості. Робота в колективі під час таких занять сприяє розвитку інтересу, комунікативних та інших м'яких навичок. Паралельно виконання індивідуальних проєктів із використанням технічних та інженерних інструментів, із особливим акцентом на безпеку, допомагає учням розвивати впевненість у собі, віру в свої сили, а також здобувати навички самостійної роботи. Крім того, STEAM-освіта створює сприятливу атмосферу в інклюзивному освітньому середовищі, де учні навчаються планувати й організувати власну діяльність, аналізувати та синтезувати інформацію, перевіряти свої результати і, найголовніше, розвивати навички самоосвіти.

Одним із ефективних напрямів професійної орієнтації в межах STEAM-підходу було виконання навчальних проєктів, зокрема зі створення просторових фігур із магнітних конструкторів. Будуючи різні об'єкти (будинки, гаражі для іграшкових автомобілів чи моделі самих автомобілів) із елементів конструктора, дитина може відчувати себе архітектором або будівельником. Об'єднуючи між собою різні деталі діти створюють об'ємні 3D конструкції, розвиваючи просторове мислення, творчу уяву та технічні навички. Завдяки вбудованому магніту елементи не потрібно скріплювати між собою, а достатньо лише піднести їх один до одного, щоб вони з'єдналися. Такий вид з'єднання деталей особливо актуальний для дітей з дитячим церебральним паралічем.

Під час навчання учні створювали різні геометричні фігури та визначали їх об'єм. (рис. 5). Гра з магнітним конструктором розвиває у дітей з ООП логічне та абстрактне мислення, а також посидючість. У процесі гри задіяне зорове сприйняття, дрібна моторика, уява, що позитивно впливає на їх загальний розвиток.



Рис. 5. Приклади геометричних фігур на основі магнітного конструктора

Джерело: отримано авторами.

Важливо також розвивати у дітей з ООП особистісні якості, емоційний інтелект і вміння керувати своїми почуттями. Виконання досліджень людської та природної діяльності не тільки формує світогляд, а й сприяє розумінню себе та інших. STEAM-освіта орієнтована на постійне створення нового. Так, у навчальних просторах використовуються контейнери, заповнені природними матеріалами, такими як насіння, шишки, жолуді, каштани, а також побутові речі, як-от гудзики, пластилін, прищіпки та палички для морозива. З цих матеріалів можна створювати різноманітні композиції, портрети або навіть моделі техніки та архітектури. Використання екологічних матеріалів допомагає формувати у дітей повагу до навколишнього середовища (рис. 6).

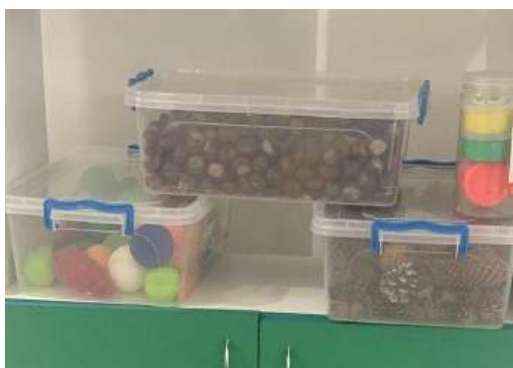


Рис. 6. Використання природних матеріалів

Джерело: отримано авторами.

На заняттях гуртка також пропонувалося створити модель Сонячної системи з використанням різних тактильних матеріалів (рис. 7). Це завдання спрямоване на розвиток професійної орієнтації в галузях космонавтики та авіації, а також може стимулювати інтерес дітей з ОПП, навіть, до літературної творчості, наприклад, написання фантастичних творів.

Під час гри учні готують відповіді на такі питання:

- Що таке астероїди, комети, метеори, метеорити? Як вони рухаються?
- Які тіла рухаються в космічному просторі, а які залишаються нерухомими? Чи можуть ці тіла бути нерухомими відносно Сонця?
- Яка траєкторія руху планет?
- Як переміщується космонавт?
- Напишіть або намалюйте фантастичну історію, пов'язану з космосом.



Рис. 7. Створення моделі Сонячної системи

Джерело: отримано авторами.

Експеримент показав, що для дітей з ООП особливо важливо приділяти увагу розвитку навичок самостійної роботи, оскільки вони часто не можуть довго концентруватися на завданні. Розроблені методичні рекомендації виявилися ефективними, особливо в тому, що такі завдання викликали зацікавленість у дітей, навіть при складності їх виконання. Після кожного заняття здійснювався аналіз, який допомагав оцінити ефективність підходів, прийомів і методів, що використовувались під час занять.

Під час самостійної роботи учнів велика увага приділялася правильному вибору матеріалів, алгоритму виконання завдань та умінню працювати в групах. Діти з ООП вчилися оцінювати свої здібності, допомагати одне одному та правильно аналізувати інформацію. Це сприяло не тільки розвитку практичних навичок, але й підвищенню рівня самооцінки та впевненості у своїх силах.

На завершальному етапі виконання проєктів діти самостійно виконували завдання, аналізуючи результати своєї роботи. Це дозволяло їм формувати навички самостійного оцінювання та аналізу виконаних завдань, розуміючи важливість якісної підготовки та значущості власної роботи.

Виконання проєктів засобами STEAM-освіти дозволило дітям з інклюзивної групи вчитися планувати, аналізувати та оцінювати власну роботу, а також працювати в команді. Домашні завдання були спрямовані на подальший розвиток політехнічних навичок.

Отже, проведений педагогічний експеримент дозволив виявити такі результати впливу STEAM-освіти на формування професійних орієнтирів дітей з ООП:

1. Динаміка інтересу до STEAM-професій: на початку експерименту лише 2 з 10 дітей виявляли стійкий інтерес до природничо-математичних дисциплін, наприкінці - 7 з 10.

2. Зміни у професійних уподобаннях: 6 з 10 дітей після циклу занять почали згадувати професії STEAM-галузі (інженер, програміст, конструктор) серед бажаних для себе в майбутньому.

3. Розвиток компетентностей, необхідних для STEAM-професій:

– підвищення рівня самостійності у вирішенні практичних завдань (з низького до середнього у 7 дітей);

– покращення навичок командної роботи (6 дітей почали активно взаємодіяти в групі);

– розвиток критичного мислення (здатність аналізувати помилки та знаходити альтернативні шляхи вирішення).

Важливо підкреслити, що формування професійної орієнтації дітей з ООП у нашому дослідженні відбувалося не як пряме інформування про професії, а через створення умов для практичного знайомства з елементами різних видів професійної діяльності. Під час занять у гуртку «STEAM – ДЛЯ ВСІХ» діти мали можливість спробувати себе в ролі:

– інженера (при роботі з конструктором ZNATOK);

– архітектора та будівельника (при створенні просторових конструкцій);

– програміста (при роботі з Arduino);

- дизайнера (при роботі з природними матеріалами);
- астронома та космічного інженера (під час створення моделі Сонячної системи).

Такий підхід дозволяє дітям з ООП на власному досвіді відчути привабливість певних видів діяльності та усвідомити свої можливості в цих сферах, що є основою для подальшого професійного самовизначення.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У рамках реформи Нової української школи питання професійної орієнтації дітей з ООП набуває особливої актуальності. Впровадження STEAM-освіти під час професійної орієнтації дітей з ООП довело свою ефективність, сприяючи розвитку ключових компетентностей, практичних навичок та підвищенню мотивації до навчання. Педагогічний експеримент продемонстрував позитивні зміни: збільшення інтересу до STEAM-професій, покращення самостійності, навичок командної роботи та критичного мислення. Дослідження показало, що професійна орієнтація дітей з ООП повинна базуватися на практичному знайомстві з різними професіями, що дозволяє їм усвідомити свої можливості. Перспективи подальших досліджень включають удосконалення співпраці між освітніми установами, роботодавцями та соціальними службами для полегшення доступу до профорієнтаційної інформації.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вітковська, О. І. (2002). *Психологічні умови професійного самовизначення випускників середніх шкіл у процесі профконсультації*. Дис. канд. психол. наук, Інститут педагогіки і психології професійної освіти АПН України.
2. Докучина, Т. О. (2019). Профорієнтаційна робота з дітьми з особливими освітніми потребами в умовах інклюзивного навчання. *Актуальні питання корекційної освіти (педагогічні науки)*, 14, 92-100. <https://doi.org/10.32626/2413-2578.2019-14.92-100>
3. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти). № 960-р (2020, 5 серпня). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text>
4. Косенчук, Ю. (2022). *Методичні рекомендації щодо підвищення кваліфікації педагогічних працівників, які здійснюють профорієнтаційну роботу у закладах загальної середньої освіти, в тому числі з учнями з ООП*. Український інститут розвитку освіти. URL: https://uied.org.ua/wp-content/uploads/2022/11/копыва_mr_proforyentacziyna_robota_5_5.pdf
5. Куркуріна, Л., & Сергієнко, А. (2019). Створення інноваційного освітнього середовища в умовах НУШ через впровадження проектних технологій. *Директор школи*, (11), 77-85.
6. МОН. (2016). *Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої освіти*. МОН. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
7. Національна стратегія розвитку інклюзивного навчання на період до 2029 року. № 527-р. (2024, 7 червня). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/527-2024-%D1%80#n10>
8. Національна стратегія створення безбар'єрного простору в Україні на період до 2030 року. № 366-р (2021, 14 квітня). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/366-2021-%D1%80#Text>
9. Нова українська школа. (2020, 11 грудня). *Чому STEM-освіта має бути інклюзивною: поради для залучення дітей з ООП*. NUS. URL: <https://nus.org.ua/2020/12/11/chomu-stem-osvita-maye-butyi-inklyuzyvnoyu-porady-dlya-zaluchennya-ditej-z-ooop/>
10. Сороко, Н. В. (2019). Проектування STEAM-орієнтованого цифрового середовища школи (зарубіжний досвід). *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, 2(177), 100-104. URL: <https://pednauk.cusu.edu.ua/index.php/pednauk/article/view/280>
11. Трифонова, О.М. (2015). Навчання технологій та фізики в школі як основа профорієнтаційної діяльності. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*, 7(1), 148-152. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/237>
12. Український інститут розвитку освіти. (б.д.). *Методичні рекомендації для закладів загальної середньої освіти щодо професійної орієнтації учнів з особливими освітніми потребами*. URL: <https://uied.org.ua/wp-content/uploads/2021/10/metodrekom-profori%D1%94nt-ooop.pdf>
13. Український інститут розвитку освіти. (2020). *Професійна орієнтація у новій українській школі*. URL: https://uied.org.ua/wp-content/uploads/2020/12/konczepcziva-profori%D1%94ntaczii%CC%88-dlya-gromadskogo-obgovorennya-16_12_20-.pdf
14. Утьосова, О. І. (2023). Технологія підготовки та супроводу працевлаштування випускників із РАС. *Інноваційна педагогіка*, 63(2), 233-237. <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2023/63.2.47>
15. Шиделко, А. В. (2017). *Профорієнтація і профвідбір: аксіологічні аспекти*. ЛьвівДУВС. URL: <http://surl.li/aqxqbr>
16. Drigas, A., & Karyotaki, M. (2016). Online and Other ICT-based Training Tools for Problem-solving Skills. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 11(6), 35-39. <https://doi.org/10.3991/ijet.v11i06.5340>
17. Drigas, A., Mitsea, E., Skianis, C. (2022). Virtual Reality and Metacognition Training Techniques for Learning Disabilities. *Sustainability*, 14(16), 10170. <https://doi.org/10.3390/su141610170>

18. Dunn, C., Shannon, D., McCullough, B., Jenda, O., & Qazi, M. (2018). An Innovative Postsecondary Education Program for Students with Disabilities in STEM (Practice Brief). *Journal of Postsecondary Education and Disability*, 31(1), 91-101. URL: <https://eric.ed.gov/?id=EJ1182338>
19. Fowler, S., Cutting, C., Kennedy, J.P., Leonard, S.N., Gabriel, F., & Jaeschke, W. (2022). Technology enhanced learning environments and the potential for enhancing spatial reasoning: a mixed methods study. *Mathematics Education Research Journal*, 34(4), 887-910. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00368-9>
20. Leavy, A., Dick, L., Meletiou-Mavrotheris, M., Papanastasiou, E., & Stylianou, E. (2023). The prevalence and use of emerging technologies in STEAM education: A systematic review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning*, 39(4), 1061-1082. <https://doi.org/10.1111/jcal.12806>
21. Lytra, N., & Drigas, A. (2021). STEAM education- metacognition – Specific Learning Disabilities. *Scientific Electronic Archives*, 14(10). <https://doi.org/10.36560/141020211442>
22. Ortiz-Revilla, J., Ruiz-Martín, Á., & Greca, I.M. (2023). Conceptions and Attitudes of Pre-School and Primary School Teachers towards STEAM Education in Spain. *Education Sciences*, 13(4), 377. <https://doi.org/10.3390/educsci13040377>
23. Rodrigues-Silva, J., & Alsina, Á. (2023). STEM/STEAM in Early Childhood Education for Sustainability (ECEFS): A Systematic Review. *Sustainability (Switzerland)*, 15(4), 3721. <https://doi.org/10.3390/su15043721>
24. Vouglanis, T. (2024). The use of assistive technology by visually impaired students. *World Journal of Biology Pharmacy and Health Sciences*, 20(2), 365-372. <https://doi.org/10.30574/wjbphs.2024.20.2.0877>
25. Wei, X., Yu, J. W., Shattuck, P., McCracken, M., & Blackorby, J. (2013). Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) participation among college students with an autism spectrum disorder. *Journal of autism and developmental disorders*, 43(7), 1539-1546. <https://doi.org/10.1007/s10803-012-1700-z>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Vitkovska, O. I. (2002). Psyholohichni umovy profesiinoho samovyznachennia vypusknivkiv serednikh shkil u protsesi profkonsultatsii. [Psychological conditions of professional self-determination of secondary school graduates in the process of vocational counseling]. [Dys. kand. psykol. nauk, Instytut pedahohiky i psykolohii profesiinoy osvity APN Ukrainy]. (in Ukrainian)
2. Dokuchyna, T. O. (2019). Proforiientatsiina robota z ditmy z osoblyvymy osvitnimy potrebamy v umovakh inkluzyvnogo navchannia. [Vocational guidance work with children with special educational needs in conditions of inclusive education]. *Current issues of correctional education (pedagogical sciences)*, (14), 92-100. <https://doi.org/10.32626/2413-2578.2019-14.92-100> (in Ukrainian)
3. Kontseptsiiia rozvytku pryrodnycho-matematychnoy osvity (STEM-osvity). [Concept of development of science and mathematics education (STEM education)]. № 960-p (2020, 5 serpnia). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text> (in Ukrainian)
4. Kosenchuk, Yu. (2022). *Metodychni rekomendatsii shchodo pidvyshchennia kvalifikatsii pedahohichnykh pratsivnykiv, yaki zdiisniuiut proforiientatsiinu robotu u zakladakh zahalnoi serednoi osvity, v tomu chysli z uchniamy z OOP. [Methodological recommendations for improving the qualifications of pedagogical workers who carry out career guidance work in general secondary education institutions, including with students with disabilities].* Ukrainian Institute of Education Development (UIED). https://uied.org.ua/wp-content/uploads/2022/11/kopyya_mr_proforyentacziina_robota_5_5.pdf (in Ukrainian)
5. Kurkurina, L., & Serhienko, A. (2019). Stvorennia innovatsiinoho osvitnoho seredovyscha v umovakh NUSh cherez uprovadzhenia proiektnykh tekhnolohii. [The creation of an innovative educational environment in the conditions of NUS through the implementation of project technologies]. *Dyrektor shkoly*, (11), 77-85. (in Ukrainian)
6. MON. (2016). *Nova ukrainska shkola. Kontseptualni zasady reformuvannia serednoi osvity. [New Ukrainian school. Conceptual principles of secondary education reform].* MON. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Book-ENG.pdf> (in Ukrainian)
7. Natsionalna stratehiia rozvytku inkluzyvnogo navchannia na period do 2029 roku. [National strategy for the development of inclusive education for the period until 2029]. № 527-p. (2024, 7 chervnia). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/527-2024-%D1%80#n10> (in Ukrainian)
8. Natsionalna stratehiia stvorennia bezbar'ierneho prostoru v Ukraini na period do 2030 roku. [National strategy for creating a barrier-free space in Ukraine for the period up to 2030]. № 366-p (2021, 14 kvitnia). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/366-2021-%D1%80#Text> (in Ukrainian)
9. Nova ukrainska shkola. (2020, 11 hrudnia). *Chomu STEM-osvita maie buty inkluzyvnoiu: porady dlia zaluchennia ditei z OOP. [Why STEM Education Must Be Inclusive: Tips for Engaging Children with SEN].* NUS. <https://nus.org.ua/2020/12/11/chomu-stem-osvita-maye-buty-inkluzyvnoyu-porady-dlya-zaluchennya-ditei-z-oop/> (in Ukrainian)
10. Soroko, N. V. (2019). Proektuvannia STEAM-orientovanoho tsyfrovoho seredovyscha shkoly (zarubizhnyi dosvid). [Design of STEAM-Oriented Digital School Environment (Foreign Experience)]. *Academic Notes. Series: Pedagogical Sciences*, 2(177), 100-104. <https://pednauk.cusu.edu.ua/index.php/pednauk/article/view/280> (in Ukrainian)
11. Tryfonova, O.M. (2015). Navchannia tekhnolohii ta fizyky v shkoli yak osnova proforiientatsiinoi dialnosti. [Learning technologies and physics at school as the basis of career guidance activities]. *Proceedings. Series: Problems of the methodology of physical, mathematical and technological education*, 7(1), 148-152. <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/237> (in Ukrainian)
12. Ukrainskyi instytut rozvytku osvity. (b.d.). *Metodychni rekomendatsii dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity shchodo profesiinoy oriiientatsii uchniv z osoblyvymy osvitnimy potrebamy. [Methodological recommendations for institutions of general secondary education regarding the professional orientation of students with special educational needs].* <https://uied.org.ua/wp-content/uploads/2021/10/metodrekom-profori%D1%94nt-oop.pdf> (in Ukrainian)
13. Ukrainskyi instytut rozvytku osvity. (2020). *Profesiina oriiientatsiia u novii ukrainskii shkoli. [Professional orientation in the new Ukrainian school].* https://uied.org.ua/wp-content/uploads/2020/12/konczepczya-profori%D1%94ntacziia%CC%88-dlya-gromadskogo-obgovorennya-16_12_20-.pdf (in Ukrainian)
14. Utosova, O. I. (2023). Tekhnolohiia pidhotovky ta suprovodu pratsevlashtuvannia vypusknivkiv iz RAS. [Technology of training and employment support for graduates with ASD]. *Innovative pedagogy*, 63(2), 233-237. <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2023/63.2.47> (in Ukrainian)
15. Shydelko, A. V. (2017). *Proforiientatsiia i profvidbir: aksiolohichni aspekty. [Vocational guidance and vocational selection: axiological aspects].* LvDUVS. URL: <http://surl.li/axqabr> (in Ukrainian)
16. Drigas, A., & Karyotaki, M. (2016). Online and Other ICT-based Training Tools for Problem-solving Skills. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 11(6), 35-39. <https://doi.org/10.3991/ijet.v11i06.5340>
17. Drigas, A., Mitsea, E., Skianis, C. (2022). Virtual Reality and Metacognition Training Techniques for Learning Disabilities. *Sustainability*, 14(16), 10170. <https://doi.org/10.3390/su141610170>
18. Dunn, C., Shannon, D., McCullough, B., Jenda, O., & Qazi, M. (2018). An Innovative Postsecondary Education Program for Students with Disabilities in STEM (Practice Brief). *Journal of Postsecondary Education and Disability*, 31(1), 91-101. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1182338>

19. Fowler, S., Cutting, C., Kennedy, J.P., Leonard, S.N., Gabriel, F., & Jaeschke, W. (2022). Technology enhanced learning environments and the potential for enhancing spatial reasoning: a mixed methods study. *Mathematics Education Research Journal*, 34(4), 887–910. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00368-9>
20. Leavy, A., Dick, L., Meletiou-Mavrotheris, M., Papanistodemou, E., & Stylianou, E. (2023). The prevalence and use of emerging technologies in STEAM education: A systematic review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning*, 39(4), 1061–1082. <https://doi.org/10.1111/jcal.12806>
21. Lytra, N., & Drigas, A. (2021). STEAM education- metacognition – Specific Learning Disabilities. *Scientific Electronic Archives*, 14(10). <https://doi.org/10.36560/141020211442>
22. Ortiz-Revilla, J., Ruiz-Martín, Á., & Greca, I.M. (2023). Conceptions and Attitudes of Pre-School and Primary School Teachers towards STEAM Education in Spain. *Education Sciences*, 13(4), 377. <https://doi.org/10.3390/educsci13040377>
23. Rodrigues-Silva, J., & Alsina, Á. (2023). STEM/STEAM in Early Childhood Education for Sustainability (ECEFS): A Systematic Review. *Sustainability (Switzerland)*, 15(4), 3721. <https://doi.org/10.3390/su15043721>
24. Vouglanis, T. (2024). The use of assistive technology by visually impaired students. *World Journal of Biology Pharmacy and Health Sciences*, 20(2), 365-372. <https://doi.org/10.30574/wjbphs.2024.20.2.0877>
25. Wei, X., Yu, J. W., Shattuck, P., McCracken, M., & Blackorby, J. (2013). Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) participation among college students with an autism spectrum disorder. *Journal of autism and developmental disorders*, 43(7), 1539–1546. <https://doi.org/10.1007/s10803-012-1700-z>

| Матеріал надійшов до редакції: 16.02.2025 р. | Прийнято до друку: 02.05.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |





ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА (PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)

p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X

2025, 40(4), <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-06>

УДК: 519.17:372.851

МОНОТОННІ ЛАНЦЮЖКИ МНОЖИН В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

Олександр КУРЧЕНКО

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Україна
oleksandrurchenko@knu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

Ольга СИНЯВСЬКА ✉

Державний навчальний заклад
«Ужгородський національний університет», Україна
olga.syniavska@uzhnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

MONOTONE CHAINS OF SETS IN OLYMPIAD PROBLEMS

Olexandr KURCHENKO

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
oleksandrurchenko@knu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

Olga SYNIAVSKA ✉

Uzhhorod National University, Ukraine
olga.syniavska@uzhnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Задачі з теорії множин і комбінаторики часто можна зустріти на олімпіадах з математики для учнів середньої та старшої школи. Саме такі задачі вимагають від учнів застосування не тільки теоретичних знань, але й логічних міркувань та використання нестандартних методів. Одним із ефективних методів до розв'язування таких задач є використання монотонних ланцюжків множин. За допомогою монотонних ланцюжків учні зможуть оптимально розв'язувати задачі певного типу на принцип Діріхле, застосовуючи при цьому достатньо прості логічні міркування про множини та структуру її підмножин. Застосування монотонних ланцюжків множин у задачах математичних олімпіад є не лише цікавим з точки зору підготовки школярів до олімпіади, а й з точки зору формування математичної компетентності учнів. Такі задачі сприяють розвитку логічного та абстрактного мислення, вміння аналізувати, узагальнювати, будувати математичні моделі, застосовувати відомі методи (наприклад, принцип Діріхле). Вони стимулюють учнів до застосування або пошуку нестандартних підходів.

Матеріали і методи. У статті використувувалася аналіз наукової та навчально-методичної літератури, зокрема, посібників для підготовки до олімпіад з математики, а також методів теорії множин, комбінаторики, принцип Діріхле.

Результати. У роботі наведено відомості з теорії множин про множини всіх підмножин деякої множини X , монотонні ланцюжки множин, доведено твердження про мінімальне число таких ланцюжків для розбиття сім'ї всіх підмножин даної множини на монотонні ланцюжки множин. Наведені задачі, які розв'язуються за допомогою описаного підходу і можуть бути використані на математичних олімпіадах та конкурсах різних рівнів.

Висновки. Метод монотонних ланцюжків множин є зручним інструментом у розв'язуванні задач математичних олімпіад певного типу. Представлені результати можуть бути використані для підготовки учнів до математичних олімпіад або конкурсів, а також для поглибленого вивчення елементів теорії множин у шкільному курсі математики чи позакласній роботі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: множина; підмножина; біномний коефіцієнт; монотонні ланцюжки множин; розбиття; математичні олімпіади.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Курченко О., Синявська О. Монотонні ланцюжки множин в олімпіадних задачах. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 40-44. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-06>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Problems in set theory and combinatorics are often found in middle and high school students at mathematics Olympiads. Such problems require students to apply not only theoretical knowledge but also logical reasoning and the use of non-standard methods. One of the effective methods for solving such problems is the use of monotonic chains of sets. With the help of monotonic chains, students can optimally solve problems of a particular type using the Dirichlet principle while applying fairly simple logical reasoning about the set and the structure of its subsets. The use of monotonic chains of sets in Olympiad problems is interesting from the point of view of preparing students for the Olympiad and from the point of view of forming students' mathematical competence. Such problems contribute to the development of logical and abstract thinking, the ability to analyze, generalize, build mathematical models, and apply well-known methods (for example, the Dirichlet principle). They stimulate students to use or seek out non-standard approaches.

Materials and methods. The article used an analysis of scientific and educational literature, particularly manuals for preparing for mathematics Olympiads, as well as methods of set theory, combinatorics, and the Dirichlet principle.

Results. The paper presents information from set theory about the set of all subsets of a specific set X , monotone chains of sets. It proves the statement about the minimal number of such chains for splitting the family of all subsets of a given set into monotone chains of sets. The problems are presented and solved using the described approach. They can be used in mathematical Olympiads and competitions at various levels.

Conclusions. The method of monotone chains of sets is a convenient tool for solving Olympiad problems of a specific type. The presented results can be used to prepare students for mathematical Olympiads or competitions and for an in-depth study of the elements of set theory in a school mathematics course or extracurricular work.

KEYWORDS: set; subset; binomial coefficient; monotone chains of sets; partition; Mathematical Olympiad.

FOR CITATION: Kurchenko, O., & Syniavska, O. (2025). Monotone chains of sets in olympiad problems. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 40-44. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-06>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Одним із важливих напрямів у діяльності вчителя математики є позакласна робота та підтримка і розвиток обдарованих учнів. Особливої уваги при цьому заслуговує вдосконалення підходів до викладання математики таким школярам, зокрема, при підготовці їх до олімпіад з математики. Для цього вчителям потрібно розробляти нові підходи до методики викладання, розв'язування нестандартних задач, аналізувати завдання з попередніх років, а також вивчати попередній досвід участі в олімпіадах. Розв'язування задач математичних олімпіад можна вважати вагомим показником математичних здібностей учнів. Участь в олімпіадах не лише виявляє школярів з неабиякими математичними здібностями, а й сприяє формуванню в них логічного мислення, креативності, самостійності, уміння працювати в умовах змагання. Серед основних цілей проведення математичних олімпіад варто відзначити розвиток інтересу до математики, підвищення математичної культури та інтелектуального рівня учнів.

Задачі олімпіад з математики, зазвичай, відзначаються підвищеною складністю, вимагають нестандартних міркувань, використання нових підходів та особливих методів розв'язання. Серед основних типів олімпіадних завдань з математики можна виділити задачі логічного характеру (застосування принципу Діріхле, методу інваріантів, вибору стратегії успіху, комбінаторики) (Вороний, 2008). Одним із ефективних підходів до розв'язування таких задач є використання впорядкованих множин, зокрема, монотонних ланцюжків множин. Розгляд таких задач у рамках підготовки до олімпіад підвищує мотивацію до вивчення предмету, вчить учнів бачити математичні закономірності у нестандартних ситуаціях, а також розвиває інтерес до практичного застосування математики.

Аналіз актуальних досліджень. Задачі з теорії множин і комбінаторики часто можна зустріти на олімпіадах з математики для учнів середньої та старшої школи (Сарана, 2011). Розв'язування таких задач не лише розвиває математичне мислення, а й сприяє формуванню ключової математичної компетентності, що є важливим результатом навчання в умовах Нової української школи (Васильєва та ін., 2021). Математична компетентність включає знання, розуміння, виконання, використання та думку про математику та математичну діяльність у різних контекстах, де застосовується або може застосовуватися математика (Niss & Hojgaard, 2019). Згідно з (Semenets et al. 2022), компетентність математичної освіти, переорієнтація з моделі теоретичних знань на модель компетентності зумовлюють новітнє наукове переосмислення місця і ролі внутрішніх ресурсів особистості, які забезпечують ефективність формування та розвитку математичної компетентності. Під математичною компетентністю можна розуміти уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень (Глобін та ін., 2015). Важливою її складовою є логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, застосування математичної та логічної символіки на практиці (Глобін та ін., 2015).

Монотонні ланцюжки множин та їх застосування у задачах різного рівня складності розглядалася в різних роботах із теорії множин, комбінаторики, теорії функцій тощо. Наприклад, в роботах Nelsen & Schmidt (1991), Lehtonen (2006), Inamdar (2023). Багато авторів застосовували монотонні ланцюжки множин у наукових дослідженнях, але не досліджували їх застосування для розв'язування задач олімпіадного типу. Таким чином, потребує подальшого дослідження методика (практичний і дидактичний аспект) застосування цих структур для розв'язування та розробки олімпіадних задач з математики.

Мета статті. Метою даної статті є застосування монотонних ланцюжків множин для розв'язування задач з математики підвищеної складності, зокрема, задач олімпіадного типу. Зосереджено увагу на обґрунтування ефективності використання таких структур у задачах логічного типу, наприклад таких, що розв'язуються із застосуванням принципу Діріхле й елементів теорії множин.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У процесі дослідження використано аналіз наукової та навчально-методичної літератури, зокрема посібників для проведення та підготовки до участі у олімпіадах з математики, а також методи теорії множин, комбінаторики, принцип Діріхле (Poop & Shiu, 2008). Доведені твердження супроводжуються прикладами, зокрема, із завдань конкретних математичних олімпіад.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ**1. Множина всіх підмножин множини X**

Нехай X – скінченна множина, $|X|$ – число її елементів, 2^X – сім'я всіх підмножин множини X , включаючи порожню множину \emptyset і множину X .

Приклад 1. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$. Тоді сім'я всіх підмножин множини X

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, X\}.$$

Зауважимо, що $|X| = 3$, $|2^X| = 8$, так що

$$|2^X| = 2^{|X|}. \quad (1)$$

Рівність (1) справджується для довільної скінченної множини X . Справді, формуючи підмножину, будемо перебирати елементи множини X . Для кожного елемента маємо дві можливості: включати його до підмножини або не включати. За комбінаторним правилом множення (Semanisniva, 2011) існують рівно

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{|X|} = 2^{|X|}$$

різних підмножин множини X (включаючи \emptyset і X).

Задача 1. Вісім учнів відвідують три гуртки (кожний учень відвідує хоча б один гурток). Доведіть, що серед них є хоча б два учні, які відвідують одні і ті самі гуртки.

Розв'язання. Сім'я всіх непорожніх підмножин множини всіх гуртків складається з $2^3 - 1 = 7$ наборів гуртків. За принципом Діріхле, хоча б два з восьми учнів будуть мати один і той же набір гуртків. Це буде означати, що ці учні відвідують одні і ті самі гуртки.

2. Розбиття сім'ї всіх підмножин множини X на монотонні ланцюжки

Нехай A_1, A_2, \dots, A_k – підмножини множини X . Ланцюжок множин $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ є монотонним, якщо

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k$$

або

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k$$

(тут включення є строгі).

Приклад 2. Нехай $X = \{1,2,3\}$. Тоді

$$\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

– монотонний ланцюжок множини X , оскільки

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

Набір монотонних ланцюжків L_1, L_2, \dots, L_N множини X називається розбиттям сім'ї всіх підмножин множини X , якщо:

- 1) $\emptyset \cup L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_N = 2^X$;
- 2) $L_i \cap L_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Приклад 3. Нехай $X = \{1,2,3\}$. Набір монотонних ланцюжків:

$$L_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\},$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2,3\}\},$$

$$L_3 = \{\{3\}, \{1,3\}\},$$

є розбиттям сім'ї 2^X . Дійсно, виконуються умови:

- 1) $\emptyset \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 = 2^X$;
- 2) $L_1 \cap L_2 = \emptyset, L_1 \cap L_3 = \emptyset, L_2 \cap L_3 = \emptyset$.

Задача 2. Чотири учні відвідують три гуртки (кожний учень відвідує хоча б один гурток). Доведіть, що серед них є хоча б два учні A і B , такі, що всі гуртки, які відвідує учень A , відвідує й учень B .

Розв'язання. Нехай $X = \{1,2,3\}$. У прикладі 3 вказано розбиття сім'ї множин 2^X на три монотонні ланцюжки L_1, L_2, L_3 . За принципом Діріхле (Roop & Shiu, 2008), знайдуться хоча б два учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі: всі гуртки, що відвідує один з цих учнів, відвідує і другий.

Наступна задача пропонувалась у шостому і сьомому класах на другому етапі Всеукраїнської математичної олімпіади у 2000-2001 навчальному році (Лейфура та ін., 2008).

Задача 3. одинадцять учнів відвідують п'ять гуртків (учень не обов'язково відвідує всі гуртки). Доведіть, що серед них є хоча б два учні A і B , такі, що всі гуртки, які відвідує учень A , відвідує й учень B .

Розв'язання. Нехай $X = \{1,2,3,4,5\}$ – множина всіх гуртків. Сім'я 2^X всіх наборів гуртків має таке розбиття на 10 монотонних ланцюжків

$$L_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, X\},$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,4,5\}\},$$

$$L_3 = \{\{3\}, \{3,4\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}\},$$

$$L_4 = \{\{4\}, \{4,5\}, \{4,5,1\}, \{4,5,1,2\}\},$$

$$L_5 = \{\{5\}, \{5,1\}, \{5,1,2\}, \{5,1,2,3\}\},$$

$$L_6 = \{\{1,3\}, \{1,3,4\}\},$$

$$L_7 = \{\{1,4\}, \{1,4,2\}\},$$

$$L_8 = \{\{2,4\}, \{2,4,5\}\},$$

$$L_9 = \{\{2,5\}, \{2,5,3\}\},$$

$$L_{10} = \{\{3,5\}, \{3,5,1\}\}.$$

За принципом Діріхле, знайдуться хоча б два учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі: всі гуртки, що відвідує один з цих учнів, відвідує і другий.

Задача 4. Двадцять один учень відвідують п'ять гуртків (учень не обов'язково відвідує всі гуртки). Доведіть, що серед них є хоча б три учні A, B і C , такі, що всі гуртки, які відвідує A , відвідує й B ; всі гуртки, які відвідує B , відвідує й C .

Розв'язання. Нехай $X = \{1,2,3,4,5\}$ – множина всіх гуртків. Застосуємо вказане у розв'язанні попередньої задачі розбиття сім'ї 2^X на 10 монотонних ланцюжків. За принципом Діріхле, знайдуться хоча б три учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі.

3. Мінімальне число монотонних ланцюжків

Символом $[x]$ позначимо цілу частину дійсного числа x – найбільше ціле число, яке не перевищує x . Наприклад, $[23,54] = 23$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$. Нагадаємо також, що $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біномний коефіцієнт.

Теорема 1. Нехай $|X| = d$. Кожне розбиття сім'ї 2^X на монотонні ланцюжки містить не менше $C_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ монотонних ланцюжків.

Доведення. Дві різні $\binom{d}{2}$ елементні підмножини множини X не можуть належати одному й тому ж монотонному ланцюжку. Як відомо з комбінаторики, всього є $C_d^{\binom{d}{2}}$ таких підмножин. Отже, число монотонних ланцюжків не менше $C_d^{\binom{d}{2}}$. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $|X| = d$. Існує розбиття сім'ї 2^X на $C_d^{\binom{d}{2}}$ монотонні ланцюжки.

Доведення. Нехай $X = \{1, 2, \dots, d\}$. Зауважимо, що $C_d^1, C_d^2, \dots, C_d^{\binom{d}{2}}$ – зростаючий набір біномних коефіцієнтів. Монотонні ланцюжки L_1, L_2, \dots, L_d починаємо з одноелементних множин і на кожному кроці робимо максимально можливої довжини:

$$L_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, d-1\}, X\},$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2, 3\}, \dots, \{2, 3, \dots, d-1\}\},$$

...

$$L_d = \{\{d\}, \{d, 1\}, \dots, \{d, 1, 2, \dots, d-2\}\}.$$

У цих монотонних ланцюжках відсутні $C_d^2 - C_d^1$ двоелементні підмножини множини X . У наступній серії монотонних ланцюжків кожний ланцюжок стартує з ще не задіяної двоелементної множини і має максимально можливої довжину. Після цього залишаються не задіяними в побудованих монотонних ланцюжках $C_d^3 - (C_d^1 - (C_d^2 - C_d^1)) = C_d^3 - C_d^2$ трьохелементні множини. Будуємо відповідну серію $C_d^3 - C_d^2$ монотонних ланцюжків, починаючи з відповідних множин з трьох елементів. Після цього кроку матимемо $C_d^3 - C_d^2 + C_d^2 - C_d^1 + C_d^1 = C_d^3$ монотонних ланцюжків. Всі підмножини множини X будуть вичерпані на $\binom{d}{2}$ -му кроці, оскільки набір біномних коефіцієнтів $C_d^{\binom{d}{2}}, C_d^{\binom{d}{2}+1}, \dots, C_d^d$ незростаючий.

Таким чином, побудовано розбиття сім'ї 2^X на $C_d^{\binom{d}{2}}$ монотонних ланцюжків. Теорему доведено.

Із попередніх теорем 1-2 слідує наступне твердження.

Наслідок 1. Нехай $|X| = d$. Мінімальне число монотонних ланцюжків, на яке можна розбити сім'ю 2^X , дорівнює $C_d^{\binom{d}{2}}$.

Наприклад, при $d = 3$: $C_3^{\binom{3}{2}} = C_3^1 = 3$; при $d = 5$: $C_5^{\binom{5}{2}} = C_5^2 = 10$.

Задача 5. Нехай $d \geq 3$ натуральне число. $C_d^{\binom{d}{2}} + 1$ учнів відвідують d гуртків (кожен учень відвідує хоча б один гурток). Доведіть, що серед них є два учні A і B , такі, що всі гуртки, які відвідує A , відвідує й B .

Розв'язання. Нехай $X = \{1, 2, \dots, d\}$. Розглянемо розбиття сім'ї 2^X , яке містить $C_d^{\binom{d}{2}}$ монотонних ланцюжків. За принципом Діріхле, знайдуться хоча б два учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У цій статті дано означення і досліджено розбиття сім'ї всіх підмножин скінченної множини X на монотонні ланцюжки підмножин. Ланцюжки одного й того ж розбиття не містять спільних підмножин. Отриманий результат про мінімальну кількість монотонних ланцюжків підмножин у розбитті.

Ознайомлення вчителів, а через них і учнів, з поняттями сім'ї всіх підмножин заданої множини, монотонного ланцюжка підмножин, розбиття сім'ї всіх підмножин заданої скінченної множини X на монотонні ланцюжки, результат про мінімальну кількість монотонних ланцюжків підмножин у такому розбитті сприятиме розвитку математичної, зокрема теоретико-множинної, компетентності учнів середніх навчальних закладів.

Розглянуті теоретичні поняття і отримані результати застосовані для укладання і розв'язування задач математичних олімпіад різного рівня.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на підрахунок кількості розбиттів з мінімальним числом монотонних ланцюжків підмножин, підрахунок числа всіх можливих розбиттів на монотонні ланцюжки, а також на укладання і розв'язування задач математичних олімпіад.

Отримані результати можуть бути включені до вибіркового курсів для студентів-математиків педагогічних університетів з підготовки до олімпіад з математики різного рівня, укладання та розв'язування задач математичних олімпіад.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Inamdar, T. C. (2023). On strong chains of sets and functions. *Mathematika*, 69 (1), 286-301. <https://doi.org/10.1112/mtk.12183>
2. Lehtonen, E. (2006). Descending Chains and Antichains of the Unary, Linear, and Monotone Subfunction Relations. *Order*, 23, 129-142. <https://doi.org/10.1007/s11083-006-9036-y>
3. Nelsen, R. B., & Schmidt, H. (1991). Chains in Power Sets. *Mathematics Magazine*, 64 (1), 23-31. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977568>
4. Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
5. Semenets, S. P., Semenets, L. M., Andriichuk, N. M., & Lutsyk, O. M. (2022). Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. *Journal of Physics Conference Series*, 2288 (1), 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023>
6. Бардачов, Ю. М., Соколова Н.А., & Ходаков В.Є. (2002). *Дискретна математика: Підручник*. К.: Вища шк.
7. Васильєва, Д. В., Вашуленко, О. П., & Волошена В. В. (2021). *Методика компетентнісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту: методичний посібник*. К.: КОНВІ ПРИНТ.
8. Вишенський, В.А., & Перестюк, М.О. (2010). *Комбінаторика. Перші кроки*. Кам'янець-Подільський, Аксіома.
9. Вороний, О. М. (2008). *Готуємось до олімпіад з математики*. Х.: Основа.
10. Глобін О.І., Бурда, М.І., Васильєва, Д.В., Волошена, В.В., Вашуленко, О.П., Мацько, Н.Д., & Хмара, Т.М. (2015). *Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник*. К.: Педагогічна думка.
11. Лейфура, В., Мігельман, І., Радченко, В., & Ясінський, В. (2008). *Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр.: навч.-метод. посібник*. Львів: Каменяр.
12. Сарана, О.А. (2011). *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник (2 вид.)*. Тернопіль: Навчальна книга: Богдан.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Inamdar, T. C. (2023). On strong chains of sets and functions. *Mathematika*, 69 (1), 286-301. <https://doi.org/10.1112/mtk.12183>
2. Lehtonen, E. (2006). Descending Chains and Antichains of the Unary, Linear, and Monotone Subfunction Relations. *Order*, 23, 129-142. <https://doi.org/10.1007/s11083-006-9036-y>
3. Nelsen, R. B., & Schmidt, H. (1991). Chains in Power Sets. *Mathematics Magazine*, 64 (1), 23-31. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977568>
4. Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
5. Semenets, S. P., Semenets, L. M., Andriichuk, N. M., & Lutsyk, O. M. (2022). Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. *Journal of Physics Conference Series*, 2288 (1), 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023>
6. Bardachov, Yu. M., Sokolova N.A., & Khodakov V.Ye. (2002). *Dyskretna matematika: Pidruchnyk [Discrete Mathematics: Textbook]*. K.: Vyshcha shk. (in Ukrainian).
7. Vasylyeva, D. V., Vashulenko, O. P., & Voloshena V. V. (2021). *Metodyka kompetentnisno oriientovanoho navchannia matematyky v litsei na rivni standartu: metodychnyi posibnyk [Methodology of Competency-Based Teaching of Mathematics in Lyceum at the Standard Level: Methodological Guide]*. K.: KONVI PRINT (in Ukrainian).
8. Vyshensky, V.A., & Perestyuk, M.O. (2010). *Kombinatoryka. Pershi kroky [Combinatorics. First Steps]*. Kamianets-Podilsky, Axioma (in Ukrainian).
9. Voronyi, O. M. (2008). *Hotuiemos do olimpiad z matematyky [Preparing for the Mathematics Olympiads]*. Kh.: Osнова (in Ukrainian).
10. Globin O.I., Burda, M.I., Vasylyeva, D.V., Voloshena, V.V., Vashulenko, O.P., Matsko, N.D., & Khmara, T.M. (2015). *Kompetentnisno oriientovana metodyka navchannia matematyky v osnovnii shkoli: Metod. posibnyk [Competency-oriented methodology of teaching mathematics in primary school: Methodological manual]*. K.: Pedahohichna dumka (in Ukrainian).
11. Leyfura, V., Mitelman, I., Radchenko, V., & Yasinsky, V. (2008). *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 2001–2006 rr.: navch.-metod. posibnyk [Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 1991–2000: teaching and methodical manual]*. Lviv: Kamenyar (in Ukrainian).
12. Sarana, O.A. (2011). *Matematychni olimpiady: proste i skladne poruch: Navchalnyi posibnyk (2 vyd.) [Mathematical Olympiads: simple and complex side by side: Textbook (2 ed.)]*. Ternopil: Navchalna knyha - Bohdan (in Ukrainian).

| Матеріал надійшов до редакції: 23.04.2025 р. | Прийнято до друку: 05.06.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ІНТЕГРАЦІЯ ПЛАТФОРМ ВІДЕОЗВ'ЯЗКУ ТА ДОПОВНЕНОЇ РЕАЛЬНОСТІ В МОДЕЛІ УРОКІВ ЗМІШАНОГО І ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Аліса СУХІХ ✉

Інститут цифровізації освіти
Національної академії педагогічних наук України, Україна
sukhikh@iitlt.gov.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8186-1715>

INTEGRATION OF VIDEO COMMUNICATION AND AUGMENTED REALITY PLATFORMS INTO THE MODEL OF BLENDED AND DISTANCE LEARNING LESSONS IN GENERAL SECONDARY EDUCATION INSTITUTIONS

Alisa SUKHICH ✉

Institute for Digitalization of Education of the National Academy
of Sciences of Ukraine, Ukraine
sukhikh@iitlt.gov.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8186-1715>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Сучасна трансформація освітнього процесу актуалізувала необхідність пошуку ефективних рішень для організації змішаного та дистанційного навчання в ЗЗСО. Попри широке використання платформ відеозв'язку (таких як Zoom, Meet, Teams), освітній процес у цифровому форматі нерідко супроводжується зниженням залученості учнів, одноманітністю подачі матеріалу, інформаційним перевантаженням та браком гнучких дидактичних рішень, здатних враховувати вікові, когнітивні та мотиваційні особливості здобувачів освіти сучасних поколінь. У такому контексті імерсивні технології, насамперед доповнена реальність, мають значний потенціал для побудови візуально насиченого, інтерактивного й емоційно залученого освітнього середовища. Водночас у межах загальної середньої освіти України недостатньо досліджено та методично не унормовано можливості інтеграції AR-контенту з платформами синхронної взаємодії у структурі шкільного уроку. Це створює запит на розроблення моделей, які б забезпечували педагогічну цілісність такого поєднання та сприяли ефективнішому використанню EdTech у процесі навчання.

Методи та матеріали. У дослідженні використано теоретичні методи, зокрема аналіз науково-методичної, психолого-педагогічної літератури з питань змішаного й дистанційного навчання, цифрової педагогіки, а також педагогічного дизайну з урахуванням вікових особливостей поколінь.

Результати. Виокремлено основні проблеми дистанційного й змішаного навчання в ЗЗСО, зокрема зниження уваги, обмежену візуалізацію, перевантаження контентом. На основі аналізу вікових особливостей поколінь Зумерів та Альфа обґрунтовано доцільність інтеграції AR-контенту в поєднанні з платформами відеозв'язку. Розроблено типову добірку моделей уроків з імерсивними елементами, адаптованих до предметної галузі, віку учнів і формату навчання.

Висновки. Інтеграція платформ відеозв'язку з AR-контентом сприяє підвищенню ефективності коротких дистанційних і змішаних уроків, забезпечує залучення учнів і підтримку їх когнітивних потреб. Запропоновані моделі та Каталог імерсивних сервісів можуть бути використані вчителями як інструмент оновлення уроків. Для повноцінного впровадження необхідна цифрова підготовка педагогів та інституційна підтримка імерсивних підходів у школах.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: змішане навчання; дистанційна освіта; загальна середня освіта; платформи відеозв'язку; доповнена реальність (AR), віртуальна реальність (VR).

ABSTRACT

Formulation of the problem. The current transformation of the educational process has highlighted the need to find effective solutions for organizing blended and distance learning in secondary schools. Despite the widespread use of video conferencing platforms (such as Zoom, Meet, Teams), the educational process in digital format is often accompanied by a decrease in student engagement, monotony in the presentation of material, information overload, and a lack of flexible didactic solutions capable of taking into account the age, cognitive, and motivational characteristics of modern generations of students. In this context, immersive technologies, especially augmented reality, have significant potential for building a visually rich, interactive, and emotionally engaging educational environment. At the same time, within the framework of general secondary education in Ukraine, the possibilities of integrating AR content with synchronous interaction platforms into the structure of school lessons have not been sufficiently researched and methodologically standardized. This creates a demand for the development of models that would ensure the pedagogical integrity of such a combination and contribute to the more effective use of EdTech in the learning process.

Materials and methods. The study uses theoretical methods, including analysis of scientific, methodological, psychological, and pedagogical literature on blended and distance learning, digital pedagogy, and pedagogical design, taking into account the age characteristics of different generations.

Results. The main problems of distance and blended learning in secondary schools have been identified, in particular, reduced attention, limited visualization, and content overload. Based on an analysis of the age characteristics of the Zumer and Alpha generations, the feasibility of integrating AR content in combination with video communication platforms has been substantiated. A typical selection of lesson models with immersive elements has been developed, adapted to the subject area, age of students, and learning format.

Conclusions. The integration of video communication platforms with AR content helps to increase the effectiveness of short-distance and blended lessons, engages students, and supports their cognitive needs. The proposed models and the catalog of immersive services can be used by teachers as a tool for updating lessons. Full implementation requires digital training for teachers and institutional support for immersive approaches in schools.

KEYWORDS: blended learning; distance learning; general secondary education; video conferencing platforms; augmented reality (AR), virtual reality (VR).

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Сухіх А. Інтеграція платформ відеозв'язку та доповненої реальності в моделі уроків змішаного і дистанційного навчання в закладах загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 45-51. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-07>.

FOR CITATION: Sukhikh, A. (2025). Integration of video communication and augmented reality platforms into the model of blended and distance learning lessons in general secondary education institutions. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 45-51. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-07>.

ВСТУП

Освіта в Україні сьогодні переживає одну з найглибших трансформацій у своїй новітній історії. У таких умовах зросла потреба в інноваційних освітніх рішеннях, які поєднують гнучкість, візуальну привабливість і технологічну ефективність. Змішане та дистанційне навчання стали не просто вимушеними заходами, а довгостроковими стратегіями, що потребують нового педагогічного мислення та технологічного інструментарію.

Цифрові платформи, такі як Zoom, Google Meet і Microsoft Teams, стали звичними інструментами синхронної взаємодії між учителем і учнями в закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО). Вони дозволяють підтримувати освітній процес у реальному часі, забезпечуючи базову комунікацію та управління уроками. Водночас виклики цифрової освіти, а саме низький рівень залучення учнів, монотонність взаємодії, інформаційне перевантаження вимагають більш глибоких освітніх рішень. Якраз імерсивні технології – віртуальна та доповнена реальність можуть бути тим інструментом, який може вдосконалити процес навчання.

Імерсивні середовища здатні не лише візуалізувати абстрактні поняття, а й занурити учнів у навчальний процес, активізуючи критичне мислення, дослідницьку мотивацію та здатність до інтерактивної взаємодії. Особливої ефективності такі технології набувають у форматі коротких (20–25-хвилинних) уроків, орієнтованих на стратегії *microlearning*. Поєднання із платформами відеозв'язку дозволяє створити нову модель освітнього досвіду, адаптовану до когнітивних і соціальних характеристик сучасних учнів – поколінь Зумерів і Альфа.

Постановка проблеми. Сучасна система загальної середньої освіти України перебуває у стані глибокої трансформації, обумовленої як глобальними викликами (пандемією, воєнними подіями, змінами в освітніх парадигмах), так і потребою у забезпеченні якості освіти в умовах змішаного та дистанційного навчання. У зв'язку з цим цифрові платформи для синхронної взаємодії (Zoom, Google Meet, Microsoft Teams) стали звичними інструментами шкільної практики. Проте, попри їх широке використання, залишається низка педагогічних проблем, пов'язаних із обмеженою інтерактивністю, зниженим рівнем мотивації учнів і браком залученості до навчального процесу в онлайн-середовищі.

Одним із перспективних напрямів вирішення зазначених проблем є впровадження технологій віртуальної (VR) та доповненої реальності (AR), які створюють імерсивне, візуально насичене освітнє середовище. Однак у педагогічній теорії та практиці недостатньо досліджено можливості комплексної інтеграції відеоплатформ із VR/AR-контентом, особливо в контексті коротких (20–25-хвилинних) уроків, що набувають поширення в умовах *microlearning* та змішаного навчання.

Відсутність цілісних моделей, які б методично обґрунтовували таку інтеграцію в межах ЗЗСО, ускладнює ефективне використання цифрових технологій у процесі навчання. Це, у свою чергу, стримує розвиток компетентностей учнів, знижує мотивацію до пізнавальної діяльності та обмежує реалізацію принципів персоналізованого навчання.

Актуальність дослідження полягає в необхідності розробки та апробації освітніх моделей, які поєднують можливості Zoom/Meet/Teams із VR/AR-контентом у межах коротких уроків змішаного формату, що дозволить підвищити ефективність навчального процесу, активізувати пізнавальну діяльність учнів та сприяти формуванню цифрових компетентностей відповідно до вимог сучасної освіти.

Аналіз актуальних досліджень. Упродовж останніх років у світовій педагогіці активно досліджується потенціал змішаного та дистанційного навчання як відповідь на виклики глобалізації, цифровізації й соціальних криз. Зокрема, пандемія COVID-19 стала каталізатором переходу до нових моделей організації навчального процесу, у яких цифрові платформи синхронної взаємодії (Zoom, Google Meet, Microsoft Teams тощо) стали не лише інструментом зв'язку, а й основою для переосмислення форм і методів навчання (Bozkurt et al., 2020; Van Nuland et al., 2020).

Одним із ключових напрямів сучасних досліджень є поєднання інструментів EdTech із імерсивними технологіями – доповненою (AR), віртуальною (VR), змішаною (MR) та розширеною реальністю (XR). Доведено, що такі технології суттєво впливають на пізнавальну активність, розуміння складних концептів, формування навичок критичного мислення й розвиток дослідницьких умінь учнів (Kavanagh et al., 2017).

На європейському рівні особливу увагу приділено цифровим компетентностям педагогів. Рамка DigCompEdu (Redecker, 2017) визначає необхідність розвитку таких умінь, як інтеграція цифрового контенту, створення персоналізованого освітнього середовища, використання технологій для взаємодії, оцінювання й підтримки учнів. Це особливо важливо в умовах впровадження VR/AR, оскільки ефективність їх використання залежить не лише від технічної доступності, а й від рівня методичної готовності вчителя.

У контексті України питання використання імерсивних технологій в освіті розглядалися в роботах (Литвинова та ін., 2024), які запропонували методичні підходи до впровадження XR у змішаному навчанні. Водночас автори підкреслюють фрагментарність практики VR/AR в українських школах, обмежений доступ до обладнання, відсутність системних програм підготовки вчителів і потребу в розробці сценаріїв коротких уроків на основі імерсивного контенту.

Питання вікових особливостей сучасних здобувачів освіти – Зумерів (Gen Z) та Альфа (Gen Alpha) – все частіше розглядається в контексті проектування освітніх технологій. Дослідники (Twenge, 2017; Prensky, 2001) акцентують на потребі адаптувати освітній контент до поколінь, що звикли до візуалізації, миттєвого зворотного зв'язку, персоналізації та гейміфікації.

Таким чином, актуальні наукові джерела фіксують високий потенціал імерсивних технологій для змішаного навчання, однак водночас окреслюють потребу в педагогічних моделях, які б інтегрували VR/AR з уже апробованими цифровими платформами синхронної взаємодії, зокрема в структурі коротких (20–25 хв) уроків.

Мета статті. Теоретично обґрунтувати запропоновані моделі уроків змішаного та дистанційного формату, що передбачають інтеграцію цифрових платформ відеозв'язку (Zoom, Google Meet, Microsoft Teams) з AR-контентом у процес навчання в закладах загальної середньої освіти з метою підвищення мотивації, залученості учнів та якості засвоєння ними навчального матеріалу. Дослідження спрямоване на визначення дидактичних переваг такого поєднання, окреслення бар'єрів його реалізації та створення інструментарію для підтримки вчителів у доборі цифрових рішень.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети дослідження використано загальнонаукові та емпіричні методи. Перш за все, було здійснено теоретичний аналіз науково-методичної, психолого-педагогічної та спеціалізованої літератури, що стосується питань змішаного навчання, використання платформ відеозв'язку (Zoom, Google Meet, Microsoft Teams) та впровадження VR/AR-технологій в освітній процес. Цей етап передбачав також систематизацію та узагальнення наукових фактів, концепцій і закономірностей, пов'язаних із досліджуваною проблематикою.

Крім того, було проведено огляд і порівняльний аналіз вітчизняного та міжнародного досвіду впровадження цифрових освітніх технологій у закладах загальної середньої освіти, з особливою увагою до моделей уроків та інтеграції імерсивного контенту у форматах дистанційного та змішаного навчання.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Змішане та дистанційне навчання стали невід'ємними елементами трансформації освітнього процесу в умовах цифрової епохи. Якщо змішане навчання (blended learning) передбачає інтеграцію традиційного очного навчання з цифровими форматами – синхронними та асинхронними, то дистанційне навчання реалізується переважно в цифровому середовищі й потребує ще більшої уваги до зручності, візуальної підтримки, інтерактивності й залучення учнів. Обидві моделі дозволяють гнучко адаптувати освітній процес до потреб здобувачів освіти, сприяють розвитку цифрової грамотності, автономності учнів і персоналізації навчального контенту. Їх широке впровадження стало особливо актуальним під час пандемії COVID-19, а нині в умовах війни, релокації шкіл і сталого переходу до моделі «Нова українська школа».

Інструментами, які забезпечують комунікацію в умовах обох форматів, стали платформи для відеозв'язку – Zoom, Google Meet, Microsoft Teams та інші. Порівняльний аналіз цих платформ за різними критеріями наведено в роботі (Гайтан, 2022). Вони реалізують функцію синхронної взаємодії: проведення уроків, консультацій, мінілекцій, роботи в групах та оцінювання в режимі реального часу. Однак у роботі з цими платформами виникає низка педагогічних проблем (Van Nuland et al., 2020), зокрема: зниження концентрації уваги учнів, обмеженість у засобах візуалізації, монотонність взаємодії, перевантаження контентом. Це спонукає до пошуку інноваційних підходів, які б компенсували обмеження традиційних цифрових платформ і створювали умов для активного, осмисленого й емоційно залученого навчання.

Ці виклики особливо актуальні в контексті сучасного покоління здобувачів освіти, а саме дітей покоління Альфа (Generation Alpha), які сьогодні переважають у початковій і середній школі. Водночас старшокласники (учні 9–11 класів) належать переважно до покоління зумерів. Обидві вікові групи демонструють високий рівень цифрової грамотності, критичне мислення щодо інформаційного контенту та очікують від освітнього процесу гнучкості, інтерактивності й персоналізації.

Для зумерів (Twenge, 2017) характерне звикання до миттєвого доступу до інформації, надання переваги візуальним форматам (відео, інфографіці, динамічному контенту). Водночас вони прагнуть самостійності, сенсотворення та ідентифікації себе в навчальному процесі. Їм важливо бачити практичну цінність навчання, брати участь у проектних та креативних формах взаємодії, а не бути лише пасивними споживачами знань.

Покоління Альфа, яке зростає в ще більш насиченому цифровому середовищі, порівняно з попереднім, відзначається високою здатністю до одночасного використання кількох пристроїв, звичкою до гейміфікованого спілкування та взаємодії через віртуальні середовища. Ці діти не просто володіють технологіями – вони сприймають їх як природне продовження своєї пізнавальної діяльності (McCordle & Fell, 2021). Для них важливо, щоб навчання було схожим на взаємодію з улюбленими застосунками або середовищами: короткі цикли зворотного зв'язку, яскрава візуалізація, елемент несподіванки, можливість персоналізувати шлях до результату. Крім того, Альфа покоління вирізняється меншою стійкістю до одноманітного контенту, тому вимагає більшої варіативності в освітньому дизайні.

Врахування особливостей вищезазначених поколінь вимагає переосмислення педагогічного дизайну уроку: від одноманітного подання знань до динамічної моделі занурення, в якій учень – не спостерігач, а учасник процесу. У цьому контексті особливої актуальності набувають імерсивні технології, які дозволяють побудувати освітнє середовище, здатне задовольнити когнітивні й емоційні запити сучасних учнів.

Одним із таких підходів є використання VR (віртуальної реальності) та AR (доповненої реальності), що реалізують принцип занурення учня у змодельоване цифрове середовище. Це середовище може бути як повністю віртуальним (у VR), так і змішаним з реальністю (у AR), що дозволяє створювати реалістичні освітні ситуації, проводити віртуальні експерименти, вивчати просторові об'єкти або реконструювати історичні події. Такі формати особливо ефективні для коротких уроків, орієнтованих на стратегії *microlearning* – подачу навчального змісту в компактних, цілісних фрагментах, які легко засвоюються, стимулюють активне мислення й дозволяють утримати увагу здобувача освіти.

Імерсивні технології поділяються на кілька основних типів: віртуальна реальність (VR), доповнена реальність (AR), змішана реальність (MR), розширена реальність (XR), 360-градусні відео, голографічне моделювання, телеприсутність і тактильна взаємодія (haptics). Кожна з цих технологій має дидактичний потенціал для підвищення ефективності

дистанційного та змішаного навчання. VR формує віртуальні світи, у яких учні можуть взаємодіяти з 3D-об'єктами або процесами; AR накладає цифрові шари на зображення реального світу, що дозволяє учням виконувати завдання у власному фізичному оточенні з цифровими підказками.

Більш детально потенціал використання імерсивних технологій у межах змішаного навчання в ЗЗСО проаналізовано у методичних рекомендаціях «Використання імерсивних технологій вчителями у процесі змішаного навчання в закладах загальної середньої освіти» (Литвинова та ін., 2024). Авторами здійснено теоретичне та методичне обґрунтування VR/AR-рішень в освіті, представлено приклади платформ (AR Book, Blippar, ARTutor, 360-градусне відео) та сценаріїв використання імерсивного контенту, адаптованих до умов коротких змішаних уроків. Наголошено на доцільності впровадження імерсивних технологій у поєднанні із платформами Zoom/Meet/Teams та підкреслюють важливість підготовки вчителів до роботи з таким контентом.

Потрібно зазначити, що для українського суспільства впровадження імерсивних технологій, безперечно має перспективний потенціал – особливо в контексті оновлення форм навчання, підвищення залученості учнів і створення нових моделей змішаного чи дистанційного навчання. Однак на практиці застосування VR залишається радше винятком, а не сталою освітньою нормою (<https://mon.gov.ua/news/ukrainski-uchni-testuyut-navchannya-za-dopomogoyu-virtualnoi-ta-dopovnenoi-realnostey>). Це зумовлено низкою об'єктивних чинників: нерівномірним забезпеченням технічними ресурсами, обмеженим доступом до обладнання в умовах війни, відсутністю системної підготовки педагогів до роботи з VR-контентом, а також неготовністю більшості шкіл до масштабного переходу на інноваційні цифрові рішення. Тому хоча VR-технології продовжують активно досліджуватись у контексті сучасної цифрової педагогіки й демонструють значний потенціал для візуалізації знань і моделювання освітнього середовища, український контекст визначає їх використання як точкову, експериментальну практику, що потребує додаткової інституційної, методичної й фінансової підтримки для широкомасштабного впровадження.

Завпровадження імерсивних форматів навчання вимагає не лише технічного забезпечення, а й наявності у вчителів відповідного компетентнісного потенціалу, тобто сформованих цифрових, методичних і рефлексивних умінь для ефективного застосування технологій в освітньому процесі. Провідні освітні моделі, зокрема DigCompEdu (Redecker, 2017):

- здатність до добору, адаптації та створення цифрового контенту;
- організація цифрового освітнього середовища;
- активне використання цифрових технологій для взаємодії з учнями, оцінювання та надання зворотного зв'язку;
- розвиток цифрової грамотності в учнів.

Крім технічної обізнаності, педагог має інтегрувати імерсивні технології у педагогічні сценарії – відповідно до мети уроку, вікових особливостей учнів і наявних ресурсів. Йдеться не лише про користування платформами (наприклад, Delightex, ClassVR, Merge EDU), а й про переосмислення власної ролі у цифровому класі: з транслятора знань – на куратора й модератора дослідницької діяльності учнів. Водночас, як свідчать сучасні дослідження (Janssen et al., 2023; OECD, 2022), недостатній рівень цифрової підготовки залишається одним із головних бар'єрів для впровадження інноваційних технологій в освіті. Особливо це стосується педагогів із великим стажем, які мають обмежений досвід роботи в цифровому середовищі. Тому питання цілеспрямованої, багаторівневої підготовки вчителів до імерсивного навчання є стратегічним завданням освітньої політики. Підготовка педагогів до ефективного використання VR/AR має відбуватися в межах цілісних моделей професійного розвитку, які поєднують навчання, практику, рефлексію та підтримку.

Ефективне опанування VR/AR-технологій педагогами є неможливим без їх активного залучення до практичної діяльності, що відповідає принципам концепції «навчання через досвід» (experiential learning). У цьому контексті доцільним є впровадження таких форм професійного розвитку, як інтерактивні тренінги, хакатони, практикоорієнтовані воркшопи з розроблення VR-сценаріїв, а також гейміфіковані курси, що включають елементи доповненої реальності. Залучення педагогів до створення власних дидактичних VR/AR-продуктів сприяє глибшому розумінню методичних можливостей технологій та формує внутрішню мотивацію до їх подальшого використання в освітньому процесі.

Важливим компонентом підтримки професійного зростання є створення умов для горизонтального навчання. Зокрема, йдеться про формування мереж освітніх хабів, онлайн-спільнот і професійних груп, у межах яких педагоги можуть обмінюватися успішними кейсами, сценаріями уроків, дидактичними матеріалами та інструктивними ресурсами щодо використання імерсивних технологій. Упровадження менторських програм, заснованих на принципі взаємопідтримки досвідчених учителів і новачків, дозволяє знижувати тривожність, що виникає у зв'язку з впровадженням технологічних інновацій, а також сприяє побудові стабільних педагогічних спільнот навколо ідеї інноваційної освіти.

Особливого значення набуває інтеграція тематичних модулів, пов'язаних із VR/AR, у програми педагогічної освіти та післядипломної підготовки. Освоєння базових цифрових і методичних компетентностей майбутніми вчителями ще на етапі їх професійного становлення є необхідною умовою для підготовки покоління педагогів, здатного ефективно працювати в умовах цифрової трансформації освіти. Варто зазначити, що в контексті неперервного професійного розвитку доцільним є також використання онлайн-платформ відкритої освіти, таких як Coursera, FutureLearn, EdEra, Prometheus, які пропонують курси, присвячені основам XR, педагогічному дизайну імерсивного контенту, а також інструментам створення VR/AR-середовищ (CoSpaces Edu, Metaverse Studio, Adobe Aero тощо).

Таким чином, ефективна підготовка педагогів до використання VR/AR у змішаному та дистанційному навчанні має базуватися на поєднанні інституційних, практикоорієнтованих та індивідуалізованих форм професійного розвитку, що забезпечує як технологічну, так і педагогічну готовність учителів до впровадження імерсивних підходів у навчальний процес.

У контексті трансформації сучасного уроку та впровадження імерсивних технологій важливо не лише забезпечити педагогів відповідними інструментами й компетентностями, а й переосмислити моделі самого освітнього

процесу. Зміна парадигми, а саме від передачі знань до створення досвіду, вимагає нових форматів взаємодії, де навчання набуває дослідницького, емоційного та контекстуального забарвлення.

Водночас ефективне впровадження імерсивних технологій потребує врахування не лише технологічних можливостей, а й педагогічного дизайну уроку. Зокрема, він має відповідати віковим і когнітивним характеристикам сучасних учнів покоління, орієнтуватися на короткі гнучкі формати, проблемно-орієнтовані завдання, візуально-динамічний контент та інтерактивні практики.

З урахуванням цих вимог у поданій таблиці представлено добірку моделей коротких уроків з використанням доповненої реальності, адаптованих до умов української школи. Моделі структуровано за ключовими параметрами: ціль використання, інструменти, формат реалізації, очікуваний результат, предметна галузь та відповідний віковий рівень. Вони можуть бути інтегровані як у повністю дистанційне, так і в частково офлайн-навчання, надаючи вчителям широкі можливості для осучаснення освітнього процесу.

Таблиця 1 Добірка моделей уроків із використанням інструментів доповненої реальності

	Назва моделі уроку	Інструмент	Предмет	Клас	Ціль	Очікуваний результат
1	Подорож у просторі та часі	Merge EDU, Planets AR	Історія	1–12	Занурення в історичні епохи або астрономічні явища	Учні орієнтуються в часі/просторі, пояснюють явища
2	Хімія в долонях	Merge EDU (Merge Cube), ARSchool, 360ed's Elements AR	Хімія	5–9	Візуалізація процесів або об'єктів	Учні пояснюють полярність і зв'язки в молекулі H ₂ O
3	Поетичний всесвіт	Canva AR, AR Book	Українська література	6–8	Розвиток емоційного мислення та творчого самовираження	Учні створюють AR-ілюстрації, обґрунтовують символіку
4	Топографічний конструктор	3D Geography AR	Географія	7–9	Формування просторового мислення та навичок аналізу	Учні здійснюють аналіз і проектування
5	Космічний гід. Сонячна система у смартфоні	SkyView AR / Star Walk	Астрономія / Природознавство	5–7	Ознайомлення з об'єктами Сонячної системи	Учні ідентифікують планети та їхні характеристики
6	AR-анатомія тварин	AR Book	Біологія	5–9	Формування уявлень про внутрішню будову живих організмів	Учні створюють інтерактивні зображення та пояснюють функції органів
7	Еко-дослідження. Розпізнавання рослин через AR	PlantSnap AR	Біологія / Екологія	6–8	Розвиток навичок екологічного мислення	Учні документують та презентують знайдені види рослин
8	Анатомія в 3D	BioDigital Human	Біологія	8–11	Поглиблене вивчення будови органів	Учні демонструють знання анатомічних структур
9	Математичні об'єми. Геометрія в просторі	GeoGebra 3D, AR Makr, Geometria RA	Математика	7–10	Візуалізація тривимірних фігур і обчислень	Учні будують та аналізують 3D-фігури
10	AR-моделювання	Tinkercad	Інформатика, Технології	1–11	Засвоєння наукових понять через моделювання	Учні моделюють і прогнозують результати

Джерело: складено авторами

Імерсивні компоненти у представлених моделях виступають не як самодостатній візуальний матеріал, а як засіб занурення в навчальну ситуацію, що вимагає рефлексії, аналізу, дослідницьких дій і взаємодії. Це дозволяє переосмислити структуру шкільного уроку як модульного конструкта, в якому інструменти забезпечують як етапи мотивації й актуалізації, так і занурення у проблемне середовище або рефлексивне осмислення на фінальних етапах.

Таким чином, запропоновані моделі не лише демонструють можливість інтеграції імерсивних технологій у навчальний процес, а й формують основу для розробки інноваційного педагогічного дизайну коротких змішаних уроків, орієнтованих на активну взаємодію, цифрову грамотність та розвиток вищих когнітивних навичок.

Одним із актуальних викликів при впровадженні AR/VR/360°-технологій у навчання є обмеження безкоштовного функціоналу освітніх платформ. Більшість ресурсів на кшталт пропонують базовий доступ безкоштовно, але розширені можливості (створення власного контенту, використання всіх шаблонів, аналітика, кількість учнівських проєктів тощо) доступні лише у платних тарифах. Це ускладнює масштабне використання сервісів у масовій шкільній практиці. Ще одним викликом є відсутність україномовного інтерфейсу в багатьох популярних платформах. Деякі орієнтовані переважно на англомовну аудиторію, що створює додаткові труднощі для учнів молодшого шкільного віку та педагогів, які не володіють

англійською на достатньому рівні. У цьому контексті одним із практичних рішень є використання вбудованих або сторонніх перекладачів, таких як:

- Google Translate у режимі миттєвого перекладу сторінок;
- розширення браузерів із функцією автоперекладу;
- копіювання інтерфейсних елементів у словник чи перекладач.

Це дозволяє адаптувати інтерфейс під українськомовну аудиторію та розширити коло педагогів, які можуть інтегрувати ці інструменти в освітній процес.

Також виникає необхідність забезпечення педагогів зручними та достовірними інструментами для добору цифрових ресурсів. Відповіддю на цей запит став електронний Каталог імерсивних сервісів (<https://www.immersive-tools.pp.ua/>). Каталог є спеціалізованим інструментом, призначеним для систематизації та оперативного доступу до актуальних VR/AR-платформ, що можуть бути інтегровані в освітній процес на різних рівнях шкільної освіти.

У структурі Каталогу передбачено зручну систему фільтрації, яка дозволяє здійснювати вибір інструментів за низкою релевантних критеріїв, зокрема:

- освітнім рівнем (від 1 до 12 класу);
- предметною галуззю (природничі науки, мистецтво, математика, географія, історія тощо);
- мовою інтерфейсу (українська, англійська, багатомовна підтримка);
- типом доступу (безкоштовний, умовно безкоштовний, платний);
- іншими важливими параметрами, такими як технічні вимоги, можливість мобільного доступу, наявність інтеграції з платформами управління навчанням (LMS).

Цей Каталог орієнтований на широкий спектр користувачів: від учителів закладів загальної середньої освіти до викладачів закладів вищої педагогічної освіти, методистів і розробників змісту цифрового навчання. Завдяки постійному оновленню, інструмент відповідає сучасним тенденціям розвитку освітніх технологій та дозволяє педагогам здійснювати обґрунтований вибір AR/VR-сервісів відповідно до освітніх цілей, вікових особливостей учнів і педагогічного дизайну уроку.

Використання Каталогу особливо доцільне у процесі підготовки до інтерактивного уроку, організації елементів змішаного або дистанційного навчання, а також під час розробки авторських сценаріїв, спрямованих на створення імерсивного навчального середовища.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати дослідження засвідчують доцільність інтеграції платформ синхронної взаємодії з імерсивними технологіями, насамперед доповненою реальністю, у структуру уроків у змішаному та дистанційному форматах. Таке поєднання дозволяє створити більш динамічне, візуально та емоційно насичене освітнє середовище, що відповідає когнітивним потребам покоління Зумерів та Альфа. Встановлено, що застосування AR-технологій позитивно впливає на залученість учнів, розвиток їх критичного мислення, дослідницьких умінь і цифрової грамотності.

Запропоновані моделі уроків із використанням AR, адаптовані до умов української освіти, що враховує обмеження часу, технічні можливості та вікові особливості учнів. Вони можуть бути використані як в дистанційному, так і в офлайн-режимі, забезпечуючи гнучкість і персоналізацію навчального процесу. Крім того, зазначений електронний Каталог імерсивних сервісів виступає інструментом підтримки педагогів у доборі якісного VR/AR-контенту.

Незважаючи на високий потенціал імерсивних технологій, на заваді їх широкому впровадженню залишаються системні бар'єри: недостатній рівень цифрової компетентності педагогів, відсутність нормативно-методичного супроводу, обмеженість технічної інфраструктури шкіл та недостатня підтримка з боку освітніх інституцій.

На основі результатів проведеного дослідження визначено низку перспективних напрямів, що потребують подальшого наукового осмислення та прикладного розвитку у сфері цифрової трансформації освіти:

- Створення педагогічних шаблонів і кейсів, адаптованих до різних вікових категорій учнів, предметних галузей (STEM, мистецтво, гуманітарні науки тощо) та освітніх цілей. Такі сценарії мають відповідати принципам *microlearning* і містити інструктивно-методичну підтримку для вчителів.
- Моделювання ефективної системи професійного розвитку педагогів у сфері імерсивної освіти. Доцільно дослідити ефективність таких форм, як змішані курси підвищення кваліфікації, гейміфіковані воркшопи, інтерактивні тренінги та хакатони з розроблення AR/VR-сценаріїв. Особливу увагу слід приділити темам інтеграції імерсивних технологій у платформу Zoom/Meet/Teams.
- Проведення педагогічного експерименту щодо оцінювання впливу імерсивних технологій на мотивацію, когнітивні результати та розвиток цифрових компетентностей учнів. Необхідно створити систему критеріїв, показників і інструментів діагностики ефективності уроків із VR/AR-компонентами.
- Інтернаціоналізація досвіду впровадження VR/AR у шкільну освіту. Доцільно налагоджувати співпрацю з європейськими освітніми проектами (наприклад, Erasmus+, Horizon Europe) для обміну педагогічними практиками, залучення зовнішніх експертів та спільної апробації освітніх моделей із використанням імерсивних технологій.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автор підтверджує відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана у рамках НДР Інституту цифровізації освіти НАПН України «Система використання імерсивних технологій вчителями у процесі змішаного навчання в закладах загальної середньої освіти» (ДР № 0124U000648, 2024–2025 рр.).

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гайтан, О. М. (2022). Порівняльний аналіз можливостей використання інструментарію вебінарорієнтованих платформ Zoom, Google Meet та Microsoft Teams в онлайн-навчанні. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 87(1), 33–67. <https://doi.org/10.33407/itlt.v87i1.4441>
2. Литвинова, С. Г., Носенко, Ю. Г., Рашевська, Н. В., Слободяник, О. В., Соколюк, О. М., Сороко, Н. В., & Сухих, А. С. (2024). *Використання імерсивних технологій вчителями у процесі змішаного навчання в закладах загальної середньої освіти*: Методичні рекомендації. ІЦО НАПН України. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/743977/1/>
3. Bozkurt, A., Jung, I., Xiao, J., Vladimirsch, V., Schuwer, R., Egorov, G., ... & Paskevicius, M. (2020). A global outlook to the interruption of education due to COVID-19 pandemic: Navigating in a time of uncertainty and crisis. *Asian Journal of Distance Education*, 15(1), 1–126. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3878572>
4. Janssen, N., Walraven, A., Lazonder, A. W., & Gijlers, H. (2023). Modelling as expert-guidance during teacher practitioner research. *European Journal of Teacher Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/02619768.2023.2282370>
5. Kavanagh, S., Luxton-Reilly, A., Wuensche, B., & Plimmer, B. (2017). Creating affordable and effective virtual reality learning environments: Challenges and solutions. Proceedings of the 29th Australasian Computer Science Week International Conference (ACSW '17), 1–9. <https://doi.org/10.1145/3014812.3014875>
6. McCrindle, M. & Fell, A. (2021). *Generation Alpha: Understanding Our Children and Helping Them Thrive*. Hachette
7. OECD. (2022). *Education for a digital world: Building capacity and infrastructure*. OECD Publishing. URL: <https://www.oecd.org/education/education-for-a-digital-world-b6327e6c-en.htm>
8. Redecker, C. (2017). *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*. Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/159770>
9. Twenge, J. M. (2017). *iGen: Why today's super-connected kids are growing up less rebellious, more tolerant, less happy—and completely unprepared for adulthood and what that means for the rest of us*. Atria Books. <https://doi.org/10.1111/fcsr.12345>
10. Van Nuland, S., Mandzuk, D., Tucker Petrick, K., & Cooper, T. (2020). COVID-19 and its effects on teacher education in Ontario: A complex adaptive systems perspective. *Journal of Education for Teaching*, 46(4), 442–451. <https://doi.org/10.1080/02607476.2020.1803050>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Gaitan, O. M. (2022). *Porizhnyal'nyy analiz mozhlyvostey vykorystannya instrumentariyu webinar-oriyentovanykh platform Zoom, Google Meet ta Microsoft Teams v onlayn-navchanni* [Comparative analysis of the possibilities of using the tools of webinar-oriented platforms Zoom, Google Meet and Microsoft Teams in online learning]. *Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia – Information Technologies and Learning Tools*, 87(1), 33–67. <https://doi.org/10.33407/itlt.v87i1.4441> (in Ukrainian)
2. Lytvynova, S. H., Nosenko, Y. H., Rashevskaya, N. V., Slobodyanyk, O. V., Sokoljuk, O. M., Soroko, N. V., & Sukhikh, A. S. (2024). *Vykorystannya imersyivnykh tekhnolohiy vchytelyamy u protsesi zmishanoho navchannya v zakladakh zahal'noyi seređnoyi osvity: Metodichni rekomendatsiyi* [The use of immersive technologies by teachers in blended learning in general secondary education institutions: Methodical recommendations]. Kyiv: ITSО NAPN Ukrainy. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/743977/1/> (in Ukrainian)
3. Bozkurt, A., Jung, I., Xiao, J., Vladimirsch, V., Schuwer, R., Egorov, G., ... & Paskevicius, M. (2020). A global outlook to the interruption of education due to COVID-19 pandemic: Navigating in a time of uncertainty and crisis. *Asian Journal of Distance Education*, 15(1), 1–126. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3878572>
4. Janssen, N., Walraven, A., Lazonder, A. W., & Gijlers, H. (2023). Modelling as expert-guidance during teacher practitioner research. *European Journal of Teacher Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/02619768.2023.2282370>
5. Kavanagh, S., Luxton-Reilly, A., Wuensche, B., & Plimmer, B. (2017). Creating affordable and effective virtual reality learning environments: Challenges and solutions. Proceedings of the 29th Australasian Computer Science Week International Conference (ACSW '17), 1–9. <https://doi.org/10.1145/3014812.3014875>
6. McCrindle, M. & Fell, A. (2021). *Generation Alpha: Understanding Our Children and Helping Them Thrive*. Hachette
7. OECD. (2022). *Education for a digital world: Building capacity and infrastructure*. OECD Publishing. URL: <https://www.oecd.org/education/education-for-a-digital-world-b6327e6c-en.htm>
8. Redecker, C. (2017). *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*. Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/159770>
9. Twenge, J. M. (2017). *iGen: Why today's super-connected kids are growing up less rebellious, more tolerant, less happy—and completely unprepared for adulthood and what that means for the rest of us*. Atria Books. <https://doi.org/10.1111/fcsr.12345>
10. Van Nuland, S., Mandzuk, D., Tucker Petrick, K., & Cooper, T. (2020). COVID-19 and its effects on teacher education in Ontario: A complex adaptive systems perspective. *Journal of Education for Teaching*, 46(4), 442–451. <https://doi.org/10.1080/02607476.2020.1803050>

| Матеріал надійшов до редакції: 10.06.2025 р. | Прийнято до друку: 30.07.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ОРГАНІЗАЦІЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНСЬКІЙ ПРОФІЛЬНІЙ СТАРШІЙ ШКОЛИ

Юлія ТИХОНЕНКО ✉

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
yu.v.tykhonenko@npu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7003-6266>

Олександр ШКОЛЬНИЙ

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

ORGANIZATION OF REPETITION AND SYSTEMATIZATION OF THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE IN A UKRAINIAN UPPER SECONDARY PROFILE SCHOOL

Yuliia TYKHONENKO ✉

Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
yu.v.tykhonenko@npu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7003-6266>

Oleksandr SHKOLNYI

Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У статті порушено проблему невідповідності між наявними державними щодо підсумкового повторення і систематизації шкільного курсу математики в умовах компетентнісного підходу з одного боку та його практичною реалізацією за чинними програмами та підручниками для старших класів з іншого. З урахуванням когнітивних теорій розвитку пам'яті та викликів під час підсумкового тестування старшокласників з математики, обґрунтовано актуальність дослідження ефективних підходів до повторення навчального матеріалу, які б сприяли зниженню навчальних втрат і належному формуванню математичної компетентності та інших компетентностей згідно з концепцією Нової української школи (НУШ).

Матеріали і методи. Було використано теоретичний аналіз методичної літератури, порівняльний аналіз, систематизацію та узагальнення наявних теоретичних досліджень з тематики статті, а також педагогічне спостереження та узагальнення власного педагогічного досвіду щодо повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Результати. У результаті аналізу чинних підручників та збірників для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) у формі національного мультипредметного тесту (НМТ) з математики виявлено різноманіття підходів до реалізації поточного й підсумкового повторення. З'ясовано, що підручники відрізняються за наявністю, структурою та змістовим наповненням рубрик для повторення, а теоретичні матеріали для систематизації знань практично відсутні. Навчальні посібники, зокрема, комплексні видання для підготовки до ЗНО (НМТ), частково компенсують ці прогалини, проте не забезпечують достатньої диференціації й потребують активної участі вчителя у процесі добору матеріалу для забезпечення належної якості підсумкового повторення.

Висновки. Встановлено, що наявні підручники та посібники з математики лише частково забезпечують умови для якісного підсумкового повторення, не охоплюючи потреб диференціації та зворотного зв'язку. Ефективність цього етапу навчання значною мірою залежить від професійної майстерності вчителя та здатності

ABSTRACT

Formulation of the problem. The article raises the problem of inconsistency between the existing state regulations on the final repetition and systematization of the school mathematics course in the context of a competency-based approach on the one hand and its practical implementation according to the current programs and textbooks for senior grades on the other. Taking into account cognitive theories of memory development and challenges during the final testing of senior students in mathematics, the relevance of researching effective approaches to the repetition of educational material, which would contribute to the reduction of educational losses and the proper formation of mathematical competence and other competencies in accordance with the concept of the New Ukrainian School (NUS), is substantiated.

Materials and methods. Theoretical analysis of methodological literature, comparative analysis, systematization, and generalization of existing theoretical research on the topic of the article, as well as pedagogical observation and generalization of one's own pedagogical experience in repeating and systematizing the school mathematics course, were used.

Results. As a result of the analysis of current textbooks and collections for preparation for external independent assessment (EIA) in the form of a national multi-subject test (NMT) in mathematics, a variety of approaches to the implementation of current and final repetition were revealed. It was found that textbooks differ in the presence, structure, and content of review rubrics, and theoretical materials for systematizing knowledge are practically absent. Textbooks, in particular, comprehensive publications for preparation for EIA (NMT), partially compensate for these gaps, but do not provide sufficient differentiation and require the active participation of the teacher in the process of selecting material to ensure the proper quality of final repetition.

Conclusions. It has been established that the existing textbooks and manuals on mathematics only partially provide the conditions for high-quality summative repetition, not covering the need for differentiation and feedback. The effectiveness of this stage of learning largely depends on the professional skills of the teacher and the ability to combine different sources and approaches. The development of adaptive repetition technologies using digital tools has been identified as a promising direction.

поєднувати різні джерела й підходи. Перспективним напрямом визначено розробку адаптивних технологій повторення з використанням цифрових засобів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Нова українська школа; повторення та систематизація; шкільний курс математики; підручник з математики; державна підсумкова атестація; зовнішнє незалежне оцінювання; національний мультипредметний тест.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Tykhonenko Yu., Shkolnyi O. Organization of repetition and systematization of the school mathematics course in a Ukrainian upper secondary profile school. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 52-58. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-08>.

KEYWORDS: New Ukrainian School; repetition and systematization; school mathematics course; mathematics textbooks; state final attestation; external independent assessment; national multi-subject test.

FOR CITATION: Tykhonenko, Yu., & Shkolnyi, O. (2025). Organization of repetition and systematization of the school mathematics course in a Ukrainian upper secondary profile school. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 52-58. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-08>.

INTRODUCTION

The problem statement. Learning mathematics is a complex cognitive process, among the key functions of which is memory, which ensures the accumulation, preservation, and reproduction of educational information. In the process of learning, different types of memory are actualized: sensory, short-term (working), and long-term, the interaction of which ensures the formation of stable knowledge and skills (Baddeley, 2000). Accordingly, effective learning is not only about how to learn but also about how to promote the consolidation of knowledge and minimize the process of forgetting and loss of skills and abilities.

One of the central theories explaining the phenomenon of the decrease in the volume of learned material over time is the forgetting curve proposed by G. Ebbinghaus (Ebbinghaus, 1885). According to these studies, a significant part of the information is lost within a few hours of learning if strategies for its consolidation are not used. From the point of view of cognitive psychology, repetition is considered a key mechanism for consolidating information in long-term memory. At the same time, the effectiveness of repetition increases significantly when using distributed (interval) repetition (Cepeda et al., 2006; Kang, 2016), which allows for strengthening memory traces and preventing rapid forgetting. In addition, the systematization of knowledge contributes to the formation of cognitive schemes that provide a deeper understanding of inter-subject relationships and simplify the reproduction of information (Sweller et al., 2011). In the context of mathematics education, systematic generalization of material allows students to form stable neural connections and increases the level of mathematical competence. In turn, the competency-based approach is a cross-cutting line of the key reform of the Ministry of Education and Science of Ukraine - the New Ukrainian School (NUS). According to the NUS concept, competence is a dynamic combination of knowledge, skills, abilities, ways of thinking, attitudes, values, and other personal qualities that determine a person's ability to successfully socialize, engage in professional and/or further educational activities (Verkhovna Rada of Ukraine, 2017).

Mathematics occupies a significant place in the main regulatory documents on education (Verkhovna Rada of Ukraine, 2017; Cabinet of Ministers of Ukraine, 2020; Cabinet of Ministers of Ukraine, 2024), in particular, mathematics is a mandatory subject of external independent assessment (EIA) in the form of a national multi-subject test (NMT), the results of which are used for competitive selection to higher education institutions. This confirms the importance of forming the mathematical competence of school graduates as a necessary component of the formation of further professional skills. In this context, an important stage of the comprehensive study of mathematics is the repetition and systematization of both individual sections and the entire school course, since topics are included in the EIA (NMT) program in mathematics starting from the fifth grade (MES of Ukraine, 2019). However, the method of implementing the final repetition of the school mathematics course is not strictly regulated by state regulatory documents and therefore is carried out mainly at the discretion of the teacher within the limits of his professional competence in accordance with the content of the educational program, taking into account the EIA program in mathematics.

However, preparation for testing is not the responsibility of general secondary education institutions (GSEI). Therefore, it is quite difficult to determine whether the systematization and repetition of the mathematics course in GSEI is effectively implemented, because even the EIA (NMT) indicators in mathematics are often not only the result of students' educational activities within the school but also self-education, preparation with a tutor, or on courses, etc.

The development of the practice of preparing for the EIA (NMT) with a tutor or in courses may indicate both a high awareness of graduates and their parents about the importance of mathematical knowledge and skills, and an insufficient level of implementation of the final review in the secondary education system. The second option may be due, in particular, to the lack of time for implementing the final review during the educational process. The current mathematics curriculum for students in grades 10-11 does not provide for a separate time allocated for the final review, and its regulation can be carried out, for example, at the expense of part of the reserved time (MES of Ukraine, 2017).

Thus, we see a discrepancy between the state's request for systematized knowledge and skills (competencies) of graduates for the school mathematics course and the definition of the place of final repetition and means of its implementation in regulatory documents. Therefore, there is a need to study and compare existing approaches to the repetition and systematization of the school mathematics course, which can be implemented in the GSEI, as well as to identify the possibility of their combination, improvement, and development.

The analysis of current research. Repetition and systematization are important components of teaching mathematics as part of the educational process. In accordance with the Law of Ukraine "On Education" and the provisions of the concept of the New Ukrainian School, the educational process in the field of complete general secondary education is organized on the basis of a competency-based approach (Verkhovna Rada of Ukraine, 2017; MES of Ukraine, 2016). Even before the official introduction of the competency-based paradigm into Ukrainian education (NUS), this approach was highlighted in the works of S. A. Rakov, according to which: "Mathematical competence is not just mastering the content of the academic discipline, but the readiness

to apply the acquired knowledge and skills in various areas of activity, which requires the integration of subject, operational and reflective components" (Rakov, 2005).

To analyze the components of the educational and training process, in particular repetition and systematization in teaching mathematics, it would be appropriate to refer to the Standards of Education and Model Programs of the National State Educational Service. However, although the State Standard of Specialized Secondary Education has been adopted, which regulates the educational process in senior grades, it will come into effect only in September 2027. Therefore, currently, senior students study according to the State Standard of Basic and Complete General Secondary Education, approved in 2011 (Cabinet of Ministers of Ukraine, 2011), and the corresponding educational programs.

Approaches to systematizing knowledge in mathematics and implementing final revision can be traced to the location of relevant materials in mathematics textbooks for senior grades and in collections for preparing for the EIA in mathematics, the analysis of which is given in the main part of this work. The need to analyze these tools, find new approaches, or adjust existing ones is dictated by the results of the mathematics tests at the EIA in 2023 and 2024. The official report on the EIA in 2023 notes that the statistical indicators of the EIA tasks have deteriorated compared to the corresponding indicators of the EIA tasks of previous years, in particular, in tasks on the properties of functions, financial literacy, and stereometry (UCEQA, 2023). Also, in the mathematics test, tasks to check the level of formation of basic skills and abilities and their application in standard situations make up about 60% of the total number of tasks and, according to the results of the test in 2024, cause difficulties for test participants. A low level of development of skills and abilities was demonstrated by participants from the content line "Functions", theoretical tasks on planimetry also turned out to be difficult (UCEQA, 2024).

The purposes of the article are to compare approaches to the revision and systematization of the school mathematics course reflected in current textbooks and collections for preparation for the EIA (NMT) and, based on this comparison, to suggest ways to improve them.

METHODS OF THE RESEARCH

To achieve the goals of the study, we use a theoretical analysis of methodological literature related to the chosen topic, in particular, current programs and textbooks on mathematics for senior grades. We also apply empirical methods: observation of the educational process in GSEI and analysis of the achievements of students in mathematics in these institutions. In this article, we operate with different methods of scientific knowledge: comparative analysis to clarify different points of view on the problem; systematization and generalization to formulate conclusions and recommendations for organizing the repetition and systematization of the school mathematics course; we also summarize our own pedagogical experience and observations of other specialists on the process of teaching mathematics in Ukrainian schools.

RESULTS OF RESEARCH

In the mathematics educational program for students in grades 10-11, the repetition and systematization of knowledge and skills take a different place depending on the level at which students study this subject. The topic of generalization and systematization is separately presented only for the profile level in the course of algebra and the beginnings of analysis, and concerns the content line "Equations, inequalities and their systems". For the remaining topics in profile classes and classes of the standard level, repetition and systematization are not highlighted, but can be implemented at the expense of part of the reserve time, the approximate distribution of which is given in Table 1.

The proportion of reserved time for repeating and systematizing knowledge and skills in mathematics for a high school course depends on the characteristics of the cognitive abilities of students in a particular class or group, the organization of the educational process, educational losses and gaps, opportunities, and methods for overcoming them.

Table 1. Time to review and systematize the knowledge of mathematics in upper secondary school

		Algebra	Geometry
10th grade	Standard level	Reserve: 7 hours	Reserve: 7 hours
	Profile level (in-depth study from grade 8)	Reserve: 22 hours	Reserve: 18 hours
	Profile level	Reserve: 24 hours	Reserve: 18 hours
11th grade	Standard level	Reserve: 18 hours	Reserve: 14 hours
	Profile level (in-depth study from grade 8)	Reserve: 74 hours	Reserve: 28 hours
	Profile level	Reserve: 80 hours +30 hours on the topic: "Equations, inequalities and their systems. Generalization and systematization."	Reserve: 28 hours

Source: Own work.

Considering the means of repetition and systematization, we will divide them into organizational and content. Organizational means of repetition include diagnostic work, online testing, including in a game format, mathematical dictations, frontal questioning, and collective or independent problem-solving. In this article, we will focus on content means of repetition, which include textbooks, collections of tasks from educational and methodological sets for studying mathematics (algebra, algebra and the beginnings of analysis, geometry), collections of tasks for the state final attestation (SFA) in mathematics, manuals

for preparing for the EIA examination (NMT) in mathematics, tasks for the external examination options in mathematics, author's developments of complex or thematic tests in the format of the external examination in mathematics, educational videos, summaries, flowcharts and other reference materials.

The main means of learning in secondary education institutions remains the textbook, and therefore it is logical to first investigate the approaches to revision proposed by the authors of current mathematics textbooks (algebra and principles of analysis, geometry) for grades 10 and 11.

Having analyzed the textbooks on mathematics (standard level), algebra and beginnings of analysis, geometry (profile level) for grades 10 and 11, we identified the following variants of review rubrics: tasks for preparing to study a new topic, questions for self-control at the end of a paragraph or point on studying a new topic; tasks for reviewing previously studied topics; test tasks at the end of studying a section; tasks for reviewing the course of algebra and beginnings of analysis and the course of geometry for grade 10 or the entire course of mathematics for grade 11. Table 2 provides information on the corresponding rubrics in mathematics textbooks (standard level) by various authors.

Table 2. Repetition in mathematics textbooks for grades 10 and 11 (standard level)

Textbook author(s)	G. Bevs, V. Bevs		M. Burda, T. Kolesnyk, Yu. Maliovaniy, N. Tarasenkova	O. Ister		A. Merzliak, D. Nomirovskiy, V. Polonskiy, M. Yakir		Ye. Nelin	
	10	11	10	10	11	10	11	10	11
Tasks to prepare for studying a new topic	–	–	–	+	+	+	+	–	–
Questions for self-control	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Review previously studied topics tasks	+	+	–	–	–	+	+	–	–
Generalization of the theory to the section	+	+	–	–	–	+	+	+	+
Final test for the section	+	+	+	–	+	–	+	–	+
Final review at the end of the year	–	+	+	+	–	+	+	–	–

Source: Own work.

We can notice a different approach to both the current and the final repetition. In particular, some authors use repetition tasks to update knowledge before studying a new topic, some put tasks for repeating previously studied topics in a separate rubric, in the textbooks of the author team A. Merzliak, D. Nomirovskiy, V. Polonskiy, M. Yakir, both types of task selections are combined, and in the textbook of Ye. Nelin, there is none of them. As for the final repetition of the school mathematics course, it is natural that it can be carried out upon completion of the study of all topics, that is, at the end of grade 11, and we can observe the corresponding rubric for repetition in the textbooks of G. Bevs, V. Bevs, A. Merzliak, D. Nomirovskiy, V. Polonskiy, and M. Yakir. So, working with these textbooks, the teacher has the opportunity to use tasks from them and supplement or replace them with other means. When working with a textbook by O. Ister or Ye. Nelin, when planning a final review, the teacher only needs to use other teaching aids.

The tasks for the final review in both textbooks are presented in the form of open tasks. At the same time, the textbooks differ in the thematic distribution and quantitative composition of the proposed exercises. The topics listed for review in the textbook by G. Bevs, V. Bevs: "Numerical expressions and functions, equations and inequalities" (88 tasks), "Lines and planes in space" (13 tasks), "Derivative and integral" (27 tasks), "Geometric solids" (23 tasks), "Problems for the clever" (13 tasks) (Bevs & Bevs, 2019). In the textbook by A. Merzliak, D. Nomirovskiy, V. Polonskiy, and M. Yakir's review tasks are divided into two sections: problems for reviewing the algebra course (17 topics, a total of 207 tasks) and problems for reviewing the geometry course (9 topics, a total of 145 tasks) (Merzliak, Nomirovskiy, Polonskiy & Yakir, 2019).

Theoretical material for systematizing knowledge by topics or content lines is not provided in any of the textbooks, so the selection and design of appropriate materials for use in lessons is left to the teacher. One of the sources of concise, structured theoretical information can be collections for preparing for the EIA (NMT) in mathematics. They can also be used to select tasks for repetition. So let's consider the approaches to implementing repetition and systematization proposed in such collections.

According to the didactic purpose, the collections can be aimed at the thematic repetition of the school mathematics course ((Zakhariichenko et.al., 2022), (Halperina et.al, 2022), (Zakhariichenko et. Al, 2021), (Ister, 2021), (Kozyra, 2023), (Kapinosov, 2023), (Klochko, 2023), (Zabelyshynska et.al., 2024)) or at practical development of skills and abilities on complex tests ((Zakhariichenko et.al, 2024), (Halperina, 2024), (Martyniuk, 2024), (Ister, 2024)).

Collections for thematic repetition of each author or group of authors have a fairly stable structure from year to year and differ in minor corrections or adjustments. Let us consider the features of the collections offered by publishing houses during the years of conducting the external examination in mathematics in the NMT format. In particular, let us pay attention to the methodological approach to the order of presentation of topics, the ratio of consideration of algebra and geometry (sequentially or in parallel), the use of open-form tasks for learning and training or various tasks in the EIA (NMT) format, the use of different types of EIA (NMT) tasks in mathematics and the compliance of their form with modern requirements for these tasks, the

presentation of theoretical material, examples of solutions and similar tasks for independent practice. The relevant information on some collections is given in Table 3.

Table 3. Comparison of collections for preparing for the EIA (NMT) in mathematics

	1	2	3	4	5	6	7	8
Open-ended training exercises	+	+	–	+	+	+	+	+
Closed-form training exercises	–	–	+	+	+	+	+	–
Thematic tests in the external evaluation format	+	–	–	+	+	+	+	–
Brief background material	+	+	near tasks	–	+	–	in geometry	–
Detailed summary of the theory	–	+	–	+	+	+	+	+
Availability of examples of solving problems	–	+	+	+	+	+	+	+
Similar options	+	–	+	+	–	–	+	–
Alternating algebra and geometry topics	Sequentially	Sequentially	Sequentially	Sequentially	Sequentially	Sequentially	In parallel	Sequentially
Comprehensive tests in the external evaluation format	+	+	–	+	+	+	–	On the website

1) Zakhariichenko, Shkolnyi, Zakhariichenko & Shkolna, 2022, 2) Halperina, Zabelyshynska, Y. Zakhariichenko, Karpik & Shkolnyi, 2022, 3) Y. Zakhariichenko, Repeta, Markova & Karpik, 2022, 4) Ister, 2021, 5) Kozyra, 2023, 6) Kapinosov, 2023, 7) Klochko, 2023, 8) Zabelyshynska, Zakhariichenko & Karpik, 2024

Source: Own work.

So, as we can see from the table, in most collections, the topics of algebra and geometry are presented sequentially, and at the end, there are tasks in the format of an EIA, or there is a call to take such a test on the publisher's website. Some authors choose the approach of training on open tasks, trying to avoid replacing learning with guessing answers, and some adhere to the strategy of training specifically on tasks in the format of an external examination. Most collections contain a detailed presentation of the theory, and some of them are convenient short reference materials. Most manuals also provide examples of solving tasks, although such examples for the student can also be options solved together with the teacher from those collections that contain similar options for tasks.

In our opinion, none of the manuals provides fully differentiated independent training for students of different levels of knowledge and skills in mathematics, which is why the materials considered can become an effective tool for repetition and systematization only under the teacher's control or at least with his consultation. Thus, at the stage of repetition and systematization of knowledge and skills in mathematics, the main role of the teacher is to qualitatively diagnose the student's knowledge and effectively select the means of learning and repetition offered on the educational market, the number of which is only increasing every year.

CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES FOR FURTHER RESEARCH

As a result of the analysis of mathematics textbooks (standard level) for 11 grades on the subject of the approach to implementing final repetition, it was found that tasks for this type of repetition are available in the textbook by G. Bezv, V. Bezv (covering some topics of the school mathematics course) and A. Merzliak, D. Nomirovskyi, V. Polonskyi, M. Yakir (covering all topics of the school mathematics course of the standard level, the sequence of topics mostly coincides with the sequence of their study). In the case of working with another textbook or if it is necessary to diversify the forms of tasks or differentiate tasks by complexity, the teacher can choose, in particular, collections for preparing for the EIA (NMT) in mathematics to implement final repetition. Such collections by different authors differ in the sequence of presentation of topics, the forms of tasks, the presence of examples and similar options, and level differentiation, and they are also designed for students with different previous mathematical training. However, no collection fully meets all the needs for high-quality systematization of students' knowledge, not least because it does not provide feedback.

Therefore, an essential component for ensuring the proper quality of repetition and systematization of the school mathematics course is the pedagogical skill of the mathematics teacher and his ability to combine different approaches to repetition and systematization, taking into account the characteristics of the class. Indeed, no single textbook or teaching aid can provide both the preparation of students for the EIA (NMT) in mathematics and the final synthetic formation of their mathematical competence and other key competencies provided for by the NUS concept. Also, one of the problems of proper organization of systematization and repetition of the school mathematics course is the difficulty of ensuring an individual

approach for students of different levels of educational achievements in the short term that can be allocated for the implementation of this repetition.

Therefore, we propose to use a combined approach for final revision, which consists in using the resources of the textbook, study guides, and materials for preparing for the EIA (NMT) in mathematics, using the advantages of each of these guides described above in accordance with the capabilities of the class or individual student. We also see prospects in developing an adaptive approach for the revision and systematization of the school mathematics course, in particular, using digital technologies. Our further research will be devoted to this topic.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Baddeley, A. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, 4(11), 417–423.
2. Bezv, H. P., & Bezv, V. H. (2018). *Matematyka: Algebra i pochatky analizu ta heometriia. Riven standartu: Pidruchnyk dlia 10 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics: Algebra and the fundamentals of analysis and geometry. Standard level: Textbook for grade 10 of general secondary education institutions]. Kyiv: Osvita. (in Ukrainian).
3. Bezv, H. P., & Bezv, V. H. (2019). *Matematyka: Algebra i pochatky analizu ta heometriia. Riven standartu: Pidruchnyk dlia 11 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics: Algebra and the fundamentals of analysis and geometry. Standard level: Textbook for grade 11 of general secondary education institutions]. Kyiv: Osvita. (in Ukrainian).
4. Burda, M. I., Kolesnyk, T. V., Malovanyi, Yu. I., & Tarasenkova, N. A. (2018). *Matematyka (algebra i pochatky analizu ta heometriia, riven standartu): Pidruchnyk dlia 10 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics (algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level): Textbook for grade 10 of general secondary education institutions]. Kyiv: Orion. (in Ukrainian).
5. Cabinet of Ministers of Ukraine. (2011). *Pro zatverdzhennia Derzhavnogo standartu bazovoi i povnoi zahalnoi serednoi osvity: Postanova vid 23.11.2011 No. 1392* [On approval of the State Standard of Basic and Complete General Secondary Education: Resolution of November 23, 2011 No. 1392]. Official Portal of the Verkhovna Rada of Ukraine. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-n#Text> (in Ukrainian).
6. Cabinet of Ministers of Ukraine. (2020). *Postanova No. 898 vid 30 veresnia 2020 r. "Pro deiaki pytannia derzhavnykh standartiv povnoi zahalnoi serednoi osvity"* [Resolution No. 898 of September 30, 2020 "On certain issues of state standards of complete general secondary education"]. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898> (in Ukrainian).
7. Cabinet of Ministers of Ukraine. (2024). *Postanova No. 851 vid 23 serpnia 2024 r. "Pro zatverdzhennia Derzhavnogo standartu profilnoi serednoi osvity"* [Resolution No. 851 of August 23, 2024 "On approval of the State Standard of Specialized Secondary Education"]. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-n#Text> (in Ukrainian).
8. Cepeda, N. J., Pashler, H., Vul, E., Wixted, J. T., & Rohrer, D. (2006). Distributed practice in verbal recall tasks: A review and quantitative synthesis. *Psychological Bulletin*, 132(3), 354–380.
9. Ebbinghaus, H. (1885). *Über das Gedächtnis* [On Memory]. Leipzig: Duncker & Humblot.
10. Halperina, A. R. (2024). *NMT 2025. Matematika: Typovi testovi zavdannia* [NMT 2025. Mathematics: Typical test tasks]. Kyiv: Litera LTD. (in Ukrainian).
11. Halperina, A. R., Zabelyshevska, M. Ya., Zakhariichenko, Yu. O., Karpik, V. V., & Shkolnyi, O. V. (2022). *Matematyka. Kompleksne vydannia (dovidnyk z matematyky z trenuvialnymy vpravamy za 5–11 klasy. Testy.) (17-te vyd.)* [Mathematics. Comprehensive edition (a mathematics handbook with practice exercises for grades 5–11. Tests.) (17th ed.)]. Kyiv: Litera LTD. (in Ukrainian).
12. Ister, O. S. (2018). *Matematyka (algebra i pochatky analizu ta heometriia, riven standartu): Pidruchnyk dlia 10 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics (algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level): Textbook for grade 10 of general secondary education institutions]. Kyiv: Geneza. (in Ukrainian).
13. Ister, O. S. (2019). *Matematyka (algebra i pochatky analizu ta heometriia, riven standartu): Pidruchnyk dlia 11 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics (algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level): Textbook for grade 11 of general secondary education institutions]. Kyiv: Geneza. (in Ukrainian).
14. Ister, O. S. (2021). *Matematyka: kompleksna pidhotovka do zovnishnoho nezalezhnogo otsiniuvannia (3-tie vyd.)* [Mathematics: Comprehensive preparation for external independent testing (3rd ed.)]. Kyiv: Geneza. (in Ukrainian).
15. Ister, O. S. (2024). *NMT 2025. Matematika: 10 variantiv u formati NMT* [NMT 2025. Mathematics: 10 test versions in NMT format]. Kharkiv: Abetka. (in Ukrainian).
16. Kang, S. H. K. (2016). Spaced repetition promotes efficient and effective learning: Policy implications for instruction. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, 3(1), 12–19.
17. Kapinosov, A. M. (2023). *Matematyka. Kompleksna pidhotovka do ZNO (NMT)* [Mathematics. Comprehensive preparation for EIT (NMT)]. Ternopil: Pidruchnyky i posibnyky. (in Ukrainian).

18. Klochko, I. Ya. (2023). *Matematyka: testovi zavdannia (zovnishnie nezalezne otsiniuvannia)* [Mathematics: test tasks. external independent assessment]. Ternopil: Navchalna knyha – Bohdan. (in Ukrainian).
19. Kozyra, V. M. (2023). *Matematyka: zovnishnie nezalezne otsiniuvannia (2-he vyd.)* [Mathematics: External Independent Testing (2nd ed.)]. Ternopil: Aston. (in Ukrainian).
20. Martyniuk, O. V. (2024). *NMT 2025. Matematika: Testovi zavdannia u formati NMT* [NMT 2025. Mathematics: Test tasks in NMT format]. Ternopil: Pidruchnyky i posibnyky. (in Ukrainian).
21. Merzliak, A. H., Nomirovskiy, D. A., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2018). *Matematyka: Algebra i pochatky analizu ta heometrii, riven standartu: Pidruchnyk dlia 10 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics: Algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level: Textbook for grade 10 of general secondary education institutions]. Kharkiv: Himnaziia. (in Ukrainian).
22. Merzliak, A. H., Nomirovskiy, D. A., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2019). *Matematyka: Algebra i pochatky analizu ta heometrii, riven standartu: Pidruchnyk dlia 11 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics: Algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level: Textbook for grade 11 of general secondary education institutions]. Kharkiv: Himnaziia. (in Ukrainian).
23. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2016). *Nova ukraiinska shkola: Kontseptualni zasady reformuvannia serednoii shkoly* [The New Ukrainian School: Conceptual foundations for the reform of secondary education]. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf> (in Ukrainian).
24. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2017). *Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10–11 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Profilnyi riven. Zatverdzheno nakazom MON Ukrainy vid 23.10.2017 No. 1407* [Mathematics curriculum for students of grades 10–11 of general secondary education institutions. Specialized level. Approved by the order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1407 dated October 23, 2017]. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx> (in Ukrainian).
25. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2017). *Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10–11 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Riven standartu. Zatverdzheno nakazom MON Ukrainy vid 23.10.2017 No. 1407* [Mathematics curriculum for students of grades 10–11 of general secondary education institutions. Standard level. Approved by the order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1407 dated October 23, 2017]. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-riven-standartu.docx> (in Ukrainian).
26. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2019). *Nakaz No. 1513 vid 04 hrudnia 2019 r. "Pro zatverdzhennia prohramy zovnishnoho nezaleznoho otsiniuvannia z matematyky"* [Order No. 1513 of December 4, 2019 "On approval of the External Independent Testing program in mathematics"]. URL: <https://testportal.gov.ua/progmath/> (in Ukrainian).
27. Nelin, Ye. P. (2018). *Matematyka (algebra i pochatky analizu ta heometrii, riven standartu): Pidruchnyk dlia 10 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics (algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level): Textbook for grade 10 of general secondary education institutions]. Kharkiv: Ranok. (in Ukrainian).
28. Nelin, Ye. P., & Dolhova, O. Ye. (2019). *Matematyka (algebra i pochatky analizu ta heometrii, riven standartu): Pidruchnyk dlia 11 klasy zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Mathematics (algebra and the fundamentals of analysis and geometry, standard level): Textbook for grade 11 of general secondary education institutions]. Kharkiv: Ranok. (in Ukrainian).
29. Rakov, S. A. (2005). *Matematychna osvita: kompetentnisnyi pidkhid z vykorystanniam IKT* [Mathematics education: Competency-based approach using ICT]. Kharkiv: Fakt. (in Ukrainian).
30. Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. Springer.
31. Ukrainian Center for Educational Quality Assessment (UCEQA). (2023). *Natsionalnyi multypredmetnyi test 2023 roku: Zvit. Tom 2* [National Multi-Subject Test 2023: Report. Volume 2]. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2023/08/Zvit-NMT_2023-Tom_2.pdf (in Ukrainian).
32. Ukrainian Center for Educational Quality Assessment (UCEQA). (2024). *Natsionalnyi multypredmetnyi test 2024 roku: Zvit. Tom 2* [National Multi-Subject Test 2024: Report. Volume 2]. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/09/Zvit-NMT_2024-Tom_2_red.pdf (in Ukrainian).
33. Verkhovna Rada of Ukraine. (2017). *Zakon Ukrainy "Pro osvitu" No. 2145-VIII vid 05.09.2017 r.* [Law of Ukraine "On Education" No. 2145-VIII of September 5, 2017]. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text> (in Ukrainian).
34. Zabelyshynska, M. Ya., Zakhariichenko, Yu. O., & Karpik, V. V. (2024). *Matematyka: Dovidnyk-praktykum (2-he vyd.)* [Mathematics: Reference-practicum (2nd ed.)]. Kharkiv: Ranok. (in Ukrainian).
35. Zakhariichenko, Yu. O., Repeta, V. K., Markova, I. S., & Karpik, V. V. (2021). *Matematyka: 2000 testiv dlia pidhotovky do ZNO* [Mathematics: 2000 tests for preparation for EIT]. Kyiv: Litera LTD. (in Ukrainian).
36. Zakhariichenko, Yu. O., Shkolnyi, O. V., Rohanin, O. M., & Derhachov, V. A. (2024). *NMT 2025. Matematika: Use dlia pidhotovky do NMT v rezhymy onlain i oflain* [NMT 2025. Mathematics: Everything for NMT preparation in online and offline formats]. Kharkiv: Ranok. (in Ukrainian).
37. Zakhariichenko, Yu. O., Shkolnyi, O. V., Zakhariichenko, L. I., & Shkolna, O. V. (2022). *Suchasna pidhotovka do ZNO z matematyky* [Modern preparation for EIT in mathematics]. Kamianets-Podilskyi: Aksioma. (in Ukrainian).

| Received: 19.06.2025 | Accepted: 27.07.2025 | Published: 29.09.2025 |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

STEM-ОРІЄНТОВАНЕ НАВЧАННЯ АРХІТЕКТУРИ КОМП'ЮТЕРА У ФОРМУВАННІ ІНЖЕНЕРНОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ

Володимир ШАМОНЯ

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
v.shamonya@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3201-4090>

Максим СОРОКА ✉

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
ms.mikro.1@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-2353-692X>

Олена СЕМЕНІХІНА

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

STEM-ORIENTED TEACHING OF COMPUTER ARCHITECTURE IN DEVELOPING ENGINEERING THINKING OF FUTURE COMPUTER SCIENCE TEACHERS

Volodymyr SHAMONIA

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
v.shamonya@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3201-4090>

Maksym SOROKA ✉

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
ms.mikro.1@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-2353-692X>

Olena SEMENIKHINA

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У статті обґрунтовано педагогічну доцільність використання симуляційного середовища Proteus у процесі STEM-орієнтованого навчання курсу «Архітектура комп'ютера» з метою формування інженерного мислення студентів. Актуальність дослідження зумовлена потребою у підготовці фахівців, здатних проектувати та аналізувати цифрові пристрої, ухвалювати технічно обґрунтовані рішення та інтегрувати знання з інформатики, фізики, математики й електроніки. У межах дослідження проведено педагогічний експеримент із студентами, які працювали в різних цифрових середовищах.

Матеріали і методи. Методи дослідження включають: аналіз літератури з питань STEM-освіти, порівняльний аналіз функціональних можливостей середовищ Proteus і Multisim, педагогічний експеримент, кількісні методи аналізу результатів Експеримент охопив студентів педагогічного університету, які вивчали дисципліни апаратного спрямування. Кількісний та якісний аналіз даних дозволив оцінити рівень засвоєння матеріалу, динаміку розвитку навичок цифрового моделювання, глибину рефлексії та прояви інженерного мислення.

Результати. Результати свідчать, що різні симуляційні середовища забезпечують засвоєння базового змісту курсу, однак саме середовище Proteus активніше стимулює технічну творчість, гнучкість у побудові моделей, здатність до аналізу та оптимізації схем. Студенти, які працювали в Proteus, демонстрували більш різноманітні підходи до виконання завдань, виявляли ініціативу у вдосконаленні проектних рішень і аргументовано обґрунтовували вибір інструментів.

Висновки. Зроблено висновок про доцільність використання Proteus у курсах, спрямованих на формування інженерного мислення в умовах STEM-парадигми. Запропоновано методичні рекомендації щодо оптимального використання обох середовищ залежно від дидактичної мети.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The article substantiates the pedagogical feasibility of using the Proteus simulation environment in the process of STEM-oriented teaching of the "Computer Architecture" course with the aim of developing students' engineering thinking. The relevance of the study is determined by the need to train specialists capable of designing and analyzing digital devices, making technically sound decisions, and integrating knowledge from computer science, physics, mathematics, and electronics. Within the framework of the study, a pedagogical experiment was conducted with students who worked in different digital environments.

Materials and methods. Research methods include: analysis of literature on STEM education, comparative analysis of the functionality of Proteus and Multisim environments, pedagogical experiment, and quantitative methods of analyzing the results. The experiment involved students of a pedagogical university studying hardware-oriented disciplines. Quantitative and qualitative analysis of the data made it possible to assess the level of content mastery, the dynamics of digital modeling skills development, the depth of reflection, and the manifestations of engineering thinking.

Results. The results indicate that different simulation environments provide the acquisition of the basic content of the course; however, it is the Proteus environment that more actively stimulates technical creativity, flexibility in building models, and the ability to analyze and optimize circuits. Students working in Proteus demonstrated more diverse approaches to task completion, showed initiative in improving design solutions, and provided well-founded justifications for their choice of tools.

Conclusions. The conclusion is made about the advisability of using Proteus in courses aimed at developing engineering thinking within the STEM paradigm. Methodological recommendations are offered for the optimal use of both environments depending on the didactic purpose. The obtained results have practical significance for the development of hardware-oriented academic courses, updating teaching methods, and implementing an

Отримані результати мають практичне значення для розробки навчальних курсів апаратного профілю, оновлення методик і реалізації міждисциплінарного підходу в технічній підготовці майбутніх учителів інформатики.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: STEM-освіта; інженерне мислення; архітектура комп'ютера; Proteus; цифрове моделювання; технічна творчість; підготовка вчителів інформатики.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Шамоня В., Сорока М., Семеніхіна О. STEM-орієнтоване навчання архітектури комп'ютера у формуванні інженерного мислення майбутніх учителів інформатики. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 59-64. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-09>.

interdisciplinary approach in the technical training of future computer science teachers.

KEYWORDS: STEM education; engineering thinking; computer architecture; Proteus; digital modeling; technical creativity; training computer science teachers.

FOR CITATION: Shamon, V., Soroka, M., & Semenikhina, O. (2025). STEM-oriented teaching of computer architecture in developing engineering thinking of future computer science teachers. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 59-64. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-09>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасні вимоги до підготовки фахівців у галузі інформаційних технологій і цифрової освіти потребують переосмислення традиційних підходів до вивчення дисциплін, пов'язаних із апаратною частиною комп'ютерних систем. Особливої уваги набуває курс «Архітектура комп'ютера» та суміжні навчальні дисципліни, що охоплюють мікропроцесорну техніку, логіку, схемотехніку та мікроелектроніку. Враховуючи динамічний розвиток електронної інженерії та стрімку цифровізацію освітнього процесу, все більшої актуальності набуває впровадження STEM-орієнтованого навчання, яке поєднує наукові знання, технічні навички, інженерне проєктування та математичне моделювання в єдину освітню систему.

Одним із ключових елементів такого підходу є формування інженерного мислення студентів, що передбачає розвиток умінь аналізувати, проєктувати, тестувати й оптимізувати технічні системи, спираючись на теоретичні знання та практичні інструменти. У цьому процесі важливу роль відіграють симуляційні середовища, які дозволяють безпечно і гнучко відтворювати структуру та функціонування електронних пристроїв. Одним із таких потужних інструментів є програмне забезпечення Proteus, яке поєднує можливості створення електронних схем, моделювання їхньої роботи та візуального аналізу результатів у реальному часі.

У межах цього дослідження зроблено спробу оцінити ефективність використання симуляційного середовища Proteus як інструменту розвитку інженерного мислення здобувачів освіти при вивченні архітектури комп'ютера. Враховуючи, що здобувач має навчитися не лише повторювати типові схеми, а й адаптувати їх під конкретні задачі, вдосконалювати або створювати нові функціональні блоки, акцент робиться не стільки на результат, скільки на процес осмислення технічної задачі. Саме це дозволяє реалізувати принципи STEM-освіти в повному обсязі через залучення моделювання, логіко-аналітичної діяльності та елементів дослідницької практики. Таким чином, постає потреба в науковому обґрунтуванні доцільності використання симуляційних цифрових середовищ у професійній підготовці здобувачів освіти в галузі IT, зокрема у формуванні інженерного мислення як інтегрованої здатності застосовувати знання на практиці, аналізувати процеси й ухвалювати технічно обґрунтовані рішення.

Аналіз актуальних досліджень. Упродовж останніх років інженерне мислення все частіше розглядається як одна з ключових цілей сучасної освіти, зокрема в контексті STEM-підходу (Стрижак та ін., 2017). За визначенням J. R. Qin і G. S. Fu (2017), інженерне мислення це інтегративна здатність до розв'язання прикладних проблем, що вимагає застосування знань з математики, фізики, технологій, інформатики та творчого проєктування. У межах STEM-освіти воно розглядається не лише як пізнавальна діяльність, а як спосіб мислення, що ґрунтується на ітеративному аналізі, критичному оцінюванні варіантів рішень і здатності до системного бачення.

У світовій науково-освітній літературі значну увагу приділено питанням формування інженерного мислення через використання цифрових симуляційних інструментів, зокрема в дисциплінах, пов'язаних з архітектурою комп'ютера, схемотехнікою та мікроелектронікою. Так, L. D. English (2016), Ю.В. Ботузова (2018) та Semenikhina et al. (2022) підкреслює важливість впровадження інтерактивних віртуальних середовищ у STEM-курси з метою розвитку здатності до технічного моделювання та самостійного пошуку інженерних рішень. С. Yata, Т. Ohtani і М. Isobe (2020) зазначають, що навчальні середовища мають не лише відтворювати фізичні процеси, а й стимулювати аналітичну діяльність, у якій студент виступає як активний дослідник.

Інженерне мислення формується, насамперед, через діяльність моделювання: побудову, тестування, вдосконалення й оцінку цифрових або фізичних прототипів. У зв'язку з цим середовище Proteus виконує не лише роль демонстраційного інструменту, а й за наявності правильно організованої методики інструменту розвитку високорівневих когнітивних функцій, таких як аналіз причинно-наслідкових зв'язків, перевірка гіпотез, оптимізація функціональних схем. Саме ці процеси, за С. Zhou і Y. Li (2021), і складають базис інженерного мислення в сучасному його розумінні.

У дослідженнях Semenikhina et al. (2020) підкреслено, що використання віртуальних лабораторій сприяє не лише зростанню академічної успішності, а й розвитку здатності до критичного аналізу моделей. Науковці акцентують увагу на тому, що в умовах дистанційного або змішаного навчання симуляційні середовища забезпечують повноцінну реалізацію експериментальної діяльності, що є однією з основ інженерного підходу в STEM.

В українському освітньому просторі питання розвитку інженерного мислення набуває особливої актуальності у підготовці майбутніх учителів інформатики, які мають не лише володіти предметними знаннями, а й виступати як фасилітатори інженерно-орієнтованого навчання в школі. Роботи О. О. Мартинюк (2018), Н.Р. Балик і Г.П. Шмигер (2017) доводять, що саме інформатика, поєднана з мікроелектронікою, цифровими технологіями та моделюванням, створює оптимальні умови для формування базового інженерного мислення у студентів. Водночас виявлено недостатність емпіричних досліджень, які б аналізували динаміку формування інженерного мислення саме в межах курсу «Архітектура комп'ютера» або суміжних дисциплін, з використанням спеціалізованих цифрових платформ. З огляду на це, доцільним є

розгляд програмного середовища Proteus як середовища розгортання інженерної діяльності студента, а не лише як інструмента візуалізації схем.

Отже, сучасні наукові дослідження підтверджують, що симуляційні цифрові середовища, зокрема Proteus, можуть виступати каталізаторами формування інженерного мислення у майбутніх фахівців ІТ-сфери за умови інтеграції в методично структуроване STEM-орієнтоване навчання.

Мета дослідження полягає в науковому обґрунтуванні доцільності використання симуляційного середовища Proteus як інструмента розвитку інженерного мислення студентів у процесі STEM-орієнтованого вивчення архітектури комп'ютера.

Досягнення мети передбачає реалізацію таких завдань:

- визначити педагогічні умови, за яких цифрове моделювання в Proteus сприяє формуванню ключових компонентів інженерного мислення;
- зіставити ефективність навчання з використанням Proteus і Multisim у частині формування навичок аналізу, проєктування та тестування цифрових схем;
- виявити динаміку розвитку інженерно-проєктної активності студентів на різних етапах навчання;
- оцінити вплив STEM-орієнтованої методики на самостійність, креативність та аналітичну рефлексію здобувачів освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Методологічну основу дослідження становлять положення про інженерне мислення як цільову характеристику STEM-освіти, ідеї конструктивістського навчання, принципи моделювання як засобу пізнання складних систем, а також наукові підходи до організації цифрового освітнього середовища у підготовці майбутніх ІТ-фахівців.

Методи дослідження включають:

- Аналіз літератури з питань STEM-освіти, інженерного мислення, цифрового моделювання, симуляційних платформ у педагогіці та технічній освіті;
- Порівняльний аналіз функціональних можливостей середовищ Proteus і Multisim, здійснений за технічними параметрами (інструменти моделювання, аналітика, візуалізація, 3D-проєктування) та педагогічними критеріями (доступність, гнучкість, можливості для дослідження, зручність для студентів);
- Педагогічний експеримент, проведений протягом двох навчальних років на базі педагогічного ЗВО, у межах якого дві експериментальні групи вивчали курс, споріднений із архітектурою комп'ютера: ЕГ1 – із використанням Proteus, ЕГ2 – із використанням Multisim. Обидві групи на старті мали статистично однаковий рівень підготовки, що було підтверджено статистично;
- Кількісні методи аналізу результатів;
- Якісний аналіз результатів: інтерпретація рішень, поданих у середовищі симулятора; рівень оригінальності, варіативність технічних підходів, самостійність у виборі схемних елементів і структур; рефлексивні відгуки студентів.

Учасники дослідження студенти ІІІ курсу спеціальностей «Середня освіта (Інформатика)» та «Комп'ютерні науки», які не мали попереднього досвіду роботи з відповідними симуляторами. Загальна кількість учасників 87 осіб, з них 42 у групі з використанням Proteus (ЕГ1), 45 у групі з Multisim (ЕГ2). У процесі експерименту здійснювався контроль не лише академічних показників, а й темпів формування інженерного мислення, що виявлялося у способах роботи з інформацією, ухваленні технічних рішень та аналітичному обґрунтуванні вибраних підходів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати педагогічного експерименту дозволили виявити відмінності у характері формування інженерного мислення студентів, які опановували курс архітектури комп'ютера із використанням різних симуляційних середовищ. Порівняльний аналіз двох експериментальних груп показав, що обидва цифрові інструменти Proteus і Multisim сприяють засвоєнню технічного матеріалу, однак мають різну дидактичну ефективність залежно від цілей навчання.

1. Академічні досягнення

Аналіз середнього балу з курсу продемонстрував відсутність статистично значущих відмінностей між студентами, які працювали в середовищі Proteus (72 бали), і тими, хто використовував Multisim (70 балів). Це свідчить про еквівалентну результативність у засвоєнні теоретичних знань. Проте для STEM-освіти надзвичайно важливою є не лише когнітивна складова, а й діяльнісна здатність аналізувати, моделювати, оцінювати і вдосконалювати технічні рішення, тобто формувати інженерне мислення.

2. Ефективність виконання лабораторних завдань

За результатами фіксації середнього часу, витраченого на виконання лабораторних робіт, встановлено, що студенти групи Multisim демонстрували швидший темп роботи на етапі первинного знайомства з програмою. Так, середній час виконання типового завдання в середовищі Multisim становив 45,6 хв, тоді як у Proteus 48,1 хв. Проте ця різниця пояснюється переважно інтерфейсними особливостями: у Multisim більшість базових інструментів винесено на панель, тоді як у Proteus потрібен глибший пошук у бібліотеках.

Однак інженерне мислення передбачає не лише швидкість, а й осмисленість дій, оптимізацію структури рішення, гнучкість мислення та творчий підхід до побудови моделей. Саме ці ознаки виявлялися в роботах студентів, які працювали з Proteus, особливо у завданнях відкритого типу.

3. Динаміка формування інженерно-проектних навичок

Порівняння повторного виконання раніше відпрацьованих лабораторних робіт показало позитивну динаміку в обох групах, однак якісний аналіз рішень засвідчив глибшу рефлексію та варіативність підходів у групі Proteus. Студенти не лише відтворювали задану схему, а й пропонували альтернативи: використання різних типів джерел, перетворення сигнальних форм, вдосконалення схем комутації. У деяких випадках студенти пропонували власні покращення моделей, змінюючи логіку з'єднань або додаючи функціональні блоки (наприклад, елементи контролю напруги, індикатори помилок, фільтри шумів). Такі дії є прямими ознаками інженерного мислення, що включає ініціативність, конструктивну критичність і технічну творчість.

4. Виконання самостійних проектних завдань

У ході перевірки індивідуальних завдань (моделювання підсилювача на уніполярному транзисторі та логічного мажоритарного елемента) студенти демонстрували різний рівень самостійності. В обох групах завдання були виконані з допустимим рівнем помилок, однак:

- у Multisim переважали шаблонні рішення з незначними змінами типових схем;
- у Proteus понад 40% студентів вийшли за межі шаблону, реалізувавши оригінальні технічні підходи або підключивши зовнішні компоненти, зокрема таймери, дисплеї, сенсори.

Крім того, у рефлексивних звітах студенти групи Proteus частіше описували логіку вибору елементів, міркування щодо оптимізації схеми, труднощі, пов'язані з візуальним контролем параметрів і побудовою графіків. Це свідчить про глибший рівень технічного осмислення завдання, що є ядром інженерного мислення.

Отже, результати дослідження підтверджують:

- Multisim забезпечує швидке входження в роботу з електронними схемами, ефективний для базових завдань і дистанційного навчання;
- Proteus формує глибше осмислення функціонування цифрових схем, стимулює технічну творчість і є потужним засобом розвитку інженерного мислення в умовах STEM-орієнтованого курсу.

ОБГОВОРЕННЯ

Результати дослідження підтверджують ефективність використання цифрових симуляційних середовищ як засобів реалізації STEM-підходу у вищій технічній і педагогічній освіті. Поглиблений аналіз даних педагогічного експерименту засвідчив, що хоча обидва середовища Proteus і Multisim забезпечують засвоєння навчального матеріалу, саме Proteus виявився значно ефективнішим для формування інженерного мислення студентів, що є однією з ключових цілей сучасної STEM-освіти.

Інженерне мислення трактується не лише як здатність вирішувати технічні задачі, а як комплексна когнітивна діяльність, що включає вміння моделювати, декомпонувати, аналізувати, оцінювати, аргументувати та вдосконалювати технічні рішення. В умовах використання середовища Proteus у студентів значно частіше проявлялася ініціатива у зміні стандартних рішень, проектуванні власних схем, тестуванні гіпотез щодо зміни функціональних параметрів. Такі дії є маркерами високого рівня сформованого інженерного мислення.

Важливим педагогічним ефектом STEM-орієнтованого навчання стало формування аналітичних і алгоритмічних умінь. Студенти навчалися розкладати складні задачі на підзадачі (декомпозиція), аналізували взаємозв'язки між компонентами комп'ютерних систем, оцінювали вплив змін у структурі схем на загальну продуктивність або стабільність роботи пристрою. Це сприяло розвитку системного мислення, що є особливо актуальним у навчанні майбутніх учителів інформатики, які повинні не лише знати принципи роботи цифрової техніки, а й уміти пояснити їх у доступній та логічно структурованій формі. Водночас проектна діяльність і STEM-завдання стимулювали розвиток творчого потенціалу і здатності до експериментування. Студенти створювали нові варіанти схем, доповнювали базові рішення нестандартними елементами, самостійно обирали способи перевірки гіпотез. У цьому контексті Proteus виявився більш гнучким і «відкритим» середовищем, яке надає широкі можливості для реалізації власного інженерного задуму, порівняно з більш шаблонним інтерфейсом Multisim. Такий досвід сприяє формуванню критичного та креативного мислення важливих складових інженерної та педагогічної компетентностей.

Ще одним важливим аспектом, виявленим у дослідженні, є практична готовність до викладання STEM-дисциплін. Навчаючись у середовищі Proteus, студенти не лише набували фахових знань, а й водночас засвоювали дидактичні механізми реалізації STEM-підходу. Це формувало в них уявлення про структуру міждисциплінарного уроку, методи пояснення складних технічних процесів за допомогою моделювання, способи залучення школярів до проектної діяльності. У результаті майбутні вчителі інформатики опанували не лише зміст, а й методи його викладання в контексті сучасної цифрової школи.

До прикладів STEM-завдань, які можуть бути реалізовані в середовищі Proteus або за його підтримки, належать:

- моделювання схеми арифметико-логічного пристрою (ALU) з оцінкою ефективності архітектурних рішень;
- розробка прототипу smart-пристрою з контролем енергоспоживання на основі аналізу енергоефективності комп'ютерів;
- проектування простої системи керування периферійним пристроєм із зворотним зв'язком;
- створення віртуальної лабораторії або симулятора для вивчення роботи комп'ютерної пам'яті чи мережевих протоколів.

Такі завдання сприяють не лише поглибленню знань, а й розвитку практичних навичок реалізації інженерних ідей у віртуальному середовищі, що повністю відповідає вимогам сучасної освіти, орієнтованої на інтеграцію знання і діяльності.

Загалом, STEM-орієнтоване навчання архітектури комп'ютера в поєднанні із симуляційним середовищем Proteus забезпечує комплексний розвиток професійних якостей майбутнього вчителя інформатики. Студенти не лише глибше

розуміють будову й функціонування комп'ютерної техніки, а й здобувають інструменти та досвід, необхідні для організації інженерно орієнтованого освітнього процесу у школі. Такий підхід дозволяє підготувати педагогів, здатних навчати нове покоління учнів за логікою міждисциплінарності, технологічної гнучкості та творчої активності.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Інтеграція симуляційного середовища Proteus у курс «Архітектура комп'ютера» створює ефективні умови для реалізації STEM-підходу, оскільки забезпечує поєднання наукового знання, технічного мислення, інженерного проектування та цифрового моделювання в єдиний навчальний процес. Це сприяє формуванню цілісного інженерного світогляду здобувачів освіти та розвитку їх здатності до аналізу, синтезу, оцінювання технічних рішень.

Порівняльний аналіз функціоналу Proteus і Multisim та результати педагогічного експерименту підтверджують, що обидва середовища забезпечують базове засвоєння навчального матеріалу. Проте саме Proteus активніше стимулює прояви інженерного мислення, зокрема в частині проектування, варіативності схемних рішень, логічного моделювання й аргументації вибраних підходів. Динаміка результатів показала, що хоча студенти групи Multisim виконували типові завдання швидше, студенти групи Proteus демонстрували глибшу когнітивну зануреність, креативність і здатність до оптимізації рішень, що є важливою ознакою сформованого інженерного мислення як інтегрованої компетентності в STEM-освіті. Програма Proteus забезпечує імітацію повного циклу технічного рішення: від побудови схеми до її верифікації, налагодження, візуалізації й аналітичного аналізу результатів. Такий формат сприяє формуванню системного бачення, відповідальності за рішення, рефлексії й готовності до самостійного вирішення інженерних задач. Вибір симуляційного середовища має ґрунтуватися на освітній меті: якщо акцент зроблено на ознайомленні, відпрацюванні типових схем або роботі в дистанційному форматі доцільним є використання Multisim; якщо навчання орієнтоване на розвиток інженерного мислення, творчої діяльності, самостійного проектування та дослідницького підходу Proteus є методично виправданим і переважним.

Отримані результати дають підстави для оновлення методичних підходів до викладання ІТ-дисциплін: рекомендовано включати до структури курсу етапи відкритого проектування, рефлексивного аналізу технічних рішень і формування оцінювання інженерних стратегій; доцільно проводити індивідуальні або групові завдання, спрямовані на створення, аналіз і вдосконалення функціональних блоків із використанням Proteus як середовища для технічного мислення.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Стрижак, О., Сліпучіна, І., Полісун, Н., & Чернецький, І. (2017). STEM-освіта: основні дефініції. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 62(6), 16-33. <https://doi.org/10.33407/itlt.v62i6.1753>
2. English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3. <https://doi.org/10.1186/s40594-015-0027-7>
3. Qin, J. R., & Fu, G. S. (2017). STEM education: Interdisciplinary education based on real problem scenarios. *China Educational Technology*, (4), 67-74.
4. Semenikhina, O. V., Drushlyak, M. G., & Shishenko, I. V. (2022). STEM project as a means of learning modeling for pre-service mathematics and computer science teachers. *Information Technologies and Learning Tools*, 90(4), 46-56. <https://doi.org/10.33407/itlt.v90i4.4946>
5. Semenikhina, O., Drushlyak, M., Yurchenko, A., Udovychenko, O., & Budyanskiy, D. (2020). The use of virtual physics laboratories in professional training: The analysis of the academic achievements dynamics. In *ICTERI 2020: 16th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications*, 2740, 423-429.
6. Yata, C., Ohtani, T., & Isobe, M. (2020). Conceptual framework of STEM based on Japanese subject principles. *International Journal of STEM Education*, 7. <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00205-8>
7. Zhou, C., & Li, Y. (2021). The focus and trend of STEM education research in China – visual analysis based on CiteSpace. *Open Journal of Social Sciences*, 9, 168-180. <https://doi.org/10.4236/jss.2021.97011>
8. Балик, Н.Р., & Шмигер, Г.П. (2017). Підходи та особливості сучасної STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*, 2(12), 26-30.
9. Ботузова, Ю.В. (2018). Динамічні моделі геоебга на уроках математики як основа STEM-підходу. *Фізико-математична освіта*, 3(17), 31-35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-017-3-005>
10. Мартинюк, О. О. (2018). STEM-технології як засіб формування інформаційно-цифрової компетентності вчителів та учнів. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія : Педагогічна*, 24, 18-22.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Stryzhak, O., Slipukhina, I., Polikhun, N., & Chernetskiy, I. (2017). STEM-osvita: osnovni definityi [STEM-Education: Main Definitions]. *Information Technologies and Learning Tools*, 62(6), 16–33. <https://doi.org/10.33407/itlt.v62i6.1753>
2. English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3. <https://doi.org/10.1186/s40594-015-0027-7>
3. Qin, J. R., & Fu, G. S. (2017). STEM education: Interdisciplinary education based on real problem scenarios. *China Educational Technology*, (4), 67–74.
4. Semenikhina, O. V., Drushlyak, M. G., & Shishenko, I. V. (2022). STEM project as a means of learning modeling for pre-service mathematics and computer science teachers. *Information Technologies and Learning Tools*, 90(4), 46–56. <https://doi.org/10.33407/itlt.v90i4.4946>
5. Semenikhina, O., Drushlyak, M., Yurchenko, A., Udovychenko, O., & Budyanskiy, D. (2020). The use of virtual physics laboratories in professional training: The analysis of the academic achievements dynamics. In *ICTERI 2020: 16th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications*, 2740, 423–429.
6. Yata, C., Ohtani, T., & Isobe, M. (2020). Conceptual framework of STEM based on Japanese subject principles. *International Journal of STEM Education*, 7. <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00205-8>
7. Zhou, C., & Li, Y. (2021). The focus and trend of STEM education research in China – visual analysis based on CiteSpace. *Open Journal of Social Sciences*, 9, 168–180. <https://doi.org/10.4236/jss.2021.97011>
8. Balyk, N., & Shmyger, G. (2017). Pidkhody ta osoblyvosti suchasnoi STEM-osvity [Approaches and Peculiarities of Modern STEM Education]. *Fyzyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 2(12), 26–30.
9. Botuzova, Yu. (2018). Dynamichni modeli geogebra na urokakh matematyky yak osnova STEM-pidkhodu [Geogebra Dynamic Models at the Mathematics Lessons as a STEM-Approach]. *Fyzyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 3(17), 31–35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-017-3-005>
10. Martinyuk, O. O. (2018). STEM-tekhnologii yak zasib formuvannya informatsiino-tyfrovoy kompetentnosti vchyteliv ta uchniv [STEM-technologies as a means of forming information and digital competence of teachers and students]. *Zbirnyk naukovykh prats Kamianets-Podilskoho natsionalnoho universytetu im. I. Ohienka. Seriya: Pedagogichna*, 24, 18–22.

| Матеріал надійшов до редакції: 25.05.2025 р. | Прийнято до друку: 02.07.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



ФОРМУВАННЯ У ШКОЛЯРІВ ГРОМАДЯНСЬКОЇ ІДЕНТИЧНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В 5-6 КЛАСАХ

Василь ШВЕЦЬ ✉

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
kmmvm@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0003-2084-1336>

Катерина МАРТИНЮК

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
23fmif.k.martyniuk@std.edu.edu.ua

FORMATION OF CIVIC IDENTITY IN SCHOOLCHILDREN DURING MATHEMATICS EDUCATION IN GRADES 5-6

Vasyl SHVETS ✉

Dragomanov Ukrainian State University,
Ukraine
kmmvm@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0003-2084-1336>

Kateryna MARTYNIUK

Dragomanov Ukrainian State University,
Ukraine
23fmif.k.martyniuk@std.edu.edu.ua

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У Державному стандарті базової середньої освіти України визначено, що формування громадянської ідентичності є ключовою компетентністю, яка має бути інтегрована в освітній процес. У п'ятих і шостих класах, коли в учнів формується початкове уявлення про соціальні ролі та відповідальність, важливим є не лише передавання предметних знань, а й розвиток громадянської свідомості. Математика як навчальна дисципліна має значний потенціал формування громадянської ідентичності через задачі, що моделюють соціальні ситуації, вимагають логічного обґрунтування, оцінки справедливості рішень, порівняння альтернатив та прийняття відповідальних рішень.

Матеріали і методи. Для отримання результатів використано теоретичні (аналіз нормативних документів, довідкової та навчальної літератури з теорії та методи навчання математики, синтез отриманих відомостей, їх узагальнення) та емпіричні (опитування вчителів, ознайомлення з передовим досвідом навчання учнів математики, опитування учнів) методи наукового пізнання.

Результати. У статті запропоновано методичні підходи до формування громадянської ідентичності в учнів 5-6 класів під час навчання математики, надано приклади прикладних задач з аналізом їх розв'язання та відповідними методичними коментарями до них.

Висновки. Одним із засобів формування в учнів 5-6 класів громадянської ідентичності є розв'язання практико-орієнтованих завдань та прикладних задач, сюжети яких відображають громадянське життя в Україні. Важливо, щоб цей процес супроводжувався змістовним інформаційним контентом, а освітні програми підготовки майбутніх учителів математики продовжували адаптуватися до сучасних викликів, забезпечуючи учням знання та навички, необхідні для активної участі у житті України.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: базова середня освіта; освітній процес; громадянська ідентичність; молодший підлітковий вік; інтеграція змісту; інтегроване навчання; проектна діяльність; моделювання; математичні задачі; громадянська свідомість.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Швець В., Мартинюк К. Формування у школярів громадянської ідентичності під час навчання математики в 5-6 класах. *Фізико-математична освіта*, 2025, Том 40, № 4. С. 65-72. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-10>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The State Standard of Basic Secondary Education of Ukraine states that the formation of civic identity is a key competency that should be integrated into the educational process. In the fifth and sixth grades, when students form an initial understanding of social roles and responsibilities, it is important not only to impart subject knowledge but also to develop civic awareness. Mathematics as an academic discipline has a significant potential to form civic identity through tasks that model social situations, require logical reasoning, assessing the fairness of decisions, comparing alternatives, and making responsible decisions.

Materials and methods. To obtain the results, we used theoretical (analysis of regulatory documents, reference and educational literature on the theory and methods of teaching mathematics, synthesis of the data obtained, and their generalization) and empirical (survey of teachers, familiarization with the best practices of teaching mathematics to students, and survey of students) methods of scientific knowledge.

Results. The article proposes methodological approaches to the formation of civic identity in students of grades 5-6 in the course of mathematics, and provides examples of applied problems with an analysis of their solutions and relevant methodological comments to them.

Conclusions. One of the ways to form civic identity in students of grades 5-6 is to solve practice-oriented tasks and applied problems whose plots reflect civic life in Ukraine. It is important that this process is accompanied by meaningful information content and that the educational programs for future mathematics teachers continue to adapt to modern challenges, providing students with the knowledge and skills necessary to actively participate in the life of Ukraine.

KEYWORDS: basic secondary education; educational process; civic identity; early adolescence; content integration; integrated learning; project activities; modeling; mathematical tasks; civic consciousness.

FOR CITATION: Shvets, V., & Martyniuk, K. (2025). Formation of civic identity in schoolchildren during mathematics education in grades 5-6. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 65-72. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-10>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Глобалізація сучасного світу, як посилена інтеграція екосистем та суспільств, наростає з кожним роком. Цей процес є невідворотнім в історії людства. Він полягає в тому що життя людей на Землі, в результаті активного обміну товарами, продуктами, технологіями, інформацією, знаннями та культурними цінностями, стає все більше взаємопов'язаним. Як не прикро визнавати, але прискорення глобалізації відбувається і за рахунок інтенсивної міграції населення, спричиненої частими воєнними конфліктами, стихійними бідами та епідеміями.

Посилення глобалізації загостило таке вразливе питання як *громадянська ідентичність* особи, яка задіяна в цьому процесі і зазнає відчутного впливу її результатів. Війна Росії проти України змусила виїхати понад 4 мільйони громадян України за кордон шукати прихистку в безпечних для проживання країнах. Яке буде повернення цих людей на Батьківщину? З якими почуттями та настроями громадяни України підуть у майбутнє, як ототожнюють себе з життям держави Україна? Це доленосні питання великої ваги і їм має бути приділена особлива увага.

Аналіз актуальних досліджень. Громадянська ідентичність – філософсько-психологічне поняття, яке стосується ототожнення особою себе зі спільнотою громадян національно-державного утворення, усвідомлення себе членом громадянського суспільства (Резнік, 2006), людиною приналежною до певної держави (Відкритий православний Університет). З іншого боку, громадянська ідентичність – це і почуття особи як члена суспільства в якому вона проживає, розуміння нею своїх прав і обов'язків, її активна позиція та участь у громадянському житті. Такі почуття в особи мають бути. Звідси випливає потреба формування в неї громадянської ідентичності, що робить потребу актуальною на даному етапі суспільного життя в Україні.

Формування громадянської ідентичності в юних громадян України задекларовано низкою нормативних державних документів. Це стосується, насамперед, Закону України «Про освіту» (2017), концепції Нової української школи (2016), Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти (2020), модельних навчальних програм (2021), а також концепції національно-патріотичного виховання (2022). У цих документах зазначається, що виховання патріотизму, формування активної життєвої позиції, громадянської ідентичності має проходити на всіх етапах навчання школярів, включаючи і навчання математики. Виходячи з аналізу вище згаданих документів ми прийшли до наступного визначення поняття громадянської ідентичності особистості школяра:

Громадянська ідентичність — складне соціально-психологічне явище, що охоплює усвідомлення особистістю своєї належності до певної нації, держави, громадянського суспільства. Воно включає в себе кілька ключових компонентів, що формують ціннісні орієнтації особи:

1. *Усвідомлення знань про права та обов'язки громадянина, розуміння принципів демократії, прав людини, функцій держави та суспільства - молодь повинна усвідомлювати, що кожен громадянин має право на участь у прийнятті рішень, що стосуються його життя, та несе відповідальність за своєчасне виконання своїх обов'язків.*

2. *Відповідальність перед членами суспільства - молоді люди мають усвідомлювати свою відповідальність перед громадянами країни. Це передбачає їх готовність до участі в громадських ініціативах, волонтерських програмах, а також допомогу іншим. Відповідальність за свої дії формує активну життєву позицію і сприяє розвитку демократичних цінностей.*

3. *Пошук народних традицій – особа не може жити без усвідомлення культурних традицій, історії та цінностей свого народу. Це сприяє формуванню поваги до інших культур і народів, що є важливим аспектом глобалізації.*

4. *Готовність і здатність жити в ім'я свого народу, країни – молоді люди мають брати участь у виборах, громадських ініціативах, волонтерських програмах та інших формах життєдіяльності. Це вимагає від них знань про механізми функціонування суспільства та рішень, які стосуються життя громадян.*

Вагому роль у формуванні громадянської ідентичності особи відіграє освіта, зокрема, навчання математики, яке має стати ефективним інструментом для формування громадянських цінностей школяра. Одним із ключових аспектів формування громадянської ідентичності є розвиток у дітей певних цінностей і норм поведінки, що сприяють їхньому інтегруванню в суспільне поняття. У зв'язку з цим, важливою задачею є інтеграція елементів громадянської освіти в навчання математики. Це може бути досягнуто через створення ситуацій, коли учні будуть залучені до співпраці, обговорювати та вирішувати проблеми разом, що стимулює розвиток соціальних навичок і формує розуміння значення громадянських обов'язків. Ми вважаємо, що найбільш дієвим і ефективним способом такого формування під час навчання математики є розв'язування доцільних прикладних задач, добірки яких мають бути у шкільних підручниках математики. У такому випадку ці задачі стають дієвим засобом формування у школярів громадянської ідентичності.

Мета статті: розкрити можливості формування в учнів 5-6 класів почуття громадянської ідентичності під час навчання математики засобами прикладних задач.

Зазначимо, що ми не виявили публікацій на дану тему і вважаємо дослідження проблеми актуальним та таким, що містить наукову новизну.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використано низку методів наукового пізнання:

теоретичні – аналіз нормативних документів, довідкової та навчальної літератури з теорії та методи навчання математики, синтез отриманих відомостей, їх узагальнення;

емпіричні – опитування вчителів, ознайомлення з передовим досвідом навчання учнів математики, опитування учнів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Самі по собі прикладні задачі, які б гарні сюжети в них не писались, очевидно проблеми не вирішать, якщо не буде компетентного вчителя, який їх вмiло використає для навчання і виховання учнів. Розглянемо кілька таких задач та методичні рекомендації до них, яких слід дотримуватись формуючи в учнів почуття громадянської ідентичності одночасно з формуванням математичних компетентностей. Наші рекомендації розв'язування до кожної задачі подані в таблицях з колонками «Розв'язання» та «Методичний коментар». У колонці «Розв'язання» представлено розв'язання задач, культуру математичних записів, етапи математичного моделювання. У колонці «Методичний коментар» подано той методичний контент (інформація), який вчитель повідомляє учням, формуючи в них громадянську ідентичність.

Задача 1. Обчисли добутки і дізнатися, яка кількість мешканців представлена в даних містах (Рис.1) на момент останнього перепису населення. Побудуй стовпчасту діаграму. З'ясуй, до яких областей України належать ці міста. Авторські рекомендації до задачі подані у таблиці 1.

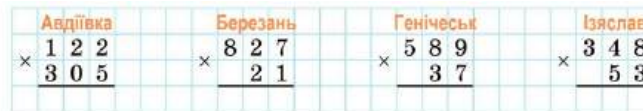


Рис. 1.

Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).

Заодно дізнайся, яка кількість населення в твоїй області чи територіальній громаді. Домашнє завдання

Таблиця 1. Авторські рекомендації до задачі 1

Розв'язання	Методичний коментар
<p>1. Створення математичної моделі (математизація) Для того, щоб розв'язати задачу, потрібно спочатку обчислити добуток виразів у стовпчик.</p> <p>2. Математичне опрацювання</p> <p>3. Інтерпретація отриманих результатів</p>	<p>Під час розв'язання задачі, учні вчаться працювати з даними, отримуючи відомості про населення міст України, що в них формує навички збору та аналізу статистичних даних. Дізнаються про географічне розташування міст, що сприяє розвитку знань про територіальну цілісність держави та адміністративний поділ в ній. Знайомляться з поняттям перепису населення, що є важливим для планування ресурсів і розвитку міст.</p> <p>Створення стовпчастої діаграми допомагає візуалізувати числові дані, що покращує розуміння інформації. Діти вчаться усвідомлювати важливість статистичних даних у житті суспільства, у них розширюється словниковий запас слів.</p> <p>Словник-довідник <i>Перепис населення</i> — це унікальний процес, який включає збір, обробку, аналіз і публікацію демографічних, економічних та соціальних даних про людей, що проживають на певній території протягом визначеного періоду часу. <i>Область</i> — адміністративно-територіальна одиниця держави. <i>Авдіївка</i> — місто в Донецькій області. <i>Березань</i> — місто в Київській області. <i>Генічеськ</i> — місто в Херсонській області. <i>Ізяслав</i> — місто в Хмельницькій області.</p>
<p>Відповідь: в Авдіївці проживає 37210 мешканців; у Березані – 17367 мешканців; у Генічеську – 21793 мешканці; у Ізяславі – 18444 мешканці.</p>	

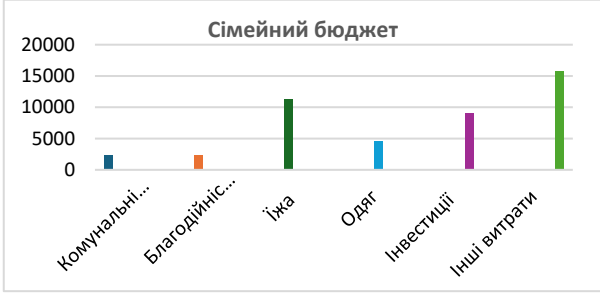

Рис. 2

Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).

Задача 2. В українській родині Мартинюків місячний бюджет становить 45000 грн. На оплату комунальних платежів родина витратила $\frac{1}{20}$ бюджету, на благодійність — ще $\frac{1}{20}$, на їжу - $\frac{1}{4}$ бюджету, на одяг - $\frac{1}{10}$ бюджету. Яка частина бюджету залишилася для інших витрат (на проїзд у громадському транспорті; на відвідування кіно; допомогу ЗСУ тощо), якщо сім'я інвестує $\frac{1}{5}$ частину бюджету? Побудуй стовпчасту та кругову діаграми і проаналізуй витрати української сім'ї.

Авторські рекомендації до задачі подані у таблиці 2.

Таблиця 2. Авторські рекомендації до задачі 2

Розв'язання	Методичний коментар
<p>1. Створення математичної моделі (математизація)</p> <p>За умовою задачі в українській родині місячний бюджет становить 45000 грн. На оплату комунальних платежів сім'я витратила $\frac{1}{20}$ бюджету, на благодійність — ще $\frac{1}{20}$, на їжу — $\frac{1}{4}$ бюджету, на одяг — $\frac{1}{10}$ бюджету. Сім'я також інвестує $\frac{1}{5}$ частину бюджету.</p> <p>Маємо виконати дію знаходження дробу від числа. Тобто обчислити вирази:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Комунальні платежі — $\frac{1}{20} \cdot 45000$; • Благодійність — $\frac{1}{20} \cdot 45000$; • Їжа — $\frac{1}{4} \cdot 45000$; • Одяг — $\frac{1}{10} \cdot 45000$; • Інвестиції — $\frac{1}{5} \cdot 45000$. <p>2. Математичне опрацювання</p> <p>Вимагає виконання дії. Складаємо всі витрати: $2250+2250+11250+4500+9000=29250$ (грн). Обчислимо залишок для інших важливих витрат. Від загального бюджету віднімемо отриману суму: $45000 - 29250 = 15750$ (грн). Відповідь: родина Мартинюків на інші важливі витрати виділяє 15750 грн.</p>  <p>Рис. 3</p> <p>Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).</p>  <p>Рис. 4</p> <p>Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).</p> <p>3. Інтерпретація отриманих результатів.</p> <p>Згідно з проведеним аналізом, сім'я витратила:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Комунальні платежі: 5 % бюджету. • Благодійність: 5 % бюджету. • Їжа: 25 % бюджету. • Одяг: 10 % бюджету. • Інвестиції: 20 % бюджету. <p>Залишок у 35 % бюджету свідчить про те, що родина має можливість виділити певні кошти на інші витрати, що є важливим для відновлення сил та підтримки психоемоційного стану.</p>	<p>Під час розв'язання задачі важливо підкреслити важливість участі кожного члена родини у фінансових рішеннях, що формує в учнів усвідомлення їхньої ролі в суспільстві. Вони мають зрозуміти, що їхні рішення стосуються не лише їх самих, але й громади в цілому.</p> <p>Учні мають розуміти, що витрати на благодійність та освіту є важливими для розвитку суспільства. Таким чином учні усвідомлюють важливість допомоги іншим, у них формуються почуття соціальної справедливості.</p> <p>Отримана інформація стимулює учнів до обдумування своїх можливостей допомагати іншим, формує в них бережне ставлення до грошей як до інструменту для досягнення цілей у суспільстві.</p> <p>У них формується уявлення про бюджет, заощадження та інвестиції, що допоможе згодом стати фінансово грамотними громадянами.</p> <p>Словник-довідник</p> <p>Бюджет — план доходів та витрат на певний період.</p> <p>Витрати — сума грошей, яка витрачається на споживання або послуги.</p> <p>Благодійність — діяльність, що має на меті допомогу тим, хто цього потребує.</p> <p>Комунальні платежі — витрати за надані послуги (електрика, вода, газ, опалення тощо).</p> <p>Фінансова грамотність — знання та навички, необхідні для управління особистими фінансами.</p> <p>Розваги — діяльність, що приносить задоволення та відпочинок (відвідування театру, екскурсій тощо).</p> <p>Інвестиції — використання коштів з метою отримання прибутку в майбутньому.</p> <p>Соціальна відповідальність — усвідомлення та готовність діяти на благо суспільства.</p>

Задача 3. Виконай дії та дізнайся ім'я й прізвище відомого політичного діяча України початку ХХ століття. [3].
Авторські рекомендації до задачі подані у таблиці 3.

+	1	4	5	6	7	8	9				
		8	8	4	7	8	7				
		И	Х	А	М	Й	О	Л			
	1	2	3	4	5	6	7				
-	7	2	4	6	8	6	7	5	0	0	
	1	4	5	6	7	2	3	8	7	2	
		Е	С	К	И	Г	Ш	У	В	Р	Ь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	*
											Й



Рис. 5

Джерело: складено авторами на основі (Бех та ін., 2007).

Знайди в Інтернеті інформацію про цього політичного діяча.

Таблиця 3. Авторські рекомендації до задачі 3

Розв'язання	Методичний коментар																																																																																																																								
<p>1. Створення математичної моделі (математизація) За умовою задачі потрібно обчислити значення виразів і дізнаються як звати політичного діяча.</p> <p>2. Математичне опрацювання Виконуємо вказані дії.</p> <p>3. Інтерпретація отриманих результатів Відповідь: ім'я і прізвище відомого українського політичного діяча Михайло Грушевський.</p> <table border="1"> <tr><td>+</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>8</td><td>8</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>7</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>И</td><td>Х</td><td>А</td><td>М</td><td>Й</td><td>О</td><td>Л</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>М</td><td>И</td><td>Х</td><td>А</td><td>Й</td><td>Л</td><td>О</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>7</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>5</td><td>4</td><td>9</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>Е</td><td>С</td><td>К</td><td>И</td><td>Г</td><td>Ш</td><td>У</td><td>В</td><td>Р</td><td>Ь</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>0</td><td>*</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>Г</td><td>Р</td><td>У</td><td>Ш</td><td>Е</td><td>В</td><td>С</td><td>Ь</td><td>К</td><td>И</td><td>Й</td></tr> </table>	+	1	4	5	6	7	8	9					8	8	4	7	8	7					И	Х	А	М	Й	О	Л			1	2	3	4	5	6	7					М	И	Х	А	Й	Л	О			7	2	4	6	8	6	7	5	0	0		1	4	5	6	7	2	3	8	7	2		5	4	9	0	1	4	3	6	2	8			Е	С	К	И	Г	Ш	У	В	Р	Ь		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	*			Г	Р	У	Ш	Е	В	С	Ь	К	И	Й	<p>Знайомство з відомими постатями, такими як Михайло Грушевський, допомагає учням усвідомити важливість історії своєї країни. Михайло Грушевський був значущою фігурою в українському національному відродженні, його внесок у розвиток державності та культури є важливим для формування національної ідентичності.</p> <p>Цікаві факти про Михайла Грушевського</p> <ul style="list-style-type: none"> • Михайло Грушевський був першим президентом Української Народної Республіки (УНР) у 1917 році, хоч і не був формально обраний на цю посаду. • Він був відомим істориком, автором численних праць, серед яких "Історія України-Руси", яка стала класичним джерелом з історії України. • Михайло Грушевський активно досліджував українську культуру, мову та фольклор, вважаючи їх важливими складовими національної ідентичності. • Він брав участь у політичному житті України, заснував Українську соціал-демократичну партію і був одним із засновників Центральної Ради. • Грушевський залишив після себе величезну наукову спадщину, що включає більше 300 наукових праць, статей і монографій. Він активно підтримував розвиток української освіти та культури, був одним із засновників Української академії наук.
+	1	4	5	6	7	8	9																																																																																																																		
		8	8	4	7	8	7																																																																																																																		
		И	Х	А	М	Й	О	Л																																																																																																																	
	1	2	3	4	5	6	7																																																																																																																		
		М	И	Х	А	Й	Л	О																																																																																																																	
	7	2	4	6	8	6	7	5	0	0																																																																																																															
	1	4	5	6	7	2	3	8	7	2																																																																																																															
	5	4	9	0	1	4	3	6	2	8																																																																																																															
		Е	С	К	И	Г	Ш	У	В	Р	Ь																																																																																																														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	*																																																																																																														
		Г	Р	У	Ш	Е	В	С	Ь	К	И	Й																																																																																																													

Задача 4. У Карпатах ростуть ялини. У процесі свого зростання ялина поглинає з повітря 1,84 т вуглекислого газу, із землі 0,55 т води та 0,03 т мінеральних речовин, а виділяє в атмосферу 1,42 т кисню. На скільки збільшується маса ялини? Авторські рекомендації до задачі подані у таблиці 4.

Таблиця 4. Авторські рекомендації до задачі 4

Розв'язання	Методичний коментар
<p>1. Створення математичної моделі (математизація) За умовою задачі у процесі росту ялина поглинає 1,84 т вуглекислого газу, із землі 0,55 т води і 0,03 т мінеральних речовин. Виділяє в атмосферу 1,42 т кисню. Вуглекислий газ – 1,84 т. Вода – 0,55 т. Мінеральні речовини – 0,03 т. Кисень – 1,42 т. Збільшення маси ялини можна виразити через масу поглинутих речовин та виділеного кисню: $m_{\text{ялини}} = (m_{\text{вуглекислий газ}} + m_{\text{вода}} + m_{\text{мінеральні речовини}}) - m_{\text{кисень}}$</p>	<p>Під час розв'язання задачі слід звернути увагу учнів на важливість рослин у природі, їх роль у поглинанні вуглекислого газу та виділенні кисню, що сприяє очищенню повітря. Розуміння екологічних процесів створює в учнів відповідальність за навколишнє середовище, що є важливим аспектом активного громадянства. Має викликати почуття гордості за свою країну та її природні багатства.</p> <p>Словник-довідник <i>Ялина</i> — вид хвойного дерева, яке росте в гірських районах і є важливою частиною екосистеми. <i>Вуглекислий газ (CO₂)</i> — газ, що міститься в атмосфері, який поглинається рослинами під час фотосинтезу. <i>Мінеральні речовини</i> — елементи, які рослини поглинають із ґрунту і які є необхідними для їхнього росту та розвитку (наприклад, калій, фосфор).</p>

<p>Маємо математичну задачу: обчислити значення виразу.</p> <p>2. Математичне опрацювання</p> <p>Згідно умови задачі маємо: $m_{\text{ялини}} = (1,84 + 0,55 + 0,03) - 1,42 = 1 \text{ (т)}$.</p> <p>3. Інтерпретація отриманих результатів</p> <p>Відповідь: у процесі росту маса ялини збільшується на 1 т.</p>	<p><i>Кисень (O₂)</i> — газ, який виділяється рослинами в процесі фотосинтезу і є життєво важливим для багатьох живих організмів.</p> <p><i>Карпати</i> — гірська система в Центрально-Східній Європі, що простягається територією України, Польщі, Словаччини, Румунії та Угорщини; відома своїми лісами, зокрема ялинами, та природними красотою. Улюблене місце відпочинку українців.</p>
--	---

Задача 5. Різдвяну пісню українського композитора Миколи Леонтовича «Щедрик» співають у всьому світі.

Обчисли значення виразу $1914 \frac{7}{12} + x : 1 \frac{1}{7} - \frac{3}{8} y$, якщо $x = 2 \frac{2}{7}$, $y = 1 \frac{5}{9}$, та дізнайся рік першого виконання твору. Що ви знаєте про даний музичний твір?

Авторські рекомендації до задачі подані у таблиці 5.



Таблиця 5. Авторські рекомендації до задачі 5

Розв'язання	Методичний коментар
<p>1. Створення математичної моделі (математизація)</p> <p>За умовою задачі дано вираз $1914 \frac{7}{12} + x : 1 \frac{1}{7} - \frac{3}{8} y$, де $x = 2 \frac{2}{7}$, $y = 1 \frac{5}{9}$.</p> <p>Необхідно підставити значення x та y у вираз і обчислити його значення.</p> <p>2. Математичне опрацювання</p> $1914 \frac{7}{12} + 2 \frac{2}{7} : 1 \frac{1}{7} - \frac{3}{8} \cdot 1 \frac{5}{9} =$ $= \frac{22975}{12} + \frac{16}{7} : \frac{8}{7} - \frac{3}{8} \cdot \frac{14}{9} =$ $= \frac{22975}{12} + \frac{16}{7} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} =$ $= \frac{22975}{12} + 2 - \frac{7}{12} = 1916 \text{ (р.)}$ <p>3. Інтерпретація отриманих результатів</p> <p>Відповідь: вперше музичний твір «Щедрик» прозвучав на весь світ у 1916 р.</p>	<p>Ознайомлення учнів з творчістю українських композиторів, таких як Микола Леонтович, формує в учнів почуття гордості за національну культуру.</p> <p>«Щедрик» є символом української музичної традиції, який популяризує українську культуру в усьому світі. Це музичний шедевр, яким захоплюється весь світ.</p> <p>Словник-довідник</p> <p><i>Щедрик</i> — українська різдвяна пісня, написана композитором Миколою Леонтовичем.</p> <p><i>Микола Леонтович</i> — український композитор і хоровий диригент, автор численних творів.</p> <p><i>Культурна спадщина</i> — сукупність культурних цінностей, традицій та звичаїв, які передаються з покоління в покоління.</p> <p><i>Музичний твір</i> — композиція, створена для виконання музичними інструментами або голосом.</p>

Задача 6. З 01 червня 2021 року в Україні був прийнятий закон про обмеження використання пластикових пакетів. Розв'язавши задачу дізнайся, чому важливо здавати папір, пластик і метал на переробку, замість того щоб викидати їх у сміття.

Папір розкладається в природі приблизно за 4 роки. Час розкладання алюмінієвої банки становить 2000 % від часу розкладання паперу, що в рази більше, ніж для паперу. Пластикова кришка розкладається на 500 % від часу розкладання алюмінієвої банки, а пластиковий пакет — на 125 % від часу розкладання пластикової кришки. Скільки років знадобиться для розкладання пластикового пакета в природі? Запропонуй ідеї для збереження довкілля, щоб наша країна була екологічно чистою.

Авторські рекомендації до задачі подані у таблиці 6.

Таблиця 6. Авторські рекомендації до задачі 6

Розв'язання	Методичний коментар
<p>1. Створення математичної моделі (математизація)</p> <p>За умовою задачі дано:</p> <p>Час розкладання паперу — 4 роки.</p> <p>Час розкладання алюмінієвої банки — 2000 % від часу розкладання паперу.</p> <p>Час розкладання пластикової кришки — 500 % від часу розкладання алюмінієвої банки.</p> <p>Час розкладання пластикового пакета — 125 % від часу розкладання пластикової кришки.</p> <p>Маємо математичну задачу на знаходження числа за величиною процента.</p> <p>2. Математичне опрацювання</p> <p>1) $4 : 100 \cdot 2000 = 80 \text{ (р.)}$ — час розкладання алюмінієвої банки;</p> <p>2) $80 : 100 \cdot 500 = 400 \text{ (р.)}$ — час розкладання пластикової кришки;</p> <p>3) $400 : 100 \cdot 125 = 500 \text{ (р.)}$ — час розкладання пластикового пакета.</p>	<p>Розв'язавши задачу, учні мають дізнатися про тривалість розкладання різних матеріалів, що підкреслює серйозність проблеми відходів. Вони мають усвідомити, що неправильне поводження з відходами може призвести до екологічних катастроф.</p> <p>Ось чому важливо здавати папір, пластик і метал на переробку. Тому їх дії можуть мати реальні наслідки для екології, чистоти довкілля.</p> <p>Розуміння важливості чистоти в країні — це любов до рідної землі, збереження природи — це патріотичний обов'язок.</p> <p>Словник-довідник</p> <p><i>Екологічна свідомість</i> — усвідомлення важливості захисту навколишнього середовища і відповідальність за його стан.</p> <p><i>Переробка</i> — процес перетворення відходів на нові матеріали або продукти, що дозволяє зменшити обсяги сміття та зберегти природні ресурси.</p>

<p>Відповідь: для розкладання пластикового пакета в природі потрібно 500 років.</p> <p>3. Інтерпретація отриманих результатів</p> <p>Після розв'язання задачі учням можна запропонувати обговорити та запропонувати власні ідеї для збереження довкілля. Ось кілька можливих варіантів:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Зменшення використання пластику. ➤ Сортуння сміття. ➤ Посадка дерев. ➤ Ініціювати проекти для очищення місцевих водойм, парків, обочин доріг. 	<p>Відходи — матеріали, які більше не потрібні і викидаються, часто без думки про їхній вплив на природу.</p> <p>Сортуння сміття — процес розділення відходів на різні категорії (папір, пластик, метал, органічні відходи) для подальшої переробки або утилізації.</p> <p>Збереження довкілля — діяльність, спрямована на охорону природних ресурсів і екосистем, що забезпечує збереження природи для майбутніх поколінь.</p>
--	--

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Формування громадянської ідентичності під час навчання математики учнів 5-6 класів є важливим завданням сучасної освіти, що набуває особливої актуальності в умовах глобалізації та соціальних змін. У процесі дослідження нами встановлено, що громадянська ідентичність — складне та багатогранне поняття, яке включає в себе не лише правові, але й моральні, культурні та соціальні аспекти. Нормативні освітні документи, такі як державний стандарт і модельні програми, підкреслюють важливість формування громадянських цінностей у молодшому шкільному віці, закладаючи основи для активної участі учнів у житті суспільства. Формування громадянської ідентичності під час навчання математики передбачає інтеграцію навчальних матеріалів, що відображають реальні соціальні проблеми, а також використання методів, які сприяють розвитку критичного мислення та емоційного інтелекту. Таким чином учні отримують не лише математичні знання, а й усвідомлюють їхню значущість у повсякденному громадському житті.

Одним із засобів формування в учнів 5-6 класів громадянської ідентичності є розв'язання практико-орієнтованих завдань та прикладних задач, сюжети яких відображають громадянське життя в Україні. Важливо, щоб цей процес супроводжувався змістовним інформаційним контентом, а освітні програми підготовки майбутніх учителів математики продовжували адаптуватися до сучасних викликів, забезпечуючи учням знання та навички, необхідні для активної участі у житті України.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Відкритий Православний Університет (n.d.). Громадянська ідентичність. URL: <https://oou.org.ua/2021/11/15/gromadyanska-identychnist/>
- Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України № 898, ВР (2020, 20 вересня). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text>
- Закону України «Про освіту» (2017). Офіційний вебпортал парламенту України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/2145-19>
- Істер, Олександр. (2022). *Математика: підруч. для 5 кл. закладів загальної середньої освіти*. Генеза.
- Істер, Олександр. (2023). *Математика: підруч. для 6 кл. закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах. Ч.1)*. Генеза.
- Істер, Олександр. (2023). *Математика: підруч. для 6 кл. закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах. Ч.2)*. Генеза.
- Концепція національно-патріотичного виховання в системі освіти України. (2022). Офіційний вебпортал парламенту України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/v0527729-22>
- Мерзляк, А.Г., Номіровський, Д.А., Пихтар, М.П., Рубльов, Б.В., Семенов, В.В., & Якір, М.С. (2021). *Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти*. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Merzlyak.ta.in.14.07.pdf>
- Модельні навчальні програми. (2021). Інститут модернізації змісту освіти. URL: <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/>
- Нова українська школа: Концептуальні засади реформування середньої школи. Ухвалений рішенням колегії МОН України, (2016, 27 жовтня). URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
- Резнік, О. С. (2006). Громадянська ідентичність. Енциклопедія Сучасної України. <https://esu.com.ua/article-31975>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Vidkrytyi Pravoslavnyi Universytet (n.d.). Hromadianska identychnist [Civic Identity]. URL: <https://oou.org.ua/2021/11/15/gromadyanska-identychnist/> (in Ukrainian).
2. State Standard of Basic and Complete General Secondary Education: Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 898, Verkhovna Rada (2020, September 20). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text> (in Ukrainian).
3. Law of Ukraine "On Education" [Law of Ukraine "On Education"] (2017). Ofitsiyni vebportal parlamentu Ukrainy. URL: https://libr.luguniv.edu.ua/wp-content/uploads/2020/10/ZU_pro-osvitu.pdf (in Ukrainian).
4. Ister, Oleksandr. (2022). Mathematics: textbook for 5 classes of general secondary education institutions. Geneva. (in Ukrainian).
5. Ister, Oleksandr. (2023). Mathematics: textbook for 6 classes of general secondary education institutions (in 2 parts. Part 1). Geneva. (in Ukrainian).
6. Ister, Oleksandr. (2023). Mathematics: a textbook for 6 grades of secondary education institutions (in 2 parts. Part 2). Geneva. (in Ukrainian).
7. Kontseptsiiia natsionalno-patriotichnoho vykhovannia v systemi osvity Ukrainy [The Concept of National-Patriotic Education in the Education System of Ukraine]. (2022). Ofitsiyni vebportal parlamentu Ukrainy. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/v0527729-22> (in Ukrainian).
8. Merzlyak, A.G., Nomirovsky, D.A., Pykhtar, M.P., Rublev, B.V., Semenov, V.V., & Yakir, M.S. (2021). Model curriculum "Mathematics. 5-6 grades" for secondary education institutions. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Merzlyak.ta.in.14.07.pdf> (in Ukrainian).
9. Modelni navchalni prohramy [Model curricula]. (2021). Instytut modernizatsii zmistu osvity. URL: <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/> (in Ukrainian).
10. New Ukrainian School: Conceptual Principles of Secondary School Reform. Approved by the Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine, (2016, October 27). URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf> (in Ukrainian).
11. Reznik, O. S. (2006). Hromadianska identychnist [Civic Identity]. Entsiklopediia Suchasnoi Ukrainy – Encyclopedia of Modern Ukraine. <https://esu.com.ua/article-31975>

| Матеріал надійшов до редакції: 15.05.2025 р. | Прийнято до друку: 28.06.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

РЕЦЕНЗІЯ НА КНИГУ: АСТРОФІЗИКА ДЛЯ ТИХ, ХТО ЦІНУЄ ЧАС

Таяна ДЕОРДИЦА ✉

Центр освіти і кар'єри «IT Career HUB», Німеччина
tdeorditsa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3409-7168>

Олена СУХОМОВСЬКА

Лицей № 309, м. Київ, Україна
Olena.Sukhomovska@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-7097-2282>

BOOK REVIEW:

ASTROPHYSICS FOR THOSE WHO VALUE TIME

Taiana DIEORDITSA ✉

Education and Career Center «IT Career HUB», Germany
tdeorditsa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3409-7168>

Olena SUKHOMOVSKA

Lyceum № 309, Kyiv, Ukraine
Olena.Sukhomovska@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-7097-2282>

ABSTRACT

This review examines the effectiveness of Tyson's popularization approach for physics education, focusing on the balance between accessibility and scientific rigour in conveying complex astrophysical concepts to both students and general audiences. It evaluates the pedagogical potential of the book within the Ukrainian secondary school curriculum and offers practical recommendations for its classroom application.

KEYWORDS: science popularization; school physics; didactic potential; motivational tool; critical thinking.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Деордіца Т., Сухомовська О. Рецензія на книгу: Астрофізика для тих, хто цінує час. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 73-75. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-11>.

FOR CITATION: Dieorditsa, T., & Sukhomovska, O. (2025). Book review: Astrophysics for those who value time. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 73-75. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-11>.



Автор: Ніл Деграсс Тайсон (Neil deGrasse Tyson) (<https://neildegassetyson.com>)

Переклад: Денис Пілаш, Максим Сидоренко

Оригінальна назва: *Astrophysics for People in a Hurry* (2017)

Рік видання: 2023

Кількість сторінок: 200

Видавництво: ТОВ «Видавнича група КМ-Букс» (<https://kmbooks.com.ua/>)

ISBN: 978-966-948-008-8

КЛЮЧОВІ СЛОВА: популяризація науки; шкільна фізика; дидактичний потенціал; мотиваційний інструмент; критичне мислення

Популярно-наукові книги не лише залучають молодь до світу досліджень, а й сприяють розвитку критичного мислення. Це є особливо актуальним в умовах зниження інтересу учнів до природничих наук (Захарін, 2025; Дьоміна, 2024; Служба освітнього омбудсмена України, 2023). Яскравим прикладом успішної популяризації науки є книга Ніла Деграсса Тайсона «Астрофізика для тих, хто цінує час». Автор прагне донести складні астрофізичні концепції до широкої аудиторії завдяки зрозумілій мові та яскравим метафорам. Такий спосіб подачі матеріалу робить видання потенційно корисним для освітнього процесу.

У рецензії ми проаналізували доцільність використання цієї книги у шкільному курсі фізики, з'ясували її сильні сторони та можливі обмеження, які слід врахувати. Огляд адресовано насамперед вчителям, які шукають способи зацікавити учнів наукою.

Ніл Деграсс Тайсон — відомий американський астрофізик, популяризатор науки, автор кількох бестселерів і ведучий серіалу «Cosmos» (Tyson et al., 2014). Його стиль відрізняється ясністю, метафоричністю та доступністю викладу. Це робить його книги зрозумілими широкому загалу, хоча іноді — за рахунок наукової точності.

«Астрофізика» охоплює широке коло питань — від еволюції Всесвіту до сучасних космологічних проблем. Кожен розділ присвячений окремій темі; тож їх можна читати у довільному порядку. Такий формат зручний, однак не сприяє цільному уявленню про фізичну картину світу. Учителю варто це врахувати.

До переваг книги належать:

Яскраві порівняння, що легко запам'ятовуються. Наприклад, ранній Всесвіт порівнюється з «киплячим бульйоном з кварків, лептонів та їхніх братів і сестер з антиречовин...» (Тайсон, 2023, с. 12), Чумацький Шлях — із млинцем (с. 121),

а людство — із «зоряним пилом, що з рештою розвинувся до розумного життя» (с. 23). Образи, до яких вдається автор, роблять абстрактні концепції доступними для розуміння та створюють міцні асоціативні зв'язки в пам'яті учнів.

Чесність щодо меж наукових знань. На питання «Що таке темна енергія?» Тайсон прямо відповідає: «Цього не знає ніхто» (с. 94). Аналогічно він визнає обмеженість знань про темну матерію та походження Всесвіту (с. 23, с. 69). Така відкритість створює в учнів розуміння науки як процесу постійного пошуку.

Емоційне включення. Зауваження про те, що сотня мільярдів сонячних нейтрино щосекунди пронизує кожен квадратний дюйм людського тіла (с. 76), перетворює абстрактні фізичні процеси на особисто значущі образи, створюючи відчуття безпосередньої причетності до космічних явищ.

Разом із позитивними рисами, книга має також певні обмеження, про які вчителю важливо знати.

Поверховість викладу. Видання більше мотивує, ніж навчає. Для глибшого розуміння доцільно поєднувати його з вивченням шкільних підручників.

Тематична самостійність розділів. Така структура заважає формуванню цілісної картини фізичних процесів у Всесвіті.

Культурні особливості. Приклади, укорінені в американському культурному контексті, можуть потребувати додаткового пояснення українським учням. Зокрема, згадки про «вулицю Сезам» (с. 180), парад мережі універмагів Мейсі (с. 119) або порівняння маси іридію з автомобілем «Б'юїк» (с. 109) можуть утруднювати сприйняття наукового змісту.

Отже, ці обмеження вимагають адаптації книги до навчального процесу.

Щоб повніше зрозуміти особливості підходу Тайсона, ми порівняли його стиль зі стилем інших знаних популяризаторів науки. Якщо Карл Саган у «Космосі» (2006) надихав красою Всесвіту, а Стівен Гокінг у «Короткій історії часу» (2015) поєднував глибину й точність, то Тайсон робить акцент на лаконічність та несподівані аналогії із повсякденного життя. «Астрофізика» — це радше легкий вступ до тем, що потребують подальшого осмислення. Саме такий підхід здатен пробудити первинний інтерес до астрофізики.

Практичне використання рецензованої книги на уроках фізики може бути різноманітним. По-перше, її доцільно використовувати як мотиваційний інструмент на початку теми: захопливий уривок здатен зацікавити учнів і налаштувати їх на засвоєння матеріалу, що вивчається в основному курсі. По-друге, ефективною є робота з зіставним аналізом: учні можуть досліджувати, як одна й та сама фізична концепція — наприклад, гравітація або структура атома — подається у книзі Тайсона та у шкільному підручнику. Така діяльність розвиває критичне мислення та навичку аналізу джерел. Крім того, видання дозволяє організовувати міждисциплінарні дискусії, оскільки багато сюжетів перетинаються з філософією, біологією та історією науки. Нарешті, аналіз стилістичних прийомів популяризації сприяє формуванню медіаграмотності: учні дізнаються, як особливості тексту — структура, образність та манера викладу — впливають на сприйняття наукових знань.

Огляд книги «Астрофізика для тих, хто цінує час» показав, що вона вдало поєднує наукову достовірність зі зрозумілістю викладу. Тайсон створив вдалий місток між академічною наукою та широкою аудиторією завдяки яскравим образам та оригінальним аналогіям. Рекомендуємо активне, але продумане використання книги: адаптацію найяскравіших прикладів до українського контексту, поєднання з традиційними підручниками, застосування у позакласній роботі. Загальна оцінка: цінний ресурс для збагачення освітнього процесу, здатний суттєво підвищити мотивацію учнів до вивчення природничих наук.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Роботу виконано без зовнішнього фінансування.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Рецензія ґрунтується виключно на аналізі друкованого видання.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

ШІ-технології у роботі не застосовано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гокінг, С. (2015). *Коротка історія часу. Від великого вибуху до чорних дір*. К.І.С. URL: https://shron3.chtyvo.org.ua/Stephen_William_Hawking/Korotka_istoriia_chasu_Vid_velykoho_vybuchu_do_chornykh_dir.pdf?
2. Дьоміна, І. (2024). *Природничі науки не для всіх? Чому в учнів і учениць згасає інтерес до природничих дисциплін і як цьому зарадити*. Нова українська школа. URL: <https://nus.org.ua>.
3. Захарін, С. (2025). *Вирішення проблем природничої освіти: хайп не допоможе*. Освіта.UA. URL: <https://osvita.ua/blogs/94711/>.
4. Саган, К. (2006). *Космос*. Амфора. URL: <https://loveread.ec/book-comments.php?book=73378>.
5. Служба освітнього омбудсмена України (2023). *Освітні втрати учнів в Україні та світі зросли: результати міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022*. URL: <https://eo.gov.ua/?s=освітні+втрати>.
6. Тайсон, Н. (2023). *Астрофізика для тих, хто цінує час*. КМ-Букс.
7. Tyson, N. (Host), Brannon, B., & Drucker, A. (Directors). (2014). *Cosmos: A spacetime odyssey* [TV series]. National Geographic Channel. URL: <https://uaserials.film/1355-kosmos-podorozh-u-prostori-ta-chasi.html>.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Hoking (Hawking), S. (2015). *Kоротка istoriia chasuo. Vid velykoho vybukhu do chornykh dir (A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes)*. K.I.S. URL: https://chtyvo.org.ua/authors/Stephen_William_Hawking/Kоротка_istoriia_chasu_Vid_velykoho_vybukhu_do_chornykh_dir/ (In Ukrainian).
2. Domina, I. (2024). *Pryrodnychi nauky ne dlia vsikh? Chomu v uchniv i uchenyts zghasaie interes do pryrodnychychk dystsyplyn i yak tsomu zaradyty (Natural sciences not for everyone? Why students lose interest in natural science disciplines and how to address this)*. Nova ukrainska shkola. URL: <https://nus.org.ua/> (In Ukrainian).
3. Zakharin, S. (2025). *Vyrishennia problem pryrodnychoi osvity: khaip ne dopomozhe (Solving problems in science education: hype won't help)*. Osvita.UA. URL: <https://osvita.ua/blogs/94711/> (In Ukrainian).
4. Sagan, K. (2006). *Kosmos (Cosmos)*. Amfora. URL: <https://loveread.ec/book-comments.php?book=73378> (In Ukrainian).
5. Sluzhba osvitnoho ombudsmena Ukrainy (Educational Ombudsman Service of Ukraine) (2023). *Osvitni vtraty uchniv v Ukraini ta sviti zrosly: rezultaty mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2022 (Educational losses of students in Ukraine and the world have increased: results of the international study on education quality PISA-2022)*. URL: <https://eo.gov.ua/?s=освітні+втррати> (In Ukrainian).
6. Taison (Tyson), N. (2023). *Astrofizyka dlia tykh, khto tsiniuie chas (Astrophysics for Those Who Value Time)*. KM-Buks. (In Ukrainian).
7. Tyson, N. (Host), Brannon, B., & Drucker, A. (Directors). (2014). *Cosmos: A spacetime odyssey* [TV series]. National Geographic Channel. URL: <https://uaserials.film/1355-kosmos-podorozh-u-prostori-ta-chasi.html>.

| Матеріал надійшов до редакції: 15.05.2025 р. | Прийнято до друку: 26.06.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А		М	
Авдонін К.	13	Мартинюк К.	65
Авуа Ф.К.	6		
Ачемпонг Ф.А.	6	Р	
Б		Решітник Ю.	30
Білик К.	30	С	
Бохонов Ю.	18	Семеніхіна О.	59
В		Синявська О.	40
Витвицька О.	23	Сорока М.	59
Г		Сухіх А.	45
Гнатюк О.	30	Сухошовська О.	73
Д		Т	
Деордіца Т.	73	Тимків І.	23
К		Тихоненко Ю.	52
Колмакова В.	30	Ш	
Курченко О.	40	Шамоня В.	59
		Швець В.	65
		Школьний О.	52

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fiziko-matematična osvita

Abbreviated key title: Fiz.-mat. osv.

Том 40, № 4

2025

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск

О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка

О.М. Удовиченко

Ідентифікатор медіа:

R30-02975

<https://fmo-journal.org/>

Підп. до друку 29.09.2025.

Формат 60x84/8. Гарнітура Calibri. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 8,9.
Ум. фарб.-відб. 8,9. Обл.-вид. арк. 8,3. Тираж 50 пр. Вид. №40

Видавець:

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
40002, м.Суми, вул.Роменська, 87
Тел. (0542) 68-59-15, (0542) 68-59-72; rector@sspu.edu.ua
Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Виготовлювач:

ФОП Цьома С.П. 40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.
Тел.: 066-293-34-29.
Зам. № 43

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК, № 5050 від 23.02.2016.