Придуха Аліна
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
pridukha97@mail.ru
Науковий керівник – О. П. Страх

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ

Передумови для появи теорії диференціальних рівнянь склалися в другій половині XVII століття, коли математики наблизилися до усвідомлення взаємно оберненого характеру двох основних операцій аналізу нескінченно малих величин – диференціювання та інтегрування. Саме в цей час вперше почали опубліковувати роботи з розглядом рівнянь Якопо Ріккаті.

Означення 1. Рівняння Рікатті – це звичайне диференціальне рівняння виду:

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 \tag{1}$$

де $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ – неперервні на деякому інтервалі функції.

Диференціальні рівняння Ріккаті мають зв'язок з групою дробово-лінійних перетворень. Цей зв'язок можна показати за допомогою теореми.

Теорема 1. *Загальний розв'язок рівняння Ріккаті є дробово-лінійною функцією від сталої інтегрування. І навпаки: будь-яке диференціальне рівняння першого порядку, яке має цю властивість, є рівнянням Ріккаті* [1, *с.* 4]

Доведення. Нехай y_1 – частковий розв'язок рівняння (1). За допомогою заміни змінної $y = y_1 + z$ зведемо рівняння до вигляду, що не містить вільний член:

$$(y_1 + z)' = q_0(x) + q_1(x)(y_1 + z) + q_2(x)(y_1 + z)^2$$

$$q_0(x) + q_1(x)y_1 + q_2(x)y_1^2 + z'$$

$$= q_0(x) + q_1(x)y_1 + q_1(x)z + q_2(x)y_1^2 + 2q_2(x)y_1z + q_2(x)z^2$$

$$z' = \big(2q_2(x)y_1(x) + q_1(x)\big)z + q_2(x)z^2,$$

яке, за допомогою заміни $z = \frac{1}{u}$, зводиться до лінійного рівняння:

$$u' + \big(2q_2(x)y_1(x) + q_1(x)\big)u = -q_2(x) \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд:

$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$

де *C* – стала інтегрування. Тоді отримуємо, що:

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi + \psi} \tag{3}$$

Таким чином, отриманий розв'язок (3) даного диференціального рівняння (1) є дробово-лінійною функцією від сталої інтегрування *C* і теорему доведено.

З доведення попереднього результату видно, що у випадку, коли відомий частковий розв'язок рівняння Ріккаті, загальний вигляд цього рівняння отримується через зведення його до вигляду рівняння Бернуллі, а відтак і до лінійного рівняння (як рівняння (2)) [2]. Таким чином, основним методом розв'язання рівняння Ріккаті (1) є відшукання його часткового розв'язку y_1 і, шляхом заміни змінної $y = y_1 + \frac{1}{z}$, зведення рівняння до лінійного.

Означення 2. Рівняння Ріккаті, що має вигляд:

$$y' = ay^2 + bx^\alpha$$

де (a, b, α) – деякі сталі, називається спеціальним рівнянням Ріккаті.

Поряд з одновимірним скалярним випадком рівняння Ріккаті (1) розглядають також відповідне матричне рівняння – це рівнянням виду:

$$\frac{dX}{dt} = XA(t)X + \ B_1(t)X + XB_2(t) + C(t).$$

Тут невідомою є деяка $(n \times n)$-вимірна матриця X, а A, B_1, B_2, C – задані $(n \times n)$-вимірні матриці, із залежними від змінної t коефіцієнтами.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування рівнянь Ріккаті щодо знаходження часткового розв'язку та інтегрування рівнянь у випадку коли частковий розв'язок – відомий.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4 \tag{4}$$

Розв'язання

Це рівняння є рівнянням Ріккаті. Методом підбору спробуємо знайти частковий розв'язок заданого рівняння (4). Нехай він має вигляд $y_1(x) = ax^b$, де a та b – деякі числа. Виконавши таку підстановку маємо:

$$abx^{b+1} + ax^{b+1} + a^2x^{2b+2} = 4 \tag{5}$$

Далі, оскільки рівняння (5) є квадратним відносно змінної x для кожного показника степеня $b \neq -1$, то виконання цієї рівності для кожного значення змінної можливе лише тоді, коли $b = -1$. Звідси отримуємо рівність:

$$a^2 = 4,$$

тобто $a = \pm 2$ і часткові розв'язки рівняння (4) мають вигляд $y_{1,2} = \pm\frac{2}{x}$.

Нехай $a = 2$. Тоді виконаємо заміну в рівнянні (4) типу $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$:

$$x^2\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}\right) + x\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z}\right) + x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4,$$

$$-x^2\frac{z'}{z^2} + x\frac{1}{z} + 4x\frac{1}{z} + x^2\frac{1}{z^2} = 0,$$

помноживши останнє рівняння на $-\frac{z^2}{x^2}$, маємо лінійне рівняння:

$$z' - \frac{5}{x}z = 1$$

Проінтегрувавши його, отримаємо розв'язок:

$$z = Cx^5 - \frac{x}{4}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}.$$

Більш того, отримані часткові розв'язки $y_1 = \frac{2}{x}$ та $y_2 = -\frac{2}{x}$ отримуються із загального розв'язку при значеннях сталої $C = \infty$ та $C = 0$ відповідно.

Інтегральні криві даного рівняння, що відповідають значенням сталої: $C \in \left\{1, -3, \frac{2}{3}, -7\right\}$ зображено нижче (рис. 1).

Приклад 2*:* Зінтегрувати рівняння Ріккаті

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2 \tag{6}$$

Знаючи, що воно має розв'язок виду $y_1(x) = ax + b$.

Розв'язання

Оскільки відомо, що частковий розв'язок $y_1(x)$ має вигляд: $y_1(x) = ax + b$, то для знаходження невизначених коефіцієнтів виконаємо підстановку його в рівняння (6). Маємо

$$ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 = -x^2,$$

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 + 2b(a-1)x + b^2 - b = 0$$

Таким чином, з рівності 2-х многочленів маємо значення пар параметрів з наступної множини: $(a, b) \in \{(1,1),\ (1,0)\}$. Тобто частковими розв'язками рівняння (6) є функції $y_1(x) = x + 1,\ y_2(x) = x$.

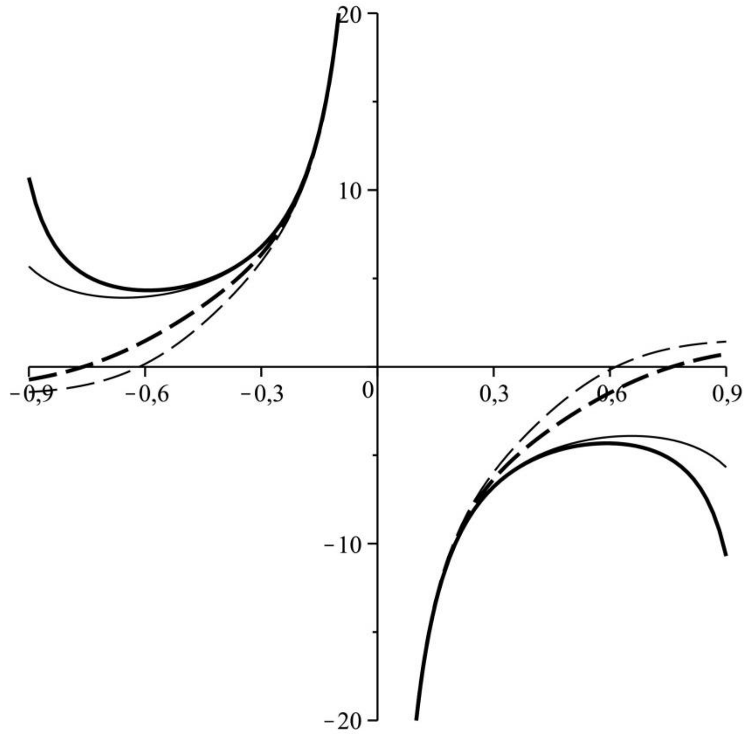

Рис. 1[1]

Нехай маємо частковий розв'язок $y_1(x) = x + 1$. Виконавши заміну $y = x + 1 + \frac{1}{z}$, отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - (2x+1)\left(x + 1 + \frac{1}{z}\right) + \left(x + 1 + \frac{1}{z}\right)^2 = -x^2,$$

або

$$z' + z\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Проінтегрувавши, знаходимо: $z = 1 + \frac{C}{x}$.

Таким чином, отримуємо загальний розв'язок даного рівняння Ріккаті (6):

$$y = x + \frac{x}{x + C}.$$

Більш того, отримані часткові розв'язки $y_1 = x + 1$, та $y_2 = x$ отримуються із загального розв'язку при значеннях сталої $C = 0$ та $C = \infty$ відповідно.

Інтегральні криві даного рівняння, що відповідають значенням сталої: $C \in \{-1,\ 1,\ 0,\ \infty\}$, зображено нижче (рис. 2).

Приклад 3*:* Розв'язати рівняння Ріккаті

$$xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2. \tag{7}$$

<u>Розв'язання</u>

Спробуємо знайти частковий розв'язок $y_1(x)$ рівняння (7) у вигляді лінійної функції: $y_1(x) = ax + b$ і для знаходження невизначених коефіцієнтів виконаємо підстановку його в рівняння (6). Маємо

$$ax = (ax + b)^2 - 3(ax + b) + 4x^2 + 2$$
$$(a^2 + 4)x^2 + 2a(b - 2)x + b^2 - 3b + 2 = 0$$

Таким чином, з рівності 2-х многочленів маємо наступні значення параметрів: $a = \pm 2i,\ b = 2$. Тобто частковими розв'язками рівняння (7) є функції

---

[1] Тут і надалі для графічних зображень використано пакети візуалізації програми математичного моделювання Maple 13.

$y_{1,2}(x) = 2 \pm 2ix$. Тоді, виконавши заміну $y = 2 - 2ix + \frac{1}{z}$, отримуємо лінійне неоднорідне рівняння:

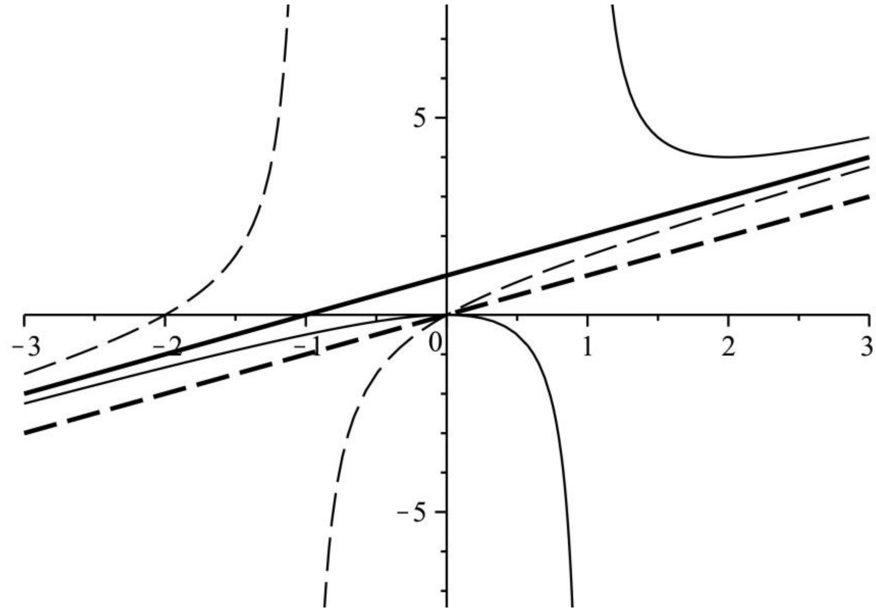

Рис. 2

$$x\left(-2i - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(2 - 2ix + \frac{1}{z}\right)^2 - 3\left(2 - 2ix + \frac{1}{z}\right) + 4x^2 + 2,$$

або

$$z' + \frac{1 - 4ix}{x} z = -\frac{1}{x},$$

звідки отримуємо:

$$z(x, C) = e^{-\int \frac{1-4ix}{x} dx}\left(C - \int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1-4ix}{x} dx} dx\right) = \frac{Ce^{4ix}}{x} + \frac{1}{4ix}.$$

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння Ріккаті (7) має вигляд:

$$y = 2 - 2ix + \frac{4ix}{4iCe^{4ix} + 1},$$

тобто маємо суто комплексні розв'язки цього диференціального рівняння. Більш того, отримані часткові розв'язки $y_1 = 2 + 2ix$, та $y_2 = 2 - 2ix$ отримуються із загального розв'язку при значеннях сталої $C = 0$ та $C = \infty$ відповідно.

Список використаних джерел

1. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении, – М.: Факториал, 1998. – 350 с.

2. Методы решения физико-математических задач. Дифференциальные уравнения Риккати [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://1cov-edu.ru/differentsialnye-uravneniya/rikkati/

3. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник (2-ге вид., перероб. і доп.). / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

4. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие (2-е изд., перераб.) / Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

Анотація. Придуха А. Про один метод розв'язування диференціальних рівнянь Ріккаті. *У цій статті викладено основні означення щодо диференціальних рівнянь Ріккаті. Розглянуто основну властивість загального розв'язку скалярного* *рівняння Ріккаті, щодо перетворення його в диференціальне рівняння Бернуллі та лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Наведено чисельні приклади.*

Ключові слова: *диференціальне рівняння Ріккаті, загальний розв'язок диференціального рівняння, частковий розв'язок.*

Abstract. Prydukha A. About one method for solving the Rikkati equations. *The article gives the basic definitions of the Riccati differential equations. The main property of the general solution of the Riccati scalar equation in relation to its transformation into the Bernoulli differential equation and the first order linear nonhomogeneous differential equation is considered. Numerous examples are given.*

Key words: *Riccati differential equation, the general solution of the Riccati equation, particular solution.*

Приходько Олена

Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»

elena95aleksandrova@gmail.com

Науковий керівник – О.О. Одінцова

РОЗВИТОК ПРОСТОРОВОЇ УЯВИ УЧНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

При вивченні предметів курсу середньої і старшої школи учні повинні не тільки опанувати основами різних наук, але й ознайомитися з основами виробничих процесів. Отже актуальності набуває питання розвитку навичок з побудови та читання креслень, необхідних і інженеру, і архітектору, і будь-якому кваліфікованому робітнику-новатору. У світлі цих завдань важливе місце займає проблема розвитку просторових уявлень на уроках математики, зокрема, планіметрії та стереометрії.

На даний час, науково технічний прогрес спонукає вчителів до застосування інформаційно-комунікативних технологій (ІКТ) та програм динамічної математики на уроках стереометрії, що безумовно мають позитивний вплив на розвиток просторової уяви в учнів. Застосування таких програм, як GRAN 3D, GeoGebra, Maple, «Живая геометрия», та інших, у навчальному процесі надає можливість створити динамічні моделі для ілюстрації, візуалізації та демонстрації різних математичних понять, означень, теорем, моделей плоских фігур, а також просторових фігур та їх розгорток.

Проблемами впровадження сучасних ІКТ у навчанні математики займалися такі дослідники, як, В. І. Клочко, М. Б. Ковальчук, В. М. Ракута, М. І. Жалдак [1] та багато інших науковців. Результати досліджень цих науковців показують, що впровадження ІКТ у навчальний процес дозволяє розширити можливості вчителя у реалізації дидактичних принципів та сприяти активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, але готові конструкції знижують мобільність просторового мислення, тобто учні не зможуть здобути достатньо практичних навичок виконання рисунків та використання їх, як допоміжних засобів при розв'язанні задач. Таким чином зв'язок теорії з практико, що є найважливішим при вивченні будь-якої дисципліни, не реалізується.

У процесі розв'язування задач на уроках геометрії досить часто в учнів виникають труднощі саме з побудовою рисунка до задачі. Створення рисунка є незамінною