3. Щукіна Г.І. Педагогічні проблеми формування пізнавального інтересу учнів. – М. Освіта, 1995.

Анотація. Півень Н. Формування пізнавального інтересу при вивченні математики в учнів основної школи.

У статті розкрито зміст понять «пізнавальний інтерес», «інтерактивні технології», «інтерактивне навчання». Запропоновано систему вправ, які сприяють розвитку пізнавального інтересу під час вивчення теми «Натуральні числа і дії над ними».

Ключові слова: *пізнавальний інтерес, інтерактивні технології, інтерактивне навчання.*

Abstract. Piven N. Formation of cognitive interest in the study of mathematics at secondary school pupils.

In the article the meaning of "cognitive interest", "interactive technology", "online learning". Suggested system of exercises that promote cognitive interest lesson on "Natural numbers and operations on them."

Keywords: *cognitive interest, interactive technologies, interactive learning.*

Анастасія Прасок
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
krassotka20_01@bk.ru
Науковий керівник – О.В. Мартиненко

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Відомо, що ряди є основним математичним апаратом дослідження функцій та їх властивостей у математичному аналізі. У дійсному аналізі деякі задачі викликають труднощі, проте в комплексній області обмеження можуть зніматися і ці ж задачі мають досить просте розв’язання.

Якщо розглядати відому функцію $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, що є неперервною і нескінченно диференційованою на всій дійсній прямій, то її можна подати як суму степеневого ряду, тобто розкласти у ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

Очевидно, що даний ряд збігається лише на інтервалі (-1;1), хоча точки ± 1 не є особливими для *f(x)*. При переході до функції комплексної змінної матимемо функцію $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ з двома особливими точками $\pm i$, її можна розкласти в ряд Тейлора тільки в крузі $|z|<1$ [2].

Комплексні функціональні ряди відіграють важливу роль у математиці принаймні з двох причин: з одного боку функціональні ряди є самостійним розділом математики, а з іншого – вони є потужним апаратом у дослідженні різних проблем, зокрема, розв’язанні диференціальних рівнянь, теорії лишків, доведенні основної теореми алгебри, теореми Руше і т. д.

Теорія комплексних функціональних рядів має широке застосування не лише в математиці, а й у інженерії, медицині, комп’ютерній графіці тощо. Наприклад, якщо розглядати перетворення Фур'є може описувати сигнал як залежність частоти і амплітуди від часу й надавати інформацію про фазу, що є важливим для інженерно-технічних працівників на бурових установках. Ряд Фур'є використовують у комп’ютерній графіці для автоматизації та контролю за технологічними процесами в нафтогазовій промисловості. Якщо розглядати ряд Лорана, то він застосовується при дослідженні проблем гідродинаміки – в розрахунках циркуляції при обтіканні круглого циліндра потоком рідини [2].

Розглянемо детальніше застосування рядів Фур'є в комп'ютерній графіці. Їх широко застосовують при стисненні зображень у форматі зберігання JPEG, при «зніманні» шумів у неякісних комп’ютерних фільмах, при визначенні несправностей медичних чи інших приладів, що використовують такі сигнали, тощо. Перетворення Фур'є дає можливості подати сигнал, що змінюється у часі, у вигляді залежності частоти і амплітуди (рис. 1). Цей графік схожий на хвилю, яка складається з декількох простих гармонік, що мають різну частоту. Відмітимо, що сума цих гармонік є періодичною функцією.

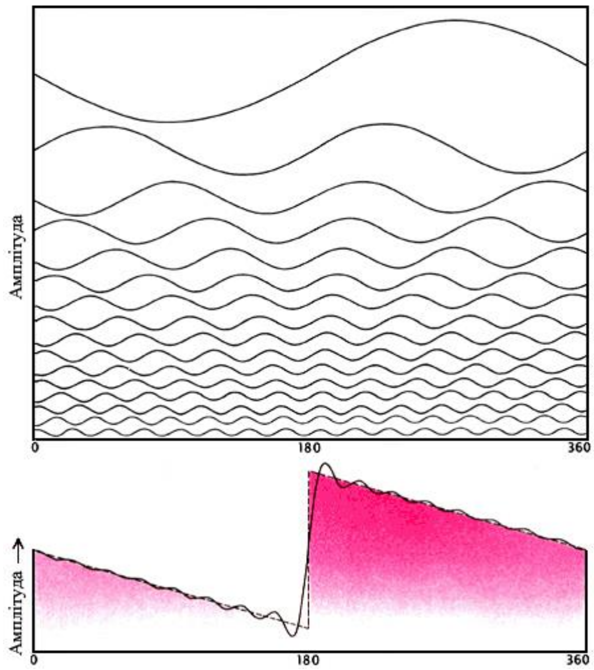

Рис. 1. Графік подання сигналу у поперечному перерізі

Описану суму можна представити рядом Фур’є у дійсній області:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Дана функція $f(x)$ є періодичною ($T = 2\pi$) і для неї виконуються умови Діріхле.

Зазначимо, що зі збільшенням числа членів ряду крива амплітуди наближається до графіка вихідної функції в усіх точках, крім точок розриву: в околах цих точок спостерігаються невеликі виступи, що зміщуються до них. Отже, при збільшенні кількості доданків «виступи» на графіку не зменшуються по амплітуді, але стають вужчими [3].

При застосуванні операції граничного переходу функція, розвинена в ряд Фур'є, за видом нагадує саму себе, проте виключення становлять точки розриву, де спостерігаються значні «виступи». Така поведінка частинних сум називається явищем Гіббса [1].

Одним із способів уникнути явища Гіббса є розклад функції в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $(0;\pi)$. Проте якщо функція $f(x)$, задана на інтервалі $(0;\pi)$, у точках $x=0$ та $x=\pi$ дорівнює нулю, то слід віддати перевагу розкладанню в ряд синусів, який у цьому випадку має значно кращу збіжність, ніж ряд косинусів. Це пояснюється тим, що здійснивши непарне продовження функції $f(x)$ з інтервалу $(0;\pi)$ на інтервал $(-\pi;0)$, забезпечується неперервність не лише самої функції у цих точках, але й її першої похідної.

Нехай зображення є функцією двох змінних, визначеною в точках растрового зображення і *I(x,y)* – значення атрибута пікселя (наприклад, номер палітри та інтенсивності кольору)залежно від колірної моделі представлення зображення (рис. 2).

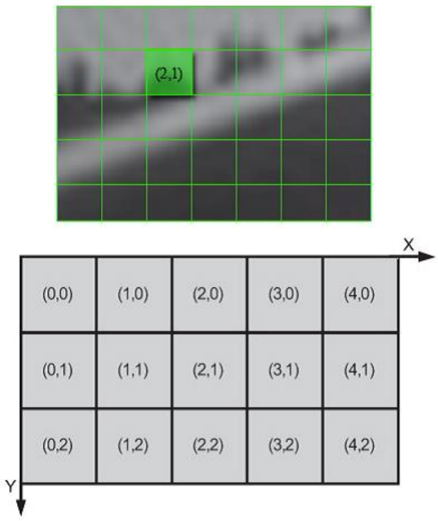

Рис. 2. Приклад розбиття рисунка на пікселі

Множина таких функцій на точках фіксованого кінцевого растрового зображення утворюють скінченний вимірний простір $R^{X,Y}$ розмірності ($m\times n \quad |X|=m, \quad |Y|=n$) із скалярним добутком

$$(I_1,I_2)=\sum_{i,j=0}^{m,n} I_1(i,j)I_2(i,j).$$

Цей скалярний добуток будемо ототожнювати з простором $I_2(x,y)$, у якому, як відомо, існує базис, тобто система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{k=m\times n}$ з $R^{X,Y}$ і набір коефіцієнтів $\{C_k\}_{k=1}^{k=m\times n}$, що одночасно не дорівнюють нулю, і для будь-якої функції *I* з даного простору виконується рівність

$$I=\sum_{k=0} C_k e_k .$$

Припустимо, що базис ортонормований. Тоді

$$(e_p,e_q)=\begin{cases}0, & p\neq q\\ 1, & p=q\end{cases} \text{ і } C_k=(I,e_k),$$

де C – множина значень атрибутів (як правило, номер палітри кольору).

Оскільки двовимірне зображення можна представити як двовимірний сигнал, то у аналоговій формі цей сигнал безперервний, а у дискретній формі – визначений лише в точках растрового зображення. Тому для розгляду зображення у визначеному прямокутнику зручно розкласти його в ряд Фур'є.

Розглянемо одновимірні сигнали з одновимірною областю визначення. Одновимірний сигнал представимо як зріз двовимірного зображення (рис.3).

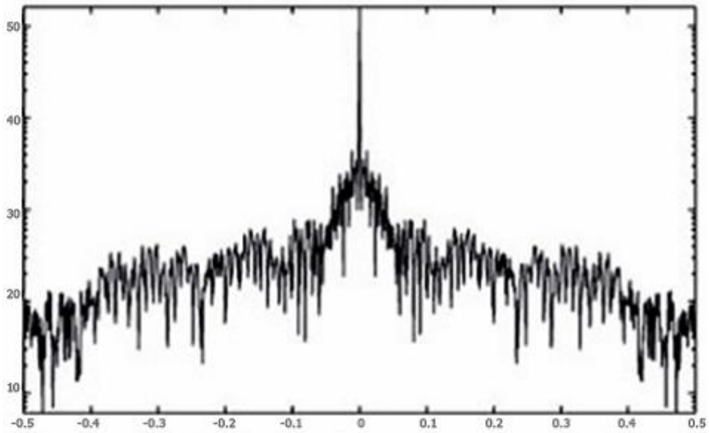

Рис. 3. Одновимірний сигнал як зріз двовимірного зображення

Дані сигнали можна розглядати у просторі R^n та у частотній області C^n .

У дискретному випадку, якщо сигнал представлений у вигляді функції визначеної в *N* точках $x \in 0,\dots,N-1$, використовується дискретне перетворення Фур'є, яке є рядом Фур'є.

$$F(f)=\sum_{x=0}^{N-1} I(x)\left[\cos\frac{2\pi fx}{N}-i\sin\frac{2\pi fx}{N}\right],$$

де $f \in 0,\dots,N-1$ - також є дискретною. Відповідне зворотне дискретне перетворення Фур'є у такому просторі має вигляд:

$$I(x)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(F)\left[\cos\frac{2\pi fx}{N}+i\sin\frac{2\pi fx}{N}\right].$$

Дискретне перетворення має дві важливі властивості:

1) коефіцієнти незалежні один від одного, тобто точність представлення одного коефіцієнта не впливає на представлення будь-якого іншого. Це дає можливість одночасно врахувати кілька чинників, що впливають на досліджуваний процес чи явище;

2) це перетворення зберігає основну інформацію за малої кількості коефіцієнтів. Така властивість проявляється на фото-реалістичних зображеннях і дозволяє досліджувати об'єкти, які перебувають у складному русі з урахуванням термонавантаження [3].

У комплексній області наша функція для всього зображення виглядатиме як $F(k,l)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} I(p,q)e^{-\frac{2\pi ip}{m}k}e^{-\frac{2\pi iq}{n}l}$, для будь-яких $k=1,\dots,m$, $l=1,\dots,n$.

Визначимо обернене перетворення Фурє:

$$I(p,q)=\frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} F(k,l)e^{-\frac{2\pi ik}{m}p}e^{-\frac{2\pi il}{n}q}.$$

Система функцій

$$\left\{e^{2\pi(p\frac{k}{m}+q\frac{l}{n})}\right\}_{k,l}^{n,m},$$

утворює базис у просторі функцій, що описують зображення.

Алгоритм стиснення, що використовується у форматі зберігання зображень JPEG, побудований на використанні дискретного перетворення за косинусами.

Отже, високий ступінь стиснення з малими втратами інформації можна отримати лише тоді, коли є визначена кількість не рівних (не близьких) нулю коефіцієнтів ряду Фур'є.

Реальні зображення мають складну структуру, їх Фур'є-образ може і не задовольняти подібним вимогам. У такому випадку зображення розбивають на області фіксованого розміру (рис. 4-5) і виконують перетворення в кожній області окремо.

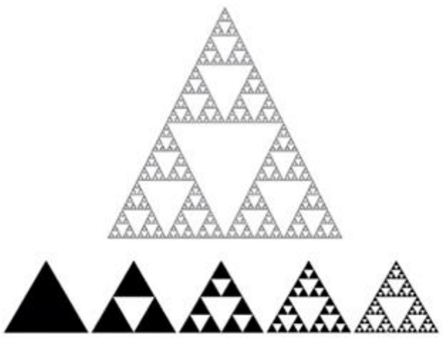

Рис.4. Побудова трикутників Серпінського

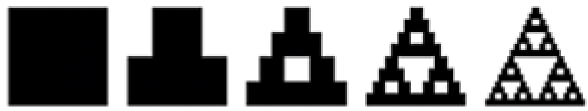

Рис. 5. Побудова трикутників Серпінського за квадратами

Кожна область такого розбиття зображення має менше особливостей, ніж усе зображення загалом. Саме тому образи Фур'є цих областей можуть виявитися більш відповідними для стиснення, ніж образ всього зображення. За таким принципом працює відомий алгоритм стиснення JPEG. Але такий підхід має й певні недоліки. Наприклад, за високого ступеня стиснення частини єдиного зображення, що опрацьовуються незалежно один від одного, можуть погано поєднуватися. Тому складається враження, що таке зображення, зібране з окремих елементів. Цей недолік мають фільми поганої якості: відео-кадр розбитий на сукупність квадратиків, що утворюють зображення з помітними їх контурами. Для усунення даного ефекту зображення відфільтровують, «знімаючи» так звані шуми, які породжують це спотворення.

Для обробки зображень в комп'ютерній графіці часто використовуються сітки. Найчастіше це трикутні сітки, які є відносно простими в обробці і дають можливість представляти об'єкти з високим ступенем точності. Треба пам'ятати, що використання рівномірної сітки не завжди виправдане, бо об'єкт може мати як фрагменти з хорошим ступенем точності зображення, так і області зі складнішою структурою. Їх слід представляти дрібнішою сіткою [3].

Отже, ряди Фур'є мають широке застосування в різних областях комп'ютерної графіки, а представлені викладки є безперечним доказом даного факту.

Список використаних джерел

1. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. – Москва: Просвещение, 1957. – 335 с.
2. Комплексний аналіз [Електронний ресурс] // Вікіпедія – вільна енциклопедія. – Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Комплексный_анализ.
3. Криштопа Л. І. Застосування рядів Фур'є в комп'ютерній графіці для автоматизації та контролю за технологічними процесами у нафтогозовій промисловості [Електронний ресурс] / Л.І.Криштопа, А.В.Сворак // – Режим доступу: http://library.nung.edu.ua/sites/default/files/articles/583p.pdf.

Анотація. Прасок А. Функціональні ряди на комплексній площині.

У статті розглянуто значення математичного апарату комплексних функціональних рядів при дослідженні різних процесів. В ній подані застосування даної теорії в комп'ютерній графіці при знятті шумів з неякісних відеофільмів та стисненні зображень за алгоритмом JPEG.

Ключові слова: *функціональний ряд, ряд Фур'є, дискретне перетворення, обернене дискретне перетворення, алгоритм стиснення JPEG.*

Abstract. Prasok A. Functional series in the complex plane.

The article exposes the importance of the use of mathematical tools of complex functional series. It submits the application of this theory in computer graphics when removing noise from low-quality video and image compression algorithm JPEG.

Keywords: *functional series, Fourier series, discrete transform, inverse discrete transform, JPEG compression algorithm.*

Альона Солошенко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
SoloshenkoAlyona@yandex.ua
Науковий керівник – С.В. Петренко

АДАПТАЦІЯ ПЕРШОКУРСНИКІВ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ВНЗ

Студентство в Україні складає вагому частку суспільства, яка зайнята специфічною працею – навчанням. За останні роки відбулося значне зростання кількості молодих людей, які здобули або здобувають вищу освіту.

З огляду на те, що молода людина, як правило, вступає у вищий навчальний заклад після закінчення середньої школи, студентів зустрічає ряд проблем, що пов'язані з недостатньою готовністю до нових умов навчання.

Студент першого курсу фізико-математичного факультету з 1-ого вересня розпочинає вивчати нові математичні дисципліни: аналітична геометрія, математичний аналіз, лінійна алгебра та інші. Аналіз рівня знань студентів показав, що математична підготовка першокурсників останніми роками недостатня для вивчення математичних дисциплін ВНЗ. Це пов'язано з тим, що важливі теми, необхідні при навчанні на математичній спеціальності, у шкільній програмі розглядаються в ознайомчому порядку або зовсім відсутні. Крім того, від школярів не вимагають знання чітких формулювань, вміння доводити теореми, виводити математичні формули.

Аналіз анкет першокурсників фізико – математичного факультету спеціальність «Математика » засвідчує, що у першокурсників слабо розвинена алгоритмічна культура, що збільшує кількість помилок при збільшенні кроків у завданні. Нерідкістю вже стало і не виконання простих завдань так тільки 30% першокурсників безпомилково справляються з дробово-раціональними виразами та тригонометричними перетвореннями, а дії з векторами з застосуванням геометричної інтерпретації виконують менше 7%. У першокурсників відсутні навички і вміння до самоорганізації, самостійності та самовідповідальності, тому важливим завданням викладача, який працює на 1-ому курсі – допомогти адаптуватися студентам до навчання у вищому навчальному закладі.

Успішність та ефективність навчання у ВНЗ залежить від багатьох чинників. З перших кроків на першому курсі навчання молоді люди включені в нове динамічне та