УДК 517.911

В.І. Кулик
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

ОСОБЛИВІ РОЗВ’ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Постановка проблеми. Математичне обґрунтування різних процесів, що відбуваються в природі, приводять до поняття рівняння, яке пов’язує незалежну змінну, невідому (шукану) функцію однієї змінної та похідні цієї функції. Рівняння такого роду називаються диференціальними рівняннями [4].

Дана теорія посідає важливе місце в розвитку механіки, електроніки, хімії, біології, економіки та інших важливих галузях науки та техніки. Тому дослідження даної теорії завжди буде актуальним.

Аналіз актуальних досліджень. Найпростіші диференціальні рівняння з'явилися вже в працях Ісаака Ньютона (1643–1727) і Готфріда Лейбніца (1646–1716). Саме Лейбніцу і належить термін «диференціальне рівняння». У XVIII ст. теорія диференціальних рівнянь відокремилася з математичного аналізу в самостійну математичну дисципліну, її успіхи пов'язані з іменами швейцарського вченого Іоганна Бернуллі (1667–1748), французького математика Жозефа Лагранжа (1736–1813) і особливо Леонарда Ейлера [5].

Мета статті: ознайомити з основними поняттями та фактами теорії диференціальних рівнянь першого порядку. Головну увагу приділено демонстрації прикладу, який ілюструє застосування теорії про *особливі розв’язки* диференціального рівняння першого порядку до розв'язування задач.

Виклад основного матеріалу.

У кінці XVII – на початку XVIII ст. різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насамперед це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегрування яких намагалися здійснити за допомогою функцій, що виражають скінченне число алгебраїчних дій або таких, що включають елементарні неалгебраїчні дії, наприклад оперування тригонометричними функціями.

Диференціальні рівняння, методи їх дослідження широко використовуються в різних галузях сучасної науки і техніки. Тому ця тематика посідає важливе місце в розвитку механіки, фізики, електроніки, хімії, біології, економіки, машинобудування.

Розглянемо основну теорію диференціальних рівнянь першого порядку, яка потрібна для подальшого розуміння прикладу.

Диференціальним рівнянням І порядку називається рівняння, що пов’язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну. Диференціальне рівняння І порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Частіше диференціальні рівняння I порядку представляють у вигляді рівняння, розв'язного відносно похідної:

$$y' = f(x,y)$$

чи в симетричній формі (через диференціали):

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння I порядку називається функція

$$y = \varphi(x,c),$$

залежна від x і константи й така, що перетворює диференціальне рівняння (1) у тотожність, тобто

$$F\left(x,\varphi(x,c),\varphi'(x,c)\right) = 0.$$

Для того, щоб з безлічі розв'язків, що залежать від параметра с, виділити один єдиний, необхідно задати умову:

$$y(x_0) = y_0, \qquad (2)$$

яка дозволяє знайти константу с. Умову (2) називають початковою умовою.

Отриманий в такий спосіб розв'язок, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння I порядку [1].

Задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x,y)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, називають задачею Коші.

ТЕОРЕМА. Нехай задано диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$, при цьому функція $f(x,y)$ визначена в деякій області *D* площини *xOy*, що містить точку $M_0(x_0,y_0)$. Якщо:

а) $f(x,y)$ неперервна по *x* й *y* в області *D* і

б) $f(x,y)$ має обмежену частинну похідну $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в цій точці, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, що задовольняє умову $y(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$.

Геометрично це означає, що при виконанні умов теореми через кожну внутрішню точку (x_0,y_0) області *D* проходить одна інтегральна крива.

Якщо ж у точці (x_0,y_0) порушуються умови теореми Коші, то через неї проходить декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) чи не проходить жодна інтегральна крива (розв'язок не існує). Такі точки називаються *особливими точками* диференціального рівняння.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння – *особлива*, тобто через неї проходить не одна інтегральна крива, то розв'язок називається *особливим розв'язком* диференціального рівняння. Особливий розв'язок не може бути отриманий з загального розв'язку ні при яких значеннях довільної постійної с , включаючи і $c = \pm\infty$ [2].

Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має загальну дотичну з однією з інтегральних кривих, обумовлених загальним розв'язком. Така інтегральна крива називається *обвідною сімейства інтегральних кривих.*

Розглянемо диференціальне рівняння наступного виду:

$$y = xy' + \Psi(y')$$

Воно носить назву *рівняння Клеро*.

Покладемо $y' = p$, тоді

$$\begin{cases} y = px + \psi(p) \\ dy = pdx \end{cases}.$$

Використовуючи $dy = pdx$, отримаємо

$$pdx + (x + \psi'(p))dp = pdx.$$

Звідки

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Дане рівняння розпадається на два

$$dp = 0, \; x + \psi'(p) = 0.$$

Перше рівняння дає $p = c$, підставляючи його в рівняння Клеро будемо мати *загальний розв'язок*

$$y = cx + \psi(c).$$

Друге $x = -\psi'(p)$, разом із самим рівнянням Клеро утворює параметричний розв'язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Його називають *особливим*, так як він співпадає з обвідною.

Приклад. Відомо, що відрізок довільної дотичної до астроїди

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

між осями координат має сталу довжину, рівну *a*.

Сформулюємо обернену задачу: знайти лінії, у яких довільна дотична між осями координат має сталу довжину *a*.

Нехай шукана лінія $y = y(x)$ (рис.1). Запишемо рівняння дотичної до неї у точці $C(x_0, y_0)$: $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

Знайдемо координати точок *A*і *B* перетину дотичної з осями координат. При $y = 0$маємо $x = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}$, при *x=0* маємо $y = y(x_0) - x_0 y'(x_0)$, звідки отримуємо рівняння $x^2 + y^2 = a^2$, $(x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)})^2 + (y(x_0) - x_0 y'(x_0))^2 = a^2$.

Опустивши індекс нуль, приходимо до рівняння

$(y - xy')^2 + (x - \frac{y}{y'})^2 = a^2$,

$y - xy' = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$, яке є рівнянням Клеро.

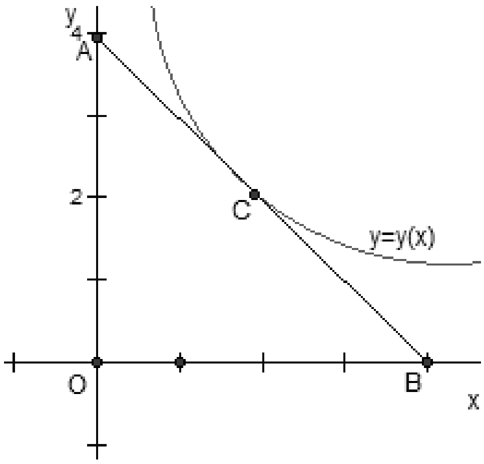

Рис. 1

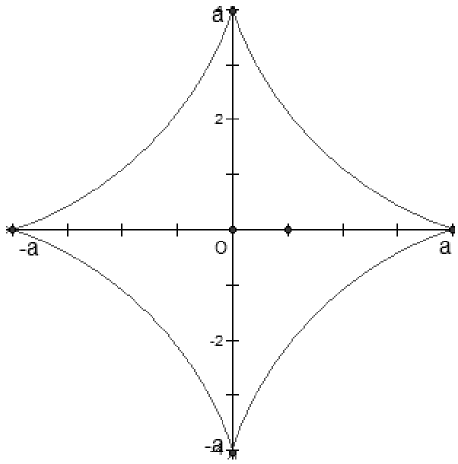

Рис. 2

Його загальний розв'язок $y = Cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$ дає сім'ю прямих, довільна дотична до яких між осями координат має довжину a. Це майже очевидно. Але рівняння Клеро має ***особливий розв'язок***:

$$\begin{cases} y = px + \Psi(p) \\ x = -\Psi'(p) \end{cases}$$

В даному прикладі $\Psi(p) = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$, а тому особливий розв'язок:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{(1+p^2)^{3/2}}, \\ y = \dfrac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Виключивши звідси параметр p, отримаємо $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (треба піднести обидва рівняння до степеня 2/3 і скласти отримані результати).

Тобто вказану властивість має ще і астроїда (Рис.2).

Висновки.

Щодо подальшого дослідження даної теми, можна ще розглянути спеціальні приклади, які включають обвідну сім'ї інтегральних кривих, приклад Лаврентьєва та приклад Хартмана.

Стаття буде корисною для студентів, які бажають отримати ґрунтовну підготовку з даного питання.

Література

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Матвеев Н.М. – М. : Высшая школа, 1967. – 564 с.
2. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения / Матвеев Н.М. – М.: 1958 – 468 с.
3. Ляшко І.І. Диференцальні рівняння / І.І.Ляшко, О.К.Боярчук, Я.Г.Гай, О.Ф.Калайда. – К. : Вища школа, 1981. – 504 с.
4. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, М.Ю. Перестюк. – К. : Либідь, 1994. – 360 с.

5. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л.З. – М. : Наука, 1969. – 424 с.

Анотація. *Кулик В. І. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку. В даній статті розглядається теорія диференціальних рівнянь першого порядку, що пов'язана з особливим розв'язком рівняння Клеро. Поданий приклад, який може бути використаний при вивченні курсу математичного аналізу з питання застосування особливих розв'язків на практиці.*

Ключові слова: *математичний аналіз, диференціальні рівняння, особливі розв'язки, рівняння Клеро.*

Аннотация. *Кулик В. И. Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка. В данной статье рассмотрена теория дифференциальных уравнений первого порядка, связанная с особым решением уравнения Клеро. Подано пример, который может быть использован при изучении курса математического анализа по вопросу применения особых решений на практике.*

Ключевые слова: *математический анализ, дифференциальные уравнения, особые решения, уравнения Клеро.*

Summary. *Kulyk V. Special solutions of differential equations. In this article the theory of first order differential equations related to the particular solution of Clairaut. Giving an example, which can be used to study the course of mathematical analysis on the application of specific solutions in practice.*

Key words: *mathematical analysis, differential equations, special solutions, Clairaut's equation.*