

УДК 512.5:371.3

Т. В. Дідківська,
І. А. Сверчевська

Житомирський державний університет імені Івана Франка

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ

Стаття присвячена властивостям деяких рекурентних послідовностей. В основу покладено послідовність чисел Фібоначчі та найважливіші їх властивості. Ця числова послідовність виникла з практичної задачі, розв'язаної Фібоначчі у творі "Книга про абак".

Протягом історії розвитку математики діяльність вчених призвела до виникнення визначних математичних задач. Вони становлять інтерес при навчанні математики, тому пропонуємо їх розглядати.

Для порівняння з числами Фібоначчі наводяться властивості чисел Нарайани, до яких ми прийшли на основі задачі індійського математика Нарайани. Виокремлюємо арифметичні властивості чисел Нарайани (1-4), порівнюємо їх з відповідними властивостями чисел Фібоначчі та визначаємо закономірності у зміні кількості випадків (властивість 2) та кількості доданків (властивості 3 і 4). Фактично це перше узагальнення чисел Фібоначчі.

Оскільки розвиток теорії чисел Фібоначчі відбувається в напрямку поглибленого вивчення властивостей та їх узагальнення, розглядається деяке узагальнення чисел Фібоначчі. До нової числової послідовності призводить задача про пінгвінів. Пропонується рекурентна формула для обчислення членів цієї послідовності та визначаються її члени. Доводяться властивості узагальнених чисел Фібоначчі.

Розглядається застосування узагальнених чисел Фібоначчі до побудови нетрадиційної системи числення, за основу якої вибираються ці числа. Доводиться теорема про існування систематичного запису довільного натурального числа на основі леми про зв'язок цього числа з відповідним числом узагальненого ряду Фібоначчі. Показано побудову систематичного запису числа на прикладах.

Ключові слова: послідовність, числа, узагальнення, система числення, числа Фібоначчі, числа Нарайани, математична індукція, золотий переріз.

Постановка проблеми. Числа Фібоначчі були відомі ще з 1202 року із задачі Леонардо Пізанського (Фібоначчі) про кроликів. Написані ним твори мали важливе значення для поширення алгебраїчних знань у Європі. Найважливіші твори Фібоначчі "Книга про абак" та "Практична геометрія", де він систематизує велику кількість математичних досягнень арабських і грецьких математиків. Значне місце займають власні задачі та методи. Ці задачі становлять інтерес і в наш час, оскільки дають можливість ознайомитися з методами Фібоначчі [2, с. 16]. Порівнюючи авторські методи із сучасними підходами при вивченні теорії чисел за програмою університету, можна використати елементи історизму для активізації процесу навчання [3, с. 111].

Аналіз актуальних досліджень. Вивченням властивостей чисел Фібоначчі, їх застосуваннями займався чимало математиків. Зокрема, М. М. Воробйов розглянув властивості чисел та їх зв'язок з неперервними дробами, геометрією, золотим перерізом, теорією пошуку, побудовою системи числення. О. П. Стахов розробив арифметику Фібоначчі, розвинув теорію цих чисел і вивів зв'язок алгоритмів вимірювання з числами Фібоначчі. Арифметика Фібоначчі була розвинута Ю. Вишняковим. Подібні дослідження стосовно комп'ютерів Фібоначчі були проведені

в США під керівництвом доктора Ньюкомба (Newcomb). З 1963 р. у США видається журнал "Fibonacci Quarterly".

Значний інтерес становлять числа Нарайани [4, с. 29], які застосовані В. Шпаківським для побудови узагальнених Нарайана кватерніонів [10].

Останнім часом розглядаються можливості введення чисел Фібоначчі у шкільний курс математики. Різні підходи запропоновані С. Мазуренко, М. Шмигевським, Р. Ушаковим.

Розвиток теорії чисел Фібоначчі відбувається в напрямку поглибленого вивчення властивостей чисел Фібоначчі та узагальнення цих чисел. На основі задачі індійського математика Нарайани про підрахунок голів стада корів і телиць, які походять від однієї корови, ми прийшли до рекурентної послідовності типу Фібоначчі [4, с. 29].

Мета статті. Ми розглянемо деякі властивості чисел Фібоначчі та Нарайани і побудуємо узагальнення цих рекурентних співвідношень, а також розглянемо застосування узагальненої послідовності до побудови системи числення.

Виклад основного матеріалу.

1) Задача Фібоначчі приводить до рекурентної послідовності [1, с. 8]:
 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ ($u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$), $n > 1$, $u_1 = u_2 = 1$.

Французький математик Едуард Люка назвав числа цієї послідовності числами Фібоначчі. Числа Фібоначчі мають ряд цікавих властивостей, зокрема [1, с. 11]:

$$1. \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$$

$$2.1. \quad u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

$$2.2. \quad u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

$$3. \quad u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$$

$$4. \quad u_{2n} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2$$

2) Задача Нарайани приводить до рекурентної послідовності [4, с. 31]:
 $1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, \dots$ ($u_{n+1} = u_n + u_{n-2}$), $n > 2$, $u_1 = u_2 = u_3 = 1$.

Порівняємо властивості чисел Фібоначчі з відповідними властивостями чисел Нарайани [4, с. 35]:

$$1. \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+3} - 1$$

$$2.1. \quad u_1 + u_4 + u_7 + \dots + u_{3n-2} = u_{3n-1}$$

$$2.2. \quad u_2 + u_5 + u_8 + \dots + u_{3n-1} = u_{3n}$$

$$2.3. \quad u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n} = u_{3n+1} - 1$$

$$3. \quad u_{n+m} = u_{n-1}u_{m+2} + u_{n-2}u_m + u_{n-3}u_{m+1}$$

$$4. \quad u_{2n} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2 - u_{n-2}^2$$

Спостерігаємо збільшення випадків (властивість 2) та збільшення кількості доданків (властивості 3 і 4). Маємо, що числа Нарайани є узагальненням чисел Фібоначчі.

3) Розглянемо інше узагальнення чисел Фібоначчі, тобто числа послідовності:
 $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, \dots$ ($u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$), $n > 3$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$.

Зауважимо, що до цієї послідовності приводить задача про пінгвінів.

"Кожна пара пінгвінів народжує нову пару, яка, починаючи з п'ятого року життя також народжує пару".

Нехай на початку року маємо одну пару, тоді щороку до п'ятого року маємо 1, 2, 3, 4 пари. Починаючи з п'ятого року кількість пар визначається рекурентними формулами $u_5 = u_4 + u_1$, $u_6 = u_5 + u_2$, $\dots$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$. Тобто до кількості пар

минулого року потрібно додати кількість пар, що народжується. На початку цього року їх буде стільки, скільки було чотири роки тому. Маємо послідовність: 1, 2, 3, 4, 5, 7, ..., $u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$. Щоб обчислити довільний член цієї послідовності необхідно знати чотири попередні члени, тому $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$.

Цікаво порівняти властивості чисел Фібоначчі та Нарайани з цими узагальненими числами.

$$1. u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+4} - 1.$$

Із співвідношення $u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$ (1) одержимо $u_{n-3} = u_{n+1} - u_n$ (2), $n > 3$, звідки випливає:

$$u_1 = u_5 - u_4$$

$$u_2 = u_6 - u_5$$

$$u_3 = u_7 - u_6$$

...

$$u_{n-1} = u_{n+3} - u_{n+2}$$

$$u_n = u_{n+4} - u_{n+3}$$

Додавши почленно ці рівності, отримаємо:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+4} - u_4, u_4 = 1.$$

$$2.1. u_1 + u_5 + u_9 + \dots + u_{4n-3} = u_{4n-2}.$$

З умови (1) $u_{k+1} = u_k + u_{k-3}$ при $k = n+3$ маємо $u_{n+4} = u_{n+3} + u_n$ (3). Тому $u_{n+3} = u_{n+4} - u_n$ (4), звідки, врахувавши, що $u_1 = u_2$, одержуємо:

$$u_1 = u_2$$

$$u_5 = u_6 - u_2$$

$$u_9 = u_{10} - u_6$$

...

$$u_{4n-7} = u_{4n-6} - u_{4n-10}$$

$$u_{4n-3} = u_{4n-2} - u_{4n-6}$$

Підсумуємо і отримаємо: $u_1 + u_5 + u_9 + \dots + u_{4n-3} = u_{4n-2}$.

$$2.2. u_2 + u_6 + u_{10} + \dots + u_{4n-2} = u_{4n-1}.$$

З умови (4), врахувавши, що $u_2 = u_3$, отримуємо:

$$u_2 = u_3$$

$$u_6 = u_7 - u_3$$

$$u_{10} = u_{11} - u_7$$

...

$$u_{4n-6} = u_{4n-5} - u_{4n-9}$$

$$u_{4n-2} = u_{4n-1} - u_{4n-5}$$

Підсумуємо і одержимо: $u_2 + u_6 + u_{10} + \dots + u_{4n-2} = u_{4n-1}$.

$$2.3. u_3 + u_7 + u_{11} + \dots + u_{4n-1} = u_{4n}.$$

З умови (1) маємо: $u_n = u_{n+1} - u_{n-3}$ (5), враховуючи, що $u_3 = u_4$, одержимо:

$$u_3 = u_4$$

$$u_7 = u_8 - u_4$$

$$u_{11} = u_{12} - u_8$$

...

$$u_{4n-5} = u_{4n-4} - u_{4n-8}$$

$$u_{4n-1} = u_{4n} - u_{4n-4}$$

Додавши рівності, маємо: $u_3 + u_7 + u_{11} + \dots + u_{4n-1} = u_4 + (u_8 - u_4) + (u_{12} - u_8) + \dots + (u_{4n-4} - u_{4n-8}) + (u_{4n} - u_{4n-4}) = u_{4n}$.

$$2.4. u_4 + u_8 + u_{12} + \dots + u_{4n} = u_{4n+1} - 1.$$

З рівності $u_n = u_{n+1} - u_{n-3}$ (5) при умові, що $u_1 = 1$, маємо:

$$u_4 = u_5 - u_1$$

$$u_8 = u_9 - u_5$$

$$u_{12} = u_{13} - u_9$$

...

$$u_{4n-4} = u_{4n-3} - u_{4n-7}$$

$$u_{4n} = u_{4n+1} - u_{4n-3}$$

Додавши рівності, одержимо:

$$u_4 + u_8 + u_{12} + \dots + u_{4n} = (u_5 - u_1) + (u_9 - u_5) + (u_{13} - u_9) + \dots + (u_{4n-3} - u_{4n-7}) + (u_{4n+1} - u_{4n-3}) = -u_1 + u_{4n+1} = u_{4n+1} - 1.$$

$$3. u_{n+m} = u_{n-1}u_{m+2} + u_{n-2}u_{m-1} + u_{n-3}u_m + u_{n-4}u_{m+1}, \quad n > 4, m > 1.$$

Зафіксуємо n і доведемо методом математичної індукції по m .

Доведемо істинність рівності для $m = 2$, тобто:

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_4 + u_{n-2}u_1 + u_{n-3}u_2 + u_{n-4}u_3.$$

Використавши, що $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ та умову (1), перетворимо праву частину рівності:

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4} &= (u_{n-1} + u_{n-4}) + u_{n-2} + u_{n-3} = \\ &= u_n + u_{n-2} + u_{n-3} = (u_n + u_{n-3}) + u_{n-2} = u_{n+1} + u_{n-2} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

Припустимо істинність рівності для довільного m :

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_{m+2} + u_{n-2}u_{m-1} + u_{n-3}u_m + u_{n-4}u_{m+1}.$$

Доведемо, що рівність виконується для $(m+1)$:

$$u_{n+m+1} = u_{n-1}u_{m+3} + u_{n-2}u_m + u_{n-3}u_{m+1} + u_{n-4}u_{m+2}.$$

Перетворимо праву частину рівності за умовою $u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$ (1):

$$\begin{aligned} S &= u_{n-1}(u_{m+2} + u_{m-1}) + u_{n-2}(u_{m-1} + u_{m-4}) + u_{n-3}(u_m + u_{m-3}) + u_{n-4}(u_{m+1} + u_{m-2}) = \\ &= (u_{n-1}u_{m+2} + u_{n-2}u_{m-1} + u_{n-3}u_m + u_{n-4}u_{m+1}) + (u_{n-1}u_{m-1} + u_{n-2}u_{m-4} + u_{n-3}u_{m-3} + u_{n-4}u_{m+2}). \end{aligned}$$

За припущенням індукції: $S = u_{n+m} + u_{n+(m-3)} = u_{n+m+1}$.

$$4. u_{2n} = u_{n+1}^2 + 2u_{n-1}u_{n-2} - u_{n-3}^2, \quad n > 3.$$

З третьої властивості при $m=n$, застосувавши умови $u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$ (1) та $u_{n-3} = u_{n+1} - u_n$ (2), отримаємо:

$$u_{2n} = u_{n-1}u_{n+2} + u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-3}u_n + u_{n-4}u_{n+1}.$$

$$u_{2n} = u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-2}) + u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-3}(u_{n+1} - u_{n-3}) + (u_n - u_{n-1})u_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} u_{2n} &= 2u_{n-1}u_{n-2} + u_{n-3}u_{n+1} - u_{n-3}^2 + u_n u_{n+1} = 2u_{n-1}u_{n-2} - u_{n-3}^2 + (u_{n-3} + u_n)u_{n+1} = \\ &= 2u_{n-1}u_{n-2} - u_{n-3}^2 + u_{n+1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 + 2u_{n-1}u_{n-2} - u_{n-3}^2. \end{aligned}$$

Відомо, що систематичний запис числа n у системі числення з основою q має вигляд: $n = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$, де a_i – цифри, що менші за q . Або позиційний запис: $n_q = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Загальновживаною є позиційна система числення з основою $q=10$. У різні історичні періоди користувалися системами числення, відмінними від десяткової. Основою сучасних комп'ютерів є двійкова система числення. На думку О. П. Стахова, в процесі розвитку обчислювальної техніки виявлено недоліки класичної двійкової системи числення, а тому доцільно використовувати p -коди Фібоначчі та коди золотой n -пропорції [8, с. 44]; [9, с. 240]. М. М. Воробйов запропонував використати числа Фібоначчі для кодування інформації [1, с. 43]. Нами для цієї цілі запропоновано числа Нарайани [4, с. 11]. Також вводиться подання натуральних чисел у золотій системі числення, в основу якої покладено ірраціональне число $\varphi = 1,618\dots$, що одержується в результаті розв'язування рівняння $x^2 = x + 1$ [5, с. 32]. Після узагальнення поняття золотого перерізу, як розв'язку рівняння $x^3 = x^2 + 1$ [7, с. 42], запропоновано покласти отримане ірраціональне число $\beta = 1,465\dots$ в основу узагальненої золотой системи числення [7, с. 36].

Розглянемо застосування чисел рекурентної послідовності $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, \dots$ ($u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$), $n > 3$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ для побудови системи числення.

Лема. Для довільних натуральних чисел $n \geq 4$ і N існує єдине подання у вигляді $N = u_n + r$, де $0 \leq r < u_{n-3}$.

Доведення: відмітимо, що узагальнений ряд Фібоначчі, починаючи з $n=4$, монотонно зростає, і тому для довільного натурального числа N можна вибрати єдину пару найбільших сусідніх чисел, які пов'язані з числом N нерівністю $u_n \leq N < u_{n+1}$.

Віднімаючи u_n від усіх членів нерівності, одержимо: $0 \leq N - u_n < u_{n+1} - u_n$. Оскільки $u_{n+1} = u_n + u_{n-3}$, одержимо: $0 \leq N - u_n < u_{n-3}$.

Позначимо $N - u_n = r$, маємо $N = u_n + r$, $0 \leq r < u_{n-3}$.

Базою системи числення буде послідовність, що подамо у вигляді таблиці, яку можна продовжити.

Таблиця 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69

Теорема. Для довільного натурального числа N існує єдине подання у вигляді $N = a_n u_n + a_{n-1} u_{n-1} + \dots + a_1 u_1$, де $a_n = 1$, $a_i \in \{0, 1\}$, якщо $i \neq n$, u_i – узагальнені числа Фібоначчі з бази системи числення (таблиця 1).

Доведення. Подання числа N одержується шляхом розкладу його й остач, одержаних за лемою, за базою системи числення. Перший крок: за лемою $N = u_n + r_1$, $r_1 = N - u_n$, u_n – найбільше можливе число ($u_n \leq N < u_{n+1}$). Отримали $N = 1 \cdot u_n + r_1$, $a_n = 1$. Тобто віднімаємо найбільші числа з бази системи числення від даного числа, для якого знайдено проміжок, а потім продовжуємо віднімати від отриманих остач, поки остача не стане рівною нулю. В результаті одержується послідовність $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ з одиниць та нулів, числа якої є коефіцієнтами шуканого подання.

Як впливає з леми, оскільки $0 \leq r_i < u_{n_i-3}$, позиційний запис чисел має властивість: після кожного одиничного розряду $a_i = 1, i > 3$ буде не менше, ніж три нулі.

Наведемо приклад подання числа $N=47$ в системі числення з узагальнених чисел Фібоначчі.

Обираємо проміжок з найбільших сусідніх чисел

$$u_{11} < 47 < u_{12}, 47 = u_{11} + r_1 \quad (1), 47 = 36 + r_1, r_1 < u_8, r_1 = 47 - 36 = 11,$$

$$u_7 < r_1 < u_8, r_1 = u_7 + r_2 \quad (2), 11 = 10 + r_2, r_2 < u_4, r_2 = 11 - 10 = 1,$$

$$r_2 = u_1, r_2 = u_1 + 0 \quad (3), 1 = 1 + 0, r_3 = 1 - 1 = 0.$$

З рівностей (1), (2), (3) одержуємо:

$$47 = u_{11} + r_1 = u_{11} + u_7 + r_2 = u_{11} + u_7 + u_1.$$

Маємо остаточний систематичний запис:

$$47 = 1 \cdot u_{11} + 0 \cdot u_{10} + 0 \cdot u_9 + 0 \cdot u_8 + 1 \cdot u_7 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_1 \quad \text{або}$$

позиційний запис: $47 = \overline{10001000001}$.

Очевидно, що $5 = u_5 = 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_1 = \overline{10000}$. Якщо $N = \overline{100010}$, то $N = 1 \cdot u_6 + 0 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_3 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_1 = 7 + 2 = 9_{10}$.

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень. Числа Фібоначчі та їх узагальнення тісно пов'язані з курсом "Теорія чисел", який передбачений для студентів, що вивчають математику в університеті, тому потрібно ці питання включати до програми курсу. Крім того, доведення теоретико-числових властивостей узагальнених чисел Фібоначчі, дослідження їх зв'язків з узагальненим золотим перерізом потребують подальших досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука, 1992. – 200 с.
2. Дідківська Т. В. Визначні історичні задачі з теорії чисел / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Актуальні питання природничо-математичної освіти: / Зб. наук. пр. № 1/ Сум. держ. пед. ун-т ім. А. С. Макаренка. – Суми: ВВП "Мрія", 2013. – С. 8- 18.
3. Дідківська Т. В. Логічне та історичне під час вивчення порівнянь в курсі теорії чисел / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2012. – Вип. 63. – С. 110-113.
4. Дідківська Т. В. Властивості чисел Фібоначчі-Наранйани / Т. В. Дідківська, М. В. Стюпочкіна // У світі математики. – 2003. – Т. 9. – Вип. 3. – С. 29-36.
5. Дідківська Т. В. Золота система числення / Т. В. Дідківська, Л. В. Михайлова // Вісник Житомирського державного пед. університету імені Івана Франка. – 2003. – Вип. 11. – С. 32-35.
6. Дідківська Т. В. Узагальнення золотої системи числення / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Вісник Житомирського державного пед. університету імені Івана Франка. – 2003. – Вип. 11. – С. 36-39.
7. Сверчевська І. А. Від золотої пропорції до β -перерізу / І. А. Сверчевська // У світі математики. – 2003. – Т. 9. – Вип. 1. – С. 37-45.
8. Стахов А. П. Алгоритмическая теория измерения / А. П. Стахов. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
9. Стахов О. П. Під знаком "золотого перерізу" / О. П. Стахов. – Вінниця: ТОВ "ІТІ", 2003. – 384 с.

10. Cristina Flaut and Vitalii Shpakivskiy. On Generalized Fibonacci Quaternions and Fibonacci-Narayana Quaternions. / Advances in Applied Clifford Algebras. – Springer Basel. –2013.

Дидковская Т. В., Сверчевская И. А. Обобщение чисел Фибоначчи.

Статья посвящена свойствам некоторых последовательностей. В основу положено последовательность чисел Фибоначчи и важнейшие ее свойства. Эта числовая последовательность возникла из практической задачи, решенной Фибоначчи в работе "Книга об абаке".

На протяжении истории развития математики деятельность ученых привела к возникновению замечательных математических задач. Они представляют интерес при обучении математики, поэтому предлагаем их рассматривать.

Для сравнения с числами Фибоначчи приводятся свойства чисел Нарайаны, к которым мы пришли на основании задачи индийского математика Нарайаны. Выделяем арифметические свойства чисел Нарайаны (1-4), сравниваем их с соответствующими свойствами чисел Фибоначчи и определяем закономерности в изменении количества случаев (свойство 2) и количества слагаемых (свойства 3 и 4). Фактически это первое обобщение чисел Фибоначчи.

Так как развитие теории чисел Фибоначчи происходит в направлении углубленного изучения свойств и их обобщения, рассматривается некоторое обобщение чисел Фибоначчи. К новой числовой последовательности приводит задача о пингвинах. Предлагается рекуррентная формула для вычисления членов этой последовательности, и определяются ее члены. Доказываются свойства обобщенных чисел Фибоначчи.

Рассматривается применение обобщенных чисел Фибоначчи к построению нетрадиционной системы счисления, основанием которой выбираются эти числа. Доказывается теорема о существовании систематической записи числа произвольного натурального числа на основании леммы о связи этого числа с соответствующим числом обобщенного ряда Фибоначчи. Показано построение систематической записи числа на примерах.

Ключевые слова: последовательность, числа, обобщение, система счисления, числа Фибоначчи, числа Нарайаны, математическая индукция, золотое сечение.

Didkivska T.V., Sverchevska I.A. The generalization of the Fibonacci numbers.

The properties of some recurrent sequences are researched. The work is based on the Fibonacci sequence and its main properties. This number sequence emerged from a practical problem, which have been solved in Fibonacci's Liber Abaci.

Throughout the history of mathematics numerous famous mathematical problems have appeared. They are of interest in teaching mathematics, therefore we advise considering them in this publication.

The properties of the Fibonacci numbers are compared with the properties of the Narayana sequence, which have been obtained from the Narayana's problem. We separate arithmetical properties of Narayana numbers (1-4), compare them with correspondent properties of Fibonacci numbers and determine the regularities in number of cases (property 2) and number of summands (properties 3, 4) variation. In fact, it's the first generalization of the Fibonacci numbers.

As far as development of the Fibonacci numbers theory consists in an advanced investigation of properties and their generalization, we consider one generalization of Fibonacci numbers. A new number sequence is obtained from the problem of penguins. The

recurrence formula for calculation of the sequence members is advised and the sequence members are evaluated. The properties of the generalized Fibonacci numbers are proved.

We also research the appliance of the generalized Fibonacci numbers in the construction of the alternative numbering system, which is based on these numbers. We prove the theorem of the existence of any natural number representation using the lemma of relation between this number and corresponding number in generalized Fibonacci series. The construction of number representation is shown in examples.

Key words: sequence, numbers, generalization, numbering system, the Fibonacci numbers, the Narayana numbers, mathematical induction, golden section.

УДК 376.68

Н. О. Зінонос

Державний вищий навчальний заклад
«Криворізький національний університет»

ФУНДАМЕНТАЛІЗАЦІЯ ЗМІСТУ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ІНОЗЕМНИХ СТУДЕНТІВ

Стаття присвячена фундаменталізації природничо-математичної підготовки у процесі навчання іноземних студентів у ВНЗ України. У статті представлені принципи та механізми фундаменталізації. У статті звертається увага на формування змісту природничо-математичних навчання іноземних студентів вищих навчальних закладів на засадах фундаментальності, послідовності та неперервності навчання. Обґрунтована необхідність дотримання спадкоємного здійснення підготовки у формі збереження ґрунтовних елементів змісту природничо-математичних дисциплін. За принципами неперервності і послідовності пізнання світу можливе тільки в певній системі: кожна наука являє собою систему знань, які пов'язані між собою внутрішніми зв'язками. У статті наголошується на тому, що фундаменталізація формування змісту природничо-математичних дисциплін - вимога глибокого і ґрунтового вивчення ретельно відібраного фундаменту навчальної дисципліни, тобто її основ, базових тем, необхідних для подальшого навчання іноземних студентів в університеті з використанням компресійних методик. Ми пропонуємо підхід, здатний вирішити проблему фундаменталізації предметної підготовки іноземних студентів в області природничо-математичних дисциплін.

Ключові слова: фундаменталізація, системність, наступність, неперервність, природничо-математичні дисципліни, іноземні студенти.

Постановка проблеми. У Національній доктрині розвитку освіти в Україні зазначається, що стратегічним завданням державної освітньої політики є вихід української освіти на ринок світових освітніх послуг, поглиблення міжнародної співпраці. Для цього навчальні заклади всіх рівнів мають сприяти міжнародній мобільності учасників навчально-виховного процесу, вдосконаленню підготовки фахівців для зарубіжних країн. У зв'язку з цим набуває актуальності проблема вдосконалення пропедевтичної підготовки іноземних громадян, організація цього процесу на якісно новому рівні: «основна задача сучасної пропедевтичної підготовки може бути визначена як діяльність освітньої системи, що забезпечує якісну підготовку іноземних громадян для трансформації особистості кожного з них на більш високий рівень розвитку» [2, с. 61]. У справі досягнення широкого спектра цілей політики в