ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(4), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-02
УДК: 539.1

ДОПОВНЕННЯ МЕТОДИКИ ВИКЛАДЕННЯ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ АТОМА ВОДНЮ

ADDITIONAL METHODS FOR TEACHING THE QUANTUM THEORY OF THE HYDROGEN ATOM

Костянтин АВДОНІН ✉
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Україна
avdonink13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6805-0870

Kostiantyn AVDONIN ✉
Military institute of telecommunications and informatization named after Heroes of Krut, Ukraine
avdonink13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6805-0870

АНОТАЦІЯ

У даній роботі запропонована можливість застосування інтегральних рівнянь, відповідних рівнянню Шредінгера, до знаходження радіальної складової хвильової функції квантової системи двох частинок та допустимих значень головного квантового числа системи. Актуальність роботи обумовлена необхідністю доповнення методики викладення такої важливої ключової задачі квантової механіки, як квантова теорія атома водню, яке полягає в розширенні сукупності методів знаходження розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню та їх систематизації, що буде сприяти кращому розумінню даної теми. Запропонована послідовність викладення матеріалу враховує останні тенденції розвитку методів пошуку розв'язків стаціонарного рівняння Шредінгера в аналітичному вигляді, демонструє можливість знаходження енергетичного спектру квантової системи частинок за допомогою інтегральних рівнянь.

Формулювання проблеми. *Квантова теорія атома водню у підручниках та навчальних посібниках з фізики найчастіше викладають, спираючись на одночастинкове рівняння Шредінгера для електрону, переходячи до системи відліку пов'язаної з ядром атому, нехтуючи рухом ядра, або частину матеріалу викладають при розгляді руху електрону в центральному силовому полі. Для узагальнення методики викладання, краще одразу розглядати квантову систему двох частинок: електрону і ядра атома водню.*

Матеріали і методи. *Головними методами вирішення поставленої проблеми є: засоби пошуку розв'язків звичайних, лінійних, диференціальних рівнянь у частинних похідних, теорія багатовимірних інтегральних рівнянь та теорія функцій Гріна.*

Результати. *З'ясовано, що радіальні складові хвильових функцій атома водню, що визначають енергетичний спектр, можна отримувати без переходу до сферичної системи, що спрощує викладення матеріалу теми. Запропоновано узагальнення послідовності викладення матеріалу по квантовій теорії атома водню.*

Висновки. *Запропоноване узагальнення методики знаходження розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню дозволяє підсилити повноту викладення матеріалу теми «Квантова механіка», підвищує ступінь доказовості викладення матеріалу та сприяє його розумінню.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *атом водню; інтегральне рівняння; квантова механіка; методика.*

ABSTRACT

This paper proposes the possibility of applying integral equations corresponding to the Schrödinger equation to find the radial component of the wave function of a quantum system of two particles and the permissible values of the principal quantum number of the system. The relevance of the work is due to the need to supplement the methodology for presenting such an important key problem of quantum mechanics as the quantum theory of the hydrogen atom, which consists of expanding the set of methods for finding solutions to the Schrödinger equation for the hydrogen atom and their systematization, which will contribute to a better understanding of this topic. The proposed sequence of presenting the material takes into account the latest trends in the development of methods for finding solutions to the stationary Schrödinger equation in analytical form, demonstrating the possibility of finding the energy spectrum of a quantum system of particles using integral equations.

Formulation of the problem. *The quantum theory of the hydrogen atom in physics textbooks and manuals is most often taught based on the single-particle Schrödinger equation for the electron, switching to a reference frame associated with the atomic nucleus, neglecting the motion of the nucleus, or part of the material is taught when considering the motion of the electron in a central force field. To generalize the teaching methodology, it is better to immediately consider a quantum system of two particles: an electron and a hydrogen atom nucleus.*

Materials and methods. *The main methods for solving the problem are: means of finding solutions to ordinary, linear, and partial differential equations, the theory of multidimensional integral equations, and the theory of Green's functions.*

Results. *It was found that the radial components of the wave functions of the hydrogen atom, which determine the energy spectrum, can be obtained without transitioning to a spherical system, which simplifies the presentation of the topic material. A generalization of the sequence of presentation of the material on the quantum theory of the hydrogen atom is proposed.*

Conclusions. *The proposed generalization of the method for finding solutions to the Schrödinger equation for the hydrogen atom allows for a more complete presentation of the material on the topic "Quantum Mechanics", increases the degree of provability of the presentation of the material, and facilitates its understanding.*

KEYWORDS: *hydrogen atom; integral equation; quantum mechanics; methodology.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Авдонін К. Доповнення методики викладення квантової теорії атома водню. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 13-17. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-02.

FOR CITATION: Avdonin, K. (2025). Additional methods for teaching the quantum theory of the hydrogen atom. *Physical and Mathematical Education*, *40*(4), 13-17. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-02.

ВСТУП

Постановка проблеми. Необхідною складовою частиною підготовки високоякісних фахівців, дослідників у галузі створення і дослідження властивостей нових композитних та наноструктурованих матеріалів є отримання глибоких знань по квантовій механіці, володіння основними методами отримання результатів. Однією з ключових задач квантової механіки, розв'язок якої ілюструє сутність квантової механіки та використовується у теорії багато електронного атому та фізиці твердого тіла, є квантова теорія атома водню. Викладення матеріалу по квантовій теорії атома водню у підручниках має певні недоліки. У деяких посібниках знаходження розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню проводиться шляхом знаходження точних розв'язків наближеного, одночастинкового рівняння Шредінгера для електрону, при нехтуванні рухом ядра атому, що знижує рівень доказовості матеріалу. Доцільно знаходити точні розв'язки рівняння Шредінгера для атома водню і потім переходити до обґрунтованих наближень. У багатьох підручниках по квантовій фізиці квантова теорія атома водню викладається у двох окремих параграфах, що ускладнює розуміння теми. Окрім цього, у підручниках не приділяється достатня увага інтегральним рівнянням, відповідним рівнянню Шредінгера, що звужує коло методів майбутніх досліджень.

Аналіз актуальних досліджень. На сьогоднішній день інтегральні рівняння, відповідні хвильовій функції системи частинок, є ефективним, дійовим засобом отримання результатів. Наприклад, у роботі (Barlette et al., 2001) інтегральні рівняння застосовують до теорії розсіяння, у випадку центральносиметричного потенціалу, ілюструються поняття функції Гріна, інтегральні рівняння розсіяння Ліпмана-Швінгера для хвильової функції та оператора переходу. У роботі (Mikulski et al., 2014) спираючись на інтегральне рівняння типу Фредгольма отриманий аналітичний вигляд υ- коливної функції. У роботі (Visinelli & Gondolo, 2010) отримане нове інтегральне рівняння, яке дозволяє обчислити амплітуду розсіяння або анігіляції двох частинок, що перебувають під впливом двох потенціалів, якщо відома відповідна амплітуда одного з потенціалів. При огляді викладення матеріалу по квантовій теорії атома водню у сучасних підручниках можна відмітити, наприклад, роботу (Губарєв, 2024), в якій використовується найбільш типовий підхід для сучасних підручників з курсу загальної фізики: розглядається одночастинкове рівняння Шредінгера для електрону, початок системи координат вибирається у ядрі атому, нехтуючи рухом ядра атому. Потім, після переходу до сферичної системи координат, розділяють змінні і отримують систему з трьох незалежних рівнянь, добуток розв'язків яких буде хвильовою функцією електрону в атомі водню. У роботі (Юхновський, 2002) квантовій теорії атома водню передує більш загальна задача: розгляд квантової частинки у центральному силовому полі, частинним випадком якої є атом водню. Хвильова функція атома водню знаходиться за допомогою точного рівняння Шредінгера для атома водню, у вигляді добутку хвильової функції центру мас атома і хвильової функції атому, відносно центру мас, шляхом переходу до сферичної системи координат. У роботі (Висоцький, 2008) теж розглядається точне рівняння Шредінгера, яке не повністю розв'язується, приділяється більша увага фізичному змісту розв'язків. У роботі (Кубишкін, 2016) радіальна складова хвильової функції основного стану знаходиться з її асимптотичної поведінки, наступні радіальні складові хвильової функції знаходяться шляхом прямої підстановки у вихідне рівняння добутку хвильової функції основного стану і скінченого поліному від модуля радіус-вектора. У роботі (Боровий & Оліх, 2011) більша частина квантової теорії атома водню теж викладається з використанням матеріалу іншого параграфу: частинка у центрально-симетричному полі, де більш детально аналізується поведінка радіальної складової хвильової функції частинки при малих відстанях до силового центру.

Стаціонарне рівняння Шредінгера для атома водню має вигляд:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2\mu_1}\Delta_1+\frac{\hbar^2}{2\mu_2}\Delta_2+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}\right)\psi=\left(W_{12}+W_C\right)\psi, \tag{1}$$

де $\vec{r}_1$; $\vec{r}_2$ – радіус-вектори електрону та ядра, μ_1; μ_2 – маси електрону та ядра, Δ_1; Δ_2 – лапласіани для електрону та ядра, відповідно; W_{12} – енергія атома водню, відносно центру мас; W_C – кінетична енергія центру мас атома водню. Якщо перейти до інших змінних за правилом:

$$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2 \quad ; \quad \vec{\eta}=\frac{\mu_1\vec{r}_1+\mu_2\vec{r}_2}{\mu_1+\mu_2}, \tag{2}$$

то хвильову функцію атому можна шукати у вигляді добутку двох функцій: $\psi=\varphi\left(\vec{r}\right)\varphi_C\left(\vec{\eta}\right)$ і представити рівняння (1) у вигляді:

$$\varphi_C\left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r\varphi+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\varphi+W_{12}\varphi\right)+\varphi\left(\frac{\hbar^2}{2\left(\mu_1+\mu_2\right)}\Delta_\eta\varphi_C+W_C\varphi_C\right)=0. \tag{3}$$

де $\mu=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$, Δ_r; Δ_η – лапласіани у нових змінних.

Покладаючи рівними нулю дужки у виразі (3) можна звести пошук розв'язків рівняння (1) до знаходження розв'язків двох незалежних рівнянь:

$$\left(\Delta_r-k^2\right)\varphi=u\varphi, \tag{4}$$

$$\left(\Delta_\eta+k_C^2\right)\varphi_C=0, \tag{5}$$

де $k=\frac{\sqrt{2\mu\left(-W_{12}\right)}}{\hbar}$; $u=-\frac{2\alpha}{r}$; $\alpha=\frac{\mu e^2}{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}$; $k_C=\frac{\sqrt{2\left(\mu_1+\mu_2\right)W_C}}{\hbar}$.

Метою роботи є демонстрація можливості отримання радіальної складової розв'язків рівняння (4), шляхом застосування, відповідного йому, інтегрального рівняння.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При знаходженні розв'язків лінійного, диференціального рівняння у частинних похідних (4), була використана теорія багатовимірних, інтегральних рівнянь та частинний випадок функції Гріна, відповідної одночастинковому рівнянню Шредінгера.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримання радіальної складової хвильової функції. Однорідне, інтегральне рівняння, відповідне диференціальному рівнянню (4), отримане у роботі (Avdonin & Kovalchuk, 2019), має вигляд:

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u\left(\vec{\xi}\right) \varphi\left(\vec{\xi}\right) d\vec{\xi}\,, \tag{6}$$

де $G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) = -\dfrac{\exp\left(-k\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|\right)}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}$ – одночастинкова функція Гріна, відповідна рівнянню (4).

Якщо підставити у рівняння (6) функцію Гріна і приведену потенціальну енергію в явному вигляді, то:

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\exp\left(-k\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|\right)}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} \frac{2\alpha}{\xi} \varphi\left(\vec{\xi}\right) d\vec{\xi}\,. \tag{7}$$

У роботі (Авдонін, 2023) показано, що згортку функцій Гріна можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial G(\vec{r})}{\partial k} = \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) G\left(\vec{\xi}\right) d\vec{\xi}\,\cdot \tag{8}$$

Для одночастинкової функції Гріна з рівності (8) випливає:

$$\exp(-kr) = \frac{k}{\alpha}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\exp\left(-k\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|\right)}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} \frac{2\alpha}{\xi} \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi}\,, \tag{9}$$

тобто:

$$\exp(-kr) = \frac{k}{\alpha}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u(\xi) \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi}\,, \tag{10}$$

Порівнюючи вирази (7) і (10) можна побачити, що при рівному одиниці постійному множнику перед інтегралом у виразі (10), розв'язком однорідного, інтегрального рівняння (6) буде експонента: $\exp(-kr)$.

Таким чином, радіальна складова першої хвильової функції атома водню і відповідне їй значення хвильового числа будуть такими:

$$\varphi_1 = \exp(-k_1 r)\ ;\quad k_1 = \alpha\,. \tag{11}$$

Радіальну складову другої хвильової функції теж можна знайти, як розв'язок інтегрального рівняння (6).

Запишемо рівняння (10) у вигляді:

$$\frac{\alpha}{k}\exp(-kr) = \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u(\xi) \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi}\,\cdot \tag{12}$$

Знайдемо похідну по k від рівняння (12):

$$-\left(\frac{\alpha}{k^2}+\frac{\alpha r}{k}\right)\exp(-kr) = \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right)}{\partial k} u(\xi) \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi} - \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u(\xi)\, \xi \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi}\,. \tag{13}$$

Доданок у виразі (13), який містить похідну від функції Гріна, можна перетворити, використовуючи властивість симетричності згортки, наступним чином:

$$\frac{k}{\alpha}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right)}{\partial k} u(\xi) \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi} = -\frac{k}{\alpha}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u(\xi)\, \xi \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi}\,. \tag{14}$$

Враховуючи вираз (14) похідну (13) можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{\alpha}{k^2}+\frac{\alpha r}{k}\right)\exp(-kr) = 2\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u(\xi)\, \xi \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi}\,. \tag{15}$$

Вираз (15) можна перетворити наступним чином:

$$\frac{2k}{\alpha}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right) u(\xi)\, k\xi \exp(-k\xi)\, d\vec{\xi} = (1+kr)\exp(-kr)\,. \tag{16}$$

Покладаючи множник перед інтегралом у виразі (16) рівним одиниці, знаходимо значення хвильового числа для другої хвильової функції: $k_2 = \frac{\alpha}{2}$. З рівності (16) випливає, що друга хвильова функція буде добутком експоненти і поліному першої степені від змінної $k_2 r$:

$$\varphi_2 = \left(1 + a k_2 r\right)\exp\left(-k_2 r\right). \tag{17}$$

де a – постійна, безрозмірна величина.

Підставляючи рівність (17) в інтегральне рівняння (6) та використовуючи рівності (10) і (16), з новим значенням хвильового числа, одержимо: $a = -1$. Тоді, радіальна складова другої хвильової функції буде такою:

$$\varphi_2 = \left(1 - k_2 r\right)\exp\left(-k_2 r\right). \tag{18}$$

Для отримання радіальної складової третьої хвильової функції знайдемо похідну по k від рівняння (15):

$$-\left(\frac{2\alpha}{k^3} + \frac{2\alpha r}{k^2} + \frac{\alpha r^2}{k}\right)\exp\left(-kr\right) = 2\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right)}{\partial k} u\left(\xi\right)\xi \exp\left(-k\xi\right) d\vec{\xi} - \\ -2\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right) u\left(\xi\right)\xi^2 \exp\left(-k\xi\right) d\vec{\xi} \tag{19}$$

Перетворюючи доданок у виразі (19), який містить похідну від функції Гріна, з використанням представлення похідної по k від функції Гріна у вигляді згортки:

$$\frac{\partial G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right)}{\partial k} = 2k\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r} - \vec{\vartheta}\right) G\left(\vec{\xi} - \vec{\vartheta}\right) d\vec{\vartheta}, \tag{20}$$

та рівності (15), маємо:

$$2\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\partial G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right)}{\partial k} u\left(\xi\right)\xi \exp\left(-k\xi\right) d\vec{\xi} = -\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right) u\left(\xi\right)\xi^2 \exp\left(-k\xi\right) d\vec{\xi} - \\ -\frac{1}{k}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right) u\left(\xi\right)\xi \exp\left(-k\xi\right) d\vec{\xi} \tag{21}$$

Використовуючи вираз (21) та рівність (16) похідну (19) можна перетворити і записати у вигляді:

$$\frac{3k}{\alpha}\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} G\left(\vec{r} - \vec{\xi}\right) u\left(\xi\right) k^2 \xi^2 \exp\left(-k\xi\right) d\vec{\xi} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3kr}{2} + k^2 r^2\right). \tag{22}$$

Покладаючи множник перед інтегралом у виразі (22) рівним одиниці, знаходимо значення хвильового числа для третьої хвильової функції: $k_3 = \frac{\alpha}{3}$. З рівності (22) випливає, що третя хвильова функція буде добутком експоненти і поліному другої степені від змінної $k_3 r$:

$$\varphi_3 = \left(1 + a k_3 r + b k_3^2\right)\exp\left(-k_3 r\right). \tag{23}$$

де a , b – постійні, безрозмірні величини.

Підставляючи рівність (23) в інтегральне рівняння (6) та використовуючи рівності (10), (16) та (23) з новим значенням хвильового числа, одержимо: $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$. Тоді, радіальна складова третьої хвильової функції буде такою:

$$\varphi_3 = \left(1 - 2k_3 r + \frac{2}{3}k_3^2 r^3\right)\exp\left(-k_3 r\right). \tag{24}$$

Беручи похідні третього, четвертого і т. д. порядку від виразу (12) та виконуючи запропонований алгоритм, можна знаходити радіальні складові наступних хвильових функцій атома водню у вигляді добутку експоненти на поліноми Лагера та показати, що дозволені значення для хвильового числа обернено пропорційні до номеру хвильового числа.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі запропонований рекурентний шлях отримання радіальних складових хвильової функції атома водню, який спирається на інтегральне рівняння, відповідне рівнянню Шредінгера для атома водню, без переходу до сферичної системи координат. Слід відмітити, що знайдені радіальні складові хвильових функцій не потребують перевірки на ортогональність, оскільки розв'язки однорідного, інтегрального рівняння (6) завжди ортогональні, як показано у роботі (Авдонін, 2023). Застосування інтегральних рівнянь, при викладенні теми «Квантова теорія атома водню», доповнює повноту і доказовість матеріалу, що буде сприяти підвищенню якості навчального процесу у закладах вищої освіти. В якості одного з напрямів подальших досліджень можна запропонувати пошук кутової складової хвильової функції атома водню, за допомогою інтегральних рівнянь. Окрім цього, запропонований метод пошуку розв'язків рівняння Шредінгера для атома водню можна використати у побудові квантової теорії систем частинок з кулонівською взаємодією.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автор підтверджує відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Avdonin, K.V. & Kovalchuk O.V. (2019). Integral equations for the wave function of particle systems. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics, 22*(3), 319-322. https://doi.org/10.15407/spqeo22.03.319
2. Barlette, V.E., Leite, M.M., & Adhikari, S.K. (2001). Integral equations of scattering in one dimension. *Am. J. Phys.*, *69*, 1010–1013. https://doi.org/10.1119/1.1371011
3. Mikulski, D., Eder, K., & Konarski, J. (2014). Fredholm integral equation for the perturbation theory in quantum mechanics. *J. Math. Chem.*, *52*, 2317–2321. https://doi.org/10.1007/s10910-014-0387-0
4. Visinelli, L., & Gondolo P. (2010). An integral equation for distorted wave amplitudes. *Arxiv preprint arXiv: 1007*.2903. https://ar5iv.labs.arxiv.org/html/1007.2903
5. Авдонін, К. (2023). Метод знаходження хвильової функції системи частинок. *Фізико-математична освіта, 38*(2), 7–10. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001
6. Боровий, М.О., & Оліх, О.Я. (2011). Фізичні основи квантової механіки. *КНУ.*
7. Висоцький, В.І. (2008). Квантова механіка та її використання у прикладній фізиці. *ВПЦ «Київський університет».*
8. Губарєв, С.В. (2024). Квантова механіка. Конспект лекцій. *ДДТУ.*
9. Кобушкін, О.П. (2016). Квантова механіка. *НТУУ «КПІ».*
10. Юхновський, І.Р. (2002). Основи квантової механіки. *Либідь.*

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Avdonin, K.V. & Kovalchuk O.V. (2019). Integral equations for the wave function of particle systems. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics, 22*(3), 319-322. https://doi.org/10.15407/spqeo22.03.319
2. Barlette, V.E., Leite, M.M., & Adhikari, S.K. (2001). Integral equations of scattering in one dimension. *Am. J. Phys.*, *69*, 1010–1013. https://doi.org/10.1119/1.1371011
3. Mikulski, D., Eder, K., & Konarski, J. (2014). Fredholm integral equation for the perturbation theory in quantum mechanics. *J. Math. Chem.*, *52*, 2317–2321. https://doi.org/10.1007/s10910-014-0387-0
4. Visinelli, L., & Gondolo P. (2010). An integral equation for distorted wave amplitudes. *Arxiv preprint arXiv: 1007*.2903. https://ar5iv.labs.arxiv.org/html/1007.2903
5. Avdonin, K. (2023). Metod znakhodzhennia khvylovoi funktsii systemy chastynok [Method of finding the wave function of a system of particles]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 38*(2), 7-10. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001
6. Borovyi, M.O. & Olikh, O.Ia. (2011). *Fizychni osnovy kvantovoi mekhaniky [Physical foundations of quantum mechanics]*. KNU.
7. Vysotskyi, V.I. (2008). *Kvantova mekhanika ta yii vykorystannia u prykladnii fizytsi [Quantum mechanics and its use in applied physics]*. VPTs «Kyivskyi universytet».
8. Hubariev, S.V. (2024). *Kvantova mekhanika. Konspekt lektsii [Quantum mechanics. Lecture notes]*. DDTU.
9. Kobushkin, O.P. (2016). *Kvantova mekhanika [Quantum mechanics]*. NTUU «KPI».
10. Iukhnovskyi, I.R. (2002). *Osnovy kvantovoi mekhaniky [Fundamentals of quantum mechanics]*. Lybid.

| *Матеріал надійшов до редакції: 11.06.2025 р.* | *Прийнято до друку: 21.07.2025 р.* | *Опубліковано: 29.09.2025 р.* |