

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С.Макаренка

Олена Мартиненко, Ярослав Чкана

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

З математичного аналізу

Вступ до аналізу

Навчально-методичний посібник

Суми – 2026

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)

М 29

Рекомендовано вченою радою Сумського державного педагогічного університету імені А.С.Макаренка (протокол № 7 від 02.03.2026 р.)

Рецензенти:

Наталія Кугай – доктор педагогічних наук, доцент кафедри фізико-математичної освіти та інформатики Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

Микола Назаренко – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Мартиненко О.В., Чкана Я.О.

М 29 Робочий зошит з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Навчально-методичний посібник / О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана. Суми, ФОП Литовченко Є.П., 2026. 80 с.

Робочий зошит з курсу "Вступ до аналізу" призначений для студентів першого курсу математичних, природничих та технічних спеціальностей, які вивчають математичний аналіз.

Зошит охоплює фундаментальні розділи математичного аналізу: логічні операції та методи доведення, теорію множин, властивості дійсних чисел, теорію функцій, числові послідовності, границі функцій та неперервність. Матеріал структуровано у вигляді 14 практичних занять, кожне з яких містить три блоки завдань різного рівня складності та призначення. Робочий зошит також включає тестові завдання для самоконтролю. Поєднання теоретичної підготовки, аудиторної практики та самостійної роботи забезпечує системний підхід до вивчення математичного аналізу та формування міцних фундаментальних знань.

Зошит може використовуватися як основний навчальний посібник для практичних занять, а також як допоміжний матеріал для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)



Зміст

Вступне слово	4
Логічні операції. Квантори. Метод математичної індукції. Доведення від супротивного.....	6
Множини та дії над ними.....	10
Множина дійсних чисел.....	14
Модуль дійсного числа.....	17
Обмежені множини. Точні грані множин	19
Функція: основні поняття.....	23
Основні класи функцій: обмежені, монотонні, парні та непарні, періодичні	28
Перетворення графіків функцій.....	32
Числова послідовність та її границя.....	35
Обчислення границь числових послідовностей	40
Границя функції	44
Техніка обчислення границь функцій	48
Неперервність функції в точці	52
Властивості функцій, неперервних на відрізку	59
Тести	62



Вступне слово

Шановні студенти!

Перед вами робочий зошит з розділу "Вступ до аналізу" фундаментального курсу «Математичний аналіз», який закладає основи математичного мислення й аналітичних навичок, здатності до абстракції, вміння бачити закономірності, формулювати гіпотези та доводити теореми.

Математичний аналіз – це не лише обчислення та формули. Це мова, якою описуються процеси змін та руху в навколишньому світі: від траєкторії руху планет до динаміки фінансових ринків, від моделювання хімічних реакцій до алгоритмів штучного інтелекту тощо. Опанування методів математичного аналізу відкриває двері до глибокого розуміння природничих наук, економіки, інженерії та комп'ютерних технологій. Систематична робота з цим зошитом допоможе вам не тільки успішно скласти екзамен, але й розвинути навички розв'язування складних задач, які будуть корисними у вашій майбутній професійній діяльності, та сформулювати міцне підґрунтя для подальшого вивчення математичних дисциплін.

Робочий зошит структурований таким чином, щоб забезпечити системне опанування матеріалу через поєднання теоретичних знань та практичних навичок. Кожне практичне заняття складається з трьох блоків:

- **Блок 1** – теоретична частина та базові практичні завдання для самостійного опрацювання після лекції (підготовка до практичного заняття)

- **Блок 2** – практичні завдання для виконання на практичному занятті за підтримки викладача

- **Блок 3** – домашнє завдання для самостійного виконання після практичного заняття

Робочий зошит охоплює ключові розділи вступу до математичного аналізу:

- Логічні операції та методи доведення
- Теорія множин
- Дійсні числа та їх властивості
- Функції та їх класифікація
- Послідовності та їх границі
- Границі функцій
- Неперервність функцій

Рекомендації щодо роботи з зошитом

Перед практичним заняттям (Блок 1):

- уважно прочитайте конспект лекції або відповідний параграф у навчально-методичному посібнику **Мартиненко О.В., Чкана Я.О. Вступ до математичного аналізу**, Суми, 2025. 114 с.;
- виконайте теоретичну частину Блоку 1 (заповніть пропуски, дайте означення тощо);
- розв'яжіть базові практичні завдання;
- позначте питання, які викликали труднощі, для обговорення на занятті.

На практичному занятті (Блок 2) доцільно:

- активно брати участь в обговоренні матеріалу;
- виконувати завдання за підтримки викладача;
- не соромитися ставити запитання;
- звертати увагу на методи розв'язування та типові помилки.

Після практичного заняття (Блок 3):

- самостійно виконайте домашнє завдання;
- при необхідності зверніться до викладача за консультацією;
- своєчасно здавайте виконані завдання.

Бажаємо вам натхнення, наполегливості та успіхів у цій захоплюючій подорожі світом математичного аналізу!



Логічні операції. Квантори. Метод математичної індукції. Доведення від супротивного

1 Теоретична частина

1.1.1. Заповніть пропуски у твердженнях:

а) висловлювання — це речення, щодо якого можна однозначно встановити _____ або _____;

б) наведіть приклади істинного та хибного висловлювань:

«_____»

«_____».

1.1.2. Узгодьте логічні операції та їх символи:

заперечення	\Leftrightarrow
диз'юнкція	\bar{A}
кон'юнкція	\Rightarrow
імплікація	\wedge
еквіваленція	\vee

1.1.3. Вкажіть, які з наведених висловлювань істинні, а які — хибні. Обґрунтуйте відповідь.

а) «Число 9 ділиться на 3»:

б) «Існує натуральне число, яке ділиться на 2 і 3»:

в) «Псел - озеро»:

г) « $2 > 7$ »:

1.1.4. Дайте означення понять або пояснення їх змісту, наведіть приклад:

а) предикат – _____
_____;

б) теорема – _____
_____;

в) доведення теореми _____
_____;

г) умова А є достатньою для В _____
_____;

д) умова В є необхідною для А _____
_____.

1.1.5. Знайдіть помилки або уточніть твердження:

а) Кожна пряма теорема має обернену, що є істинною.

б) Якщо теорема формулюється як $A \Rightarrow B$, то завжди $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$.

1.1.6. Поясніть сутність методів доведення тверджень:

а) пряме доведення _____;

б) доведення від супротивного _____;

в) доведення за допомогою математичної індукції _____
_____.

Практична частина

1.2.1. Запишіть твердження за допомогою кванторів і математичних символів:

а) «Якщо функція $f(x) = \cos x$, то її модуль не перевищує 1» _____
_____;

б) «Графік функції $y = x^2$ перетинає вісь абсцис лише в одній точці»: _____.

1.2.2. *Визначте базу, індукційне припущення, індукційний крок та висновок: для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ сума перших n непарних натуральних чисел дорівнює n^2 , тобто $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$:*

2 Практичне заняття

2.1. *Перевірте, яке з цих тверджень є вірним:*

1) $\forall a \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2ax + a = 0$;

2) $\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 2ax + a \neq 0$.

2.2. *Сформулюйте за допомогою кванторів твердження:*

«Знайдеться таке число a , що квадратний тричлен $x^2 + 2ax + 4$ є додатним для будь-якого дійсного x ». З'ясуйте, чи є вірним це твердження.

2.3. *За допомогою логічних знаків сформулюйте властивості показникової функції $y = a^x$:*

1) $y(x)$ визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$;

2) $y(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;

3) $y(x_1 + x_2) = y(x_1) \cdot y(x_2)$ для будь-яких дійсних x_1 і x_2 ;

4) *знайдеться єдина точка, в якій значення функції $y = a^x$ дорівнює одиниці.*

2.4. За допомогою методу математичної індукції довести справедливість наступних тверджень:

1) $(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) : 11$ для $\forall n \in N$;

2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$ для $\forall n \in N$;

3) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ для $\forall n > 1$;

4) $(1+x)^n \geq 1+nx$ для $\forall x > -1$ та $\forall n \in N$ (нерівність Бернуллі).

3 Домашнє завдання

3.1. Нехай $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Довести, що
 $\forall x \in R \ y \geq 0 \Leftrightarrow D \leq 0 \wedge a > 0$.

3.2. Довести нерівність $2^{n+2} > 2n + 5$.

3.3. У магазин привезли 33 коробки з цукерками чотирьох видів, причому в кожній коробці лежать цукерки одного виду. Чи можна знайти 9 коробок з цукерками одного виду.

Вказівка. Використати метод доведення від супротивного.



Множини та дії над ними

1 Теоретична частина

1.1.1. Вставте відповідні слова у пропуски:

- 1) Множина — це сукупність _____, що мають певну _____.
- 2) Якщо всі елементи множини A належать множині B , то говорять, що A є _____ множини B , і записують це як _____.
- 3) Множина, яка не містить жодного елемента, називається _____ множиною.
- 4) Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з елементів, які належать _____.
- 5) Перетином множин A і B називається множина, що складається з елементів, які належать _____.
- 6) Різницею множин $A \setminus B$ називають множину всіх елементів, які належать множині _____, але не належать _____.
- 7) Множина натуральних чисел позначається літерою _____, цілих — _____, раціональних — _____, дійсних — _____.

1.1.2. Позначте правильні твердження:

- 1) $\emptyset \subset A$ для будь-якої множини A
- 2) Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A=B$
- 3) Множини $A=\{1,2\}$ і $B=\{2,1\}$ є різними
- 4) Якщо $A \cap B = \emptyset$, то множини A і B є рівними
- 5) $A \cup B$ містить всі елементи, які належать або A , або B , або обом одночасно.

Практична частина

1.2.1. Запишіть усі підмножини множини $A=\{2,4,6\}$.

_____;

1.2.2. Дано множини $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{4,6,10\}$. Знайдіть $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Чи можна стверджувати, що $B \subset A$?

1.2.3. Побудуйте приклади множин X , Y , таких що:

1) $X \cap Y = \emptyset$ _____

2) $X \subset Y$ _____

3) $X \cup Y = Y$ _____

1.2.4. За святковим столом сиділо 12 дітей. П'ятеро з них їли сливи, десятеро – яблука. Фруктами смакували усі. Скільки дітей їли і сливи, і яблука? _____

1.2.5. Розташуйте задані множини у такій послідовності, щоб кожна попередня була підмножиною наступної:

A – множина всіх трикутників;

B – множина всіх многокутників;

C – множина всіх рівносторонніх трикутників;

D – множина всіх рівнобедрених трикутників

1.2.6. Нехай задана універсальна множина $U=\{1,2,\dots,20\}$ і множини $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ та $B=\{5,10,15,20\}$. Знайдіть \bar{A} , \bar{B} , $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

2 Практичне заняття

2.1. Нехай $A = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$,
 $C = \{x \in \mathbb{Q} : x = mn, m \in \mathbb{Z}, n = 2, -4 < x < 4\}$.

- 1) Запишіть множини A, B, C у вигляді списку їх елементів.
- 2) Знайдіть множини $A \cap B, B \cap C, (A \cup C) \setminus B, A \Delta B$ і проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера.

2.2. Проаналізуйте твердження на істинність. У випадку хибного твердження, наведіть контрприклад.

- 1) $\forall A, B : A \subset A \cup B$
- 2) Якщо $A \cup B = A$, то $B \subset A$
- 3) Якщо $A \cap B = \emptyset$, то $A = B \setminus A$
- 4) Якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$

2.3. Визначте множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, якщо:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 10 < 0\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right| \geq 2 \right\}.$$

2.4. Чи є множини $A = \left\{x : \frac{x^2}{x - 0,5} > 2 \right\}$ та $B = \left\{x : \frac{x - 0,5}{x} < 0,5 \right\}$

рівними між собою?

2.5. Нехай $A = \{x : 2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{y : 1 \leq y \leq 3\}$. Зобразити на площині xOy множину точок $A \times B$.

2.6. Визначити множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B$, якщо:

- а) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}$;
- б) $A = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$, $B = \{(x, y) : \max(|x+1|, |y+1|) \leq 2\}$.

2.7. Знайти об'єднання та перетин множин $X_n, n \in \mathbb{N}$, якщо

$$X_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right].$$

3 Домашнє завдання

3.1. Дано твердження α щодо множин A та B . За допомогою кванторів \forall і \exists сформулюйте твердження $\bar{\alpha}$. Яке з тверджень є вірним, якщо:

$$\alpha = \{\forall x \in A \exists y \in B: y = x + 5\},$$

$$A = \left\{ x = \frac{6-4n}{2n-1}, n \in Z \right\}, B = \{y \in R: y^4 - 10y^3 + 21y^2 < 0\}?$$

3.2. Знайдіть підмножини A та B множини C такі, що для будь-якої підмножини X множини C виконується рівність $X \cap A = X \cup B$.

3.3. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, якщо:

а) $A = \{(x, y): \max(|x|, |y|) \leq 1\}$, $B = \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\}$;

б) $A = \{(x, y): \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \leq 2\}$, $B = \{(x, y): |x| + |y| \leq 2\}$

3.4. Знайти об'єднання та перетин множин X_n , $n \in N$, якщо

$$X_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{2n-1}{n} \right].$$



Множина дійсних чисел

1 Теоретична частина

1.1.1. Назвіть усі властивості множини дійсних чисел:

- 1) _____;
- 2) _____;
- 3) _____;
- 4) _____;
- 5) _____.

1.1.2. Які з властивостей множини дійсних чисел задовольняють множини $N, Z, Q, R \setminus Q$? _____

1.1.3. Вставте пропущені слова: кожне раціональне число можна подати у вигляді _____ десяткового дроби; кожне ірраціональне число подається у вигляді _____ десяткового дроби.

1.1.4. Назвіть усі числові множини, до яких належать наведені числа:

Число	Множини
7	
-2	
$\frac{3}{e^4}$	
0	
$\sqrt{2}$	
$\log_2 3$	
$\sin \frac{\pi}{6}$	

Практична частина

1.2.1. Установіть відповідність між числовим виразом (1-4) та проміжком (А-Д), якому належить його значення.

	Вираз		Проміжок
1	$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$	А	$(-\infty; -3)$
2	$\frac{2}{8^3}$	Б	$[-3; 0)$
		В	$[0; 1)$
3	$\log_{\frac{1}{2}} 10$	Г	$[1; 3)$
4	$\left \frac{1}{2} - 2\right $	Д	$[3; +\infty)$

1.2.2. Вкажіть правильну нерівність, якщо $a = 5\sqrt{2}$, $b = 7$, $c = \sqrt{51}$

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$a < b < c$	$c < a < b$	$a < c < b$	$b < c < a$

1.2.3. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

2 Практичне заняття

2.1. З'ясуйте, якій множині належить число

$$\left(\frac{\sqrt{561^2 - 459^2}}{4\frac{2}{7} \cdot 0,15 + 4\frac{2}{7} : \frac{20}{3}} + 4\sqrt{10} \right) : \frac{\sqrt{40}}{3}.$$

2.2. Доведіть, що:

а) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ є натуральним числом;

б) $1,010010001\dots$ є ірраціональним.

2.3. Запишіть у вигляді звичайного дроби числа $2,075$; $5,(82)$; $3,7(13)$.

2.4. Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є число ірраціональне.

2.5. Доведіть, що число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ є ірраціональним.

2.6. Вкажіть два ірраціональних числа, для яких:

- 1) сума є числом раціональним,
- 2) добуток є числом ірраціональним.

2.7. Доведіть, що число $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ є алгебраїчним.

2.8. Порівняйте наступні дійсні числа:

- 1) $3,3$ і $3,298$;
- 2) $\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt[4]{3}$;
- 3) $\sqrt{3} + 2$ і $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

3 Домашнє завдання

3.1. а) Побудуйте найбільше дійсне число, менше $0,9$ і що не містить в десятковому записі цифру 9 .

б) Чи існує найбільше число, яке менше $0,9$ і записується без цифр 8 і 9 ?

в) Чи існує найбільше число, яке менше 1 і записується без цифр 7 та 8 ?

3.2. Порівняти числа $\lg^2 11$ і $\lg 12$.

3.3. Нехай $\alpha, \beta \in I$, $r \in Q$. Які з наведених чисел можуть виявитись раціональними:

- 1) $\alpha + \beta$; 2) $\alpha + r$; 3) $\sqrt{\alpha}$; 4) $\alpha \cdot \beta$; 5) \sqrt{r} ; 6) $\alpha \cdot r$;
- 7) $\sqrt{\alpha + r}$; 8) $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$; 9) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$; 10) $\sqrt{r + \sqrt{\alpha}}$?



Модуль дійсного числа

1 Теоретична частина

1.1.1. Проаналізуйте твердження на істинність. У випадку хибного твердження, наведіть контрприклад:

а) модуль будь-якого числа дорівнює цьому числу;

б) модуль деякого числа є число недодатне;

в) $|x| > 0 \Rightarrow x > 0$ _____

г) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ _____

д) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ _____

1.1.2. Доведіть методом математичної індукції, що
 $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

Практична частина

1.2.1. Розв'яжіть нерівність $|x| \leq 4$: _____

1.2.2. Знайдіть відстань між точками $A(-5)$ і $B(3)$:

1.2.3. Розв'яжіть рівняння $15 - |-x| = |-3,6|$:

1.2.4. Для яких чисел справедлива нерівність $|x| \leq x$:

1.2.5. Обчисліть $|2 - \sqrt{5}| + |2 + \sqrt{5}|$:

1.2.6. Обчисліть $|a - 1| + |-7|$, якщо $a < 1$:

2 Практичне заняття

2.1. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2}$.

2.2. Визначте, для яких x справедливі дані рівності:

1) $|x^3 - x^2| = x^3 - x^2$;

2) $|x^2 - 9| = 9 - x^2$;

3) $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \frac{x-2}{x+2}$;

4) $|(x^2 + x + 2) + (2x + 1)| = |x^2 + x + 2| + |2x + 1|$;

5) $|(x^4 - 1) - (x^2 + 1)| = |x^4 - 1| - |x^2 + 1|$.

Вказівка: використайте означення та властивості модуля дійсного числа.

2.3. Розв'яжіть рівняння та нерівності:

1) $|2x + 3| \leq 5$,

7) $\cos^2 x \leq \frac{3}{4}$,

2) $\log_2 |x + 2| \geq 1$,

8) $|x - 3| - |x + 1| = 2x - 1$,

3) $2^{|x|-3} \leq 1$,

9) $|x - 2| + |2x - 1| > 3x + 1$,

4) $|x + 2| > x + 2$,

10) $|x| < |x + 1| - |2x - 4|$,

5) $||x + 1| - |x - 1|| < 1$,

11) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$,

6) $\frac{1}{|x-1|-1} \leq 1$,

12) $||x| - 2| = 1$.

3 Домашнє завдання

3.1. Розв'яжіть рівняння та нерівності:

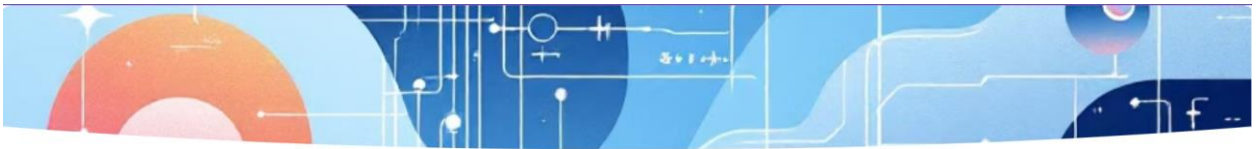
а) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$;

б) $(x^2 + x)|\sin x| = 2 \sin x$;

в) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2} > 1$.

3.2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} |x - y| = |x - a|; \\ \lg(y - a) = \lg(4a^2 + x - x^2). \end{cases}$$



Обмежені множини. Точні грані множин

1 Теоретична частина

1.1.1. Скільки верхніх (нижніх) граней може мати числова множина? _____

1.1.2. З'ясуйте правильність тверджень:

а) множина A обмежена знизу тоді і тільки тоді, коли $\exists M \geq 0: |a| \geq M \quad \forall a \in A$: _____;

б) множина A обмежена тоді і тільки тоді, коли $\exists M > 0: |a| < M \quad \forall a \in A$: _____;

в) множина необмежена, якщо вона необмежена і зверху, і знизу: _____;

г) якщо не існує $\max A$ або $\min A$, то A – нескінченна множина: _____.

1.1.3. Наведіть приклад обмеженої числової множини, яка:

а) не має найбільшого елемента, але має найменший: _____;

б) не має ні найменшого, ні найбільшого елемента: _____.

Практична частина

1.2.1. Які з множин $N, Z, Q, R, \langle a; b \rangle, [a; b], (a; b), \{-1, -2, -3, \dots\}$,

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \left\{((-1)^n + 1) \cdot n, n \in N\right\}$ є обмеженими зверху,

обмеженими знизу, обмеженими? _____

1.2.2. З'ясуйте, які з даних числових множин обмежені зверху, які обмежені знизу, які необмежені. Знайдіть точні грані для обмежених множин:

а) множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, $0 < p < q$: _____
_____;

б) множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, $0 < q < p$: _____
_____;

в) множина раціональних чисел, що належать відрізку $[2;7]$: _____
_____.

1.2.3. Наведіть приклад числової множини A , для якої $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, але $A \neq [0;1]$: _____

2 Практичне заняття

2.1. Покажіть, що множина $X = \left\{ \frac{10\sqrt{n}}{n+25} : n \in \mathbb{N} \right\}$ є обмеженою.

2.2. З'ясуйте, які з даних числових множин обмежені зверху, які обмежені знизу, які необмежені. Знайдіть точні грані для обмежених множин:

а) множина ірраціональних чисел, що належать відрізку $[2;7]$;

б) множина периметрів правильних 2^{n+1} -кутників, вписаних в коло радіуса R ;

в) множина чисел виду $\left\{ \frac{n^3}{2n^3+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;

г) множина дійсних чисел, отриманих усіма можливими перестановками цифр у нескінченному десятковому дробі, який

виражає число $\frac{1}{7}$;

д) множина $Y = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} : n \in N \right\}$;

ж) множина чисел виду $\left\{ \left((-1)^n + 1 \right) \cdot n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{n} : n \in N \right\}$.

3 Домашнє завдання

3.1. Покажіть, що множина $X = \left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in N \right\}$ є обмеженою.

Вказівка. Використайте метод математичної індукції для доведення нерівності $n \leq 2^{n-1}$.

3.2. З'ясуйте, чи має множина чисел виду $\left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m \in N, n \in N \right\}$

найбільший та найменший елементи, точні грані.



Функція: основні поняття

1 Теоретична частина

1.1.1. Наведіть приклад відповідності між множинами, яке не є функцією, і поясніть чому. _____

1.1.2. Чи може одна функція бути задана кількома способами одночасно? Наведіть приклад. _____

1.1.3. Чи можуть бути рівними функції, задані різними формулами? Наведіть приклад: _____
_____.

1.1.4. Як пов'язані області визначення та значень прямої та оберненої функцій? _____

1.1.5. Сформулюйте властивості графіків прямої та оберненої функцій: _____

1.1.6. Наведіть приклади функцій з реального життя: _____

Практична частина

1.2.1. Чи задають функцію $y = f(x)$ наведені співвідношення між змінними x та y :

а) $|x| + y = 1$ _____; г) $y = 2$ _____;

б) $|x| + |y| = 1$ _____; д) $x = \left[\frac{y}{2} \right]$ _____;

в) $x = 0$ _____; е) $y = \{2x\}$ _____?

1.2.2. Для функції $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ знайдіть $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f(x^3)$, $f(tx)$, $\sqrt{f(x)}$. Чи існує $f(-1)$, $f(1)$? _____

1.2.3. Знайдіть всі корені рівняння $f(x) = f(0)$, якщо $f(x) = x^2 - 2x + 3$. _____

1.2.4. Наведіть приклади функцій, що задовольняють умови:

а) $-1 < f(x) < 1$ _____;

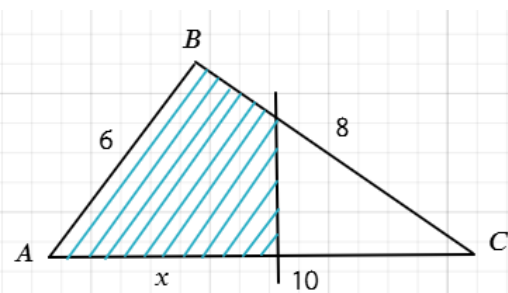
б) $|f(x)| \leq 2$ _____;

в) $f(x)$ визначена для всіх $x > 0$ _____;

г) $f(x)$ визначена тільки для натуральних значень x _____

2 Практичне заняття

2.1. У $\triangle ABC$ сторони $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Нехай $S(x)$ – площа частини трикутника, що відтинається прямою, перпендикулярною стороні AC та розташованою на відстані x від вершини A . Запишіть аналітичний вираз для $S(x)$.



2.2. Не використовуючи знак модуля, запишіть аналітичний вираз для функції $y = |x - 3| + |x + 2|$.

2.3. Обчисліть значення функцій $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ і $\varphi(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$ в

точках, для яких $x + \frac{1}{x} = 2$.

2.4. Знайдіть значення функцій у вказаних точках:

а) $f(x) = ax + b$, де $f(0) = 2$, $f(1) = 3$; $x = -1$, $x = 2$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -2 < x < 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 2; \end{cases}$ $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = 1$, $x = 0$;

в) $f(t) = [t]$; $t = \frac{1}{2}$; $t = -\frac{5}{3}$; $t = 10,7$; $t = -3,2$;

г) $f(u) = \{u\}$; $u = -2,1$; $u = 1,5$; $u = -5$.

2.5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x + 5}$;

5) $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;

2) $y = \sqrt[4]{\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}}$;

6) $y = \frac{1}{x + |x|}$;

3) $y = \frac{1}{\ln(4x - x^2 - 3)}$;

7) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \arccos \frac{x - 2}{x}$.

4) $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$;

2.6. Знайдіть множину значень заданих функцій:

1) $y = x^2$, $x \in [-2; 1]$;

5) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

2) $y = 2^x$, $x \in (-1; 2)$;

3) $y = \frac{1}{5 + \sin 2x}$;

6) $f(x) = [x]$.

4) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$;

2.7. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0; 1]$. Якими є області

визначення функцій: 1) $f(x^2)$; 2) $f(2x + 1)$.

2.8. Чи існують суперпозиції $f \circ g$ та $g \circ f$ функцій, якщо:

1) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = 2^x + 1$;

2) $f(x) = \lg x$, $g(x) = -4 + x - x^2$.

2.9. Подайте складні функції у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій:

а) $y = \lg \lg x$; а) $y = \sin^3(2x+1)$; а) $y = 5^{(3x+1)^2}$.

2.10. Чи є тотожними функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$, $g(x) = x - 1$;

2) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$.

2.11. Визначте, чи існує для даної функції обернена, і якщо має, знайдіть її:

1) $f(x) = 2x + 3$, 2) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

2.12. Запишіть в явному вигляді функцію y , неявно задану рівняннями:

а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $2^{xy} = 5$; в) $(1+x)\cos y - x^2 = 0$.

2.13. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$,

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ x^3, & 0 < x < 2; \end{cases}$

3) $y = \arccos(\cos 2x)$,

4) $f(x) = |x+2| + |x-2|$.

3 Домашнє завдання

3.1. Нехай X – множина невід'ємних дійсних чисел x і $f_n(x)$ – n -та цифра після коми в десятковому записі числа x . Чи є $f_n(x)$ функцією від x ?

3.2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 3^{\sqrt{\arccos(\lg x)}}$;

2) $y = \arcsin(x^2 - 5x + 7)$;

3) $y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$.

3.3. Знайдіть функцію $f(x)$, якщо $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$.

3.4. У циліндрі заданий периметр осевого перерізу $2p$. Виразіть об'єм цього циліндр як функцію радіуса R ; виразіть об'єм як функцію висоти H .

3.5. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = x^2 - x + |x|$;

г) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}|x|$;

б) $y = \frac{|x-1|}{x-1} \cdot (x^2 - 4)$;

д) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{|\operatorname{ctg} x|}$;

в) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;

е) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$.



Основні класи функцій: обмежені, монотонні, парні та непарні, періодичні

1 Теоретична частина

1.1.1. Вставте пропущені слова: функція $f(x)$ називається обмеженою зверху (знизу) на множині D , якщо існує дійсне число M таке, що для всіх виконується нерівність _____ . Функція $f(x)$ є обмеженою на D , якщо існує число $K > 0$ таке, що _____ для всіх $x \in D$.

1.1.2. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ є обмеженими на множині D . Що можна стверджувати про обмеженість функцій:

- а) $f(x) + g(x)$: _____ ,
б) $f(x) \cdot g(x)$: _____ ,
в) $\frac{f(x)}{g(x)}$: _____ ?

1.1.3. Визначте проміжки монотонності основних елементарних функцій: _____
_____ .

1.1.4. Чи правильне твердження: "Сума двох зростаючих функцій завжди є зростаючою функцією"? Обґрунтуйте. _____

1.1.5. Доповніть таблицю для операцій над парними та непарними функціями:

- а) сума двох парних функцій - _____ ;
б) добуток парної та непарної функції - _____ ;
в) добуток двох непарних функцій - _____ ;
г) композиція $f(g(x))$, де f - парна, g - непарна, є _____ .

1.1.6. Чи може парна функція бути строго монотонною на всій області визначення? Обґрунтуйте відповідь. _____

1.1.7. Вставте пропущені слова:

1) Основний період функції - це _____ додатне число T таке, що $f(x+T) = f(x)$ для всіх x з області визначення.

2) Якщо T - період функції $f(x)$, то числа _____ також є періодами цієї функції.

Практична частина

1.2.1. Покажіть, що функція $y = \frac{2x^2 + 7}{x^2 + 7}$ є обмеженою: _____

_____.

1.2.2. Доведіть, що функція $y = \sqrt{x}$ монотонно зростає на області визначення: _____

1.2.3. Дослідіть на парність функцію $y = x^4$, якщо:

а) $x \in (0; +\infty)$ _____;

б) $x \in (-1; 1]$ _____;

в) $x \in [-1; 1]$ _____;

г) $x \in R$ _____.

1.2.4. Доведіть за означенням періодичність функції $y = \cos x$:

2 Практичне заняття

2.1. Покажіть, що функція $y = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ обмежена на \mathbb{R} .

2.2. Знайдіть проміжки монотонності функцій:

а) $y = x^2 - 2x + 3$; б) $y = 2^{3x+1}$; в) $y = \frac{1}{x-1}$.

2.3. Дослідити функцію на парність:

а) $y = x^5 + 3x^3 - 1$; г) $y = x \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$;
 б) $y = \frac{x^2 + x}{x + 1}$; д) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
 в) $y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

2.4. Продовжіть функцію $f(x) = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ на відрізок $[-\pi; 0]$ так, щоб вона стала: а) парною; б) непарною.

2.5. Знайдіть основні періоди функцій:

а) $y = \cos 6x$; г) $y = 2^{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$;
 б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; д) $y = \{x\}$.
 в) $y = \sin^2 2x$;

2.6. Наведіть приклади функцій з періодом $\frac{\pi}{4}$; 20π ; 3 ; $\frac{1}{2}$.

2.7. Знайдіть періоди функцій, якщо вони існують:

а) $y = \sin 2x + \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{2x}{3}$;
 б) $y = \sin 2x + \sin 4x + \cos 6x$; г) $y = \sin 2x + \cos 5x + \operatorname{tg} \sqrt{5}x$.

2.8. Виконайте періодичне продовження задану функцію з заданим періодом на всю числову пряму:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \pi, \\ \sin x, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad T = 2\pi,$

2) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in [0; 4), \quad T = 4.$

3 Домашнє завдання

3.1. Дайте відповіді на питання:

а) Чи може функція бути одночасно парною та непарною? Якщо так, то яка це функція?

б) Чи є періодичною функцією сума двох періодичних функцій? Наведіть приклади.

в) Який період матиме функція $h(x) = f(x) + g(x)$, якщо $f(x)$ має період T_1 , а $g(x)$ має період T_2 ?

г) Чи існує функція, яка є парною на $[-a; a]$ та непарною на $[-b; b]$, де $0 < a < b$?

3.2. Подайте у вигляді суми парної та непарної функцій наступні

функції: а) $y = 3x^2 - x + 7$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

3.3. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера співвідношення між поняттями «функції», «парні функції», «непарні функції».

3.4. Непарна функція f має чотири нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

3.5. Знайдіть проміжки монотонності функцій:

а) $y = \frac{x+1}{2x-3}$;

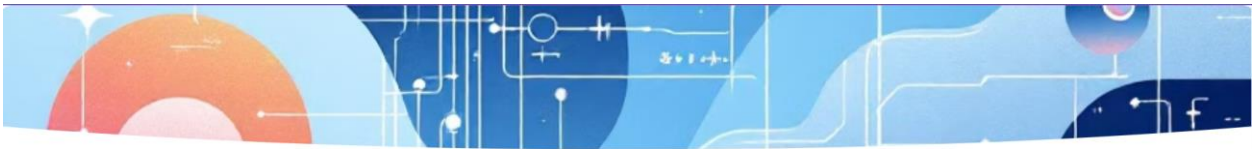
б) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0, \\ 2, & x \geq 0. \end{cases}$

3.6. Доведіть, що функція $y = 3^{(x^2-2)^3+8}$ обмежена знизу.

3.7. Знайдіть період функції $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

3.8. При яких значеннях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції

$f(x) = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$?



Перетворення графіків функцій

1 Теоретична частина

1.1.1. Опишіть послідовність перетворень для отримання функції $y = -2(x+1)^2 - 3$, маючи базову функцію $y = x^2$: _____

1.1.2. У результаті яких послідовних перетворень можна отримати графік функції $y = f(2x+6)$ із графіка функції $y = f(x)$? _____

1.1.3. Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(2;5)$. Через яку точку проходить графік $y = 2f(x-3)+1$? _____

1.1.4. Нехай функція $y = f(x)$ має період T . Як зміниться період функції після перетворення:

а) $y = f(2x)$ _____;

б) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ _____;

в) $y = 2f(x)$ _____;

г) $y = f(x)+5$ _____?.

1.1.5. Функція $y = f(x)$ має n точок перетину з віссю Ox . Чи матиме функція $y = k \cdot f(ax+b)+c$ також n точок перетину з віссю Ox ? _____

Практична частина

1.2.1. Задайте функцію аналітично, графік якої отримують із графіка $y = \frac{1}{x}$ в результаті його паралельного перенесення в додатному напрямку осі Oy на 5 одиниць: _____.

1.2.2. Задайте функцію аналітично, графік якої отримують із графіка $y = \cos x$ у результаті його стискування до осі Ox в 3 рази: _____.

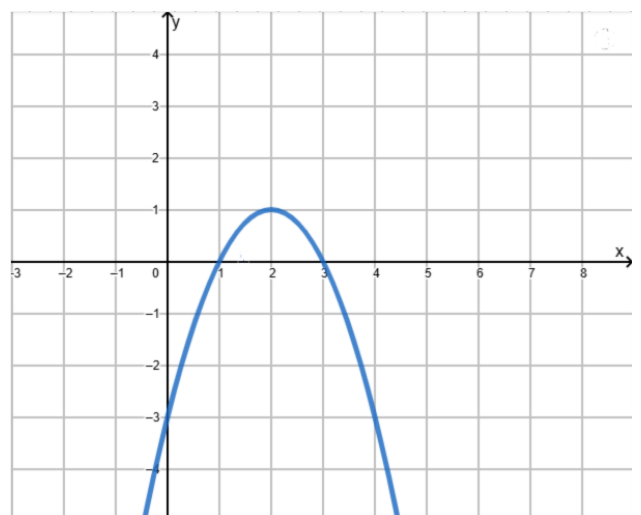
1.2.3. Областю значень функції $y = f(x)$ є проміжок $[-4; 6]$. Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{4} f(x)$: _____.

1.2.4. Задайте функцію аналітично, графік якої отримують із графіка $y = \sin x$ у результаті його розтягування від осі Oy у 8 разів: _____.

1.2.5. Областю визначення функції $y = f(x)$ є проміжок $[-4; 6]$. Знайдіть область визначення функції $y = f(2x)$: _____.

1.2.6. Графік функції $y = x^3$ зсунули ліворуч на 4 одиниці й відобразили симетрично відносно осі Ox . Графік якої функції отримали в результаті таких перетворень? _____.

1.2.7. Ескіз графіка якої функції зображено на рисунку?



2 Практичне заняття

2.1. Побудуйте графіки наступних функцій:

а) $y = \frac{x-4}{x+2}$;

є) $y = -\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \sqrt{-1-x}$;

е) $y = 2 \left| \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$;

в) $y = -|x-2|$;

г) $y = x^2 - 2|x| - 8$;

ж) $y = -2 \arcsin(x+1)$.

д) $y = |\ln|x||$;

2.2. Методами додавання або віднімання графіків побудуйте графіки функцій:

а) $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $y = x \sin x$.

3 Домашнє завдання

3.1. Після перетворень функція $y = f(x)$ перейшла в $y = g(x)$, при цьому точка $(1; 2)$ графіка $y = f(x)$ перемістилася у точку $(4; -3)$ графіка $y = g(x)$. Які перетворення могли бути застосовані? Розгляньте кілька варіантів таких перетворень.

3.2. Побудуйте графіки за допомогою елементарних перетворень:

а) $y = [x-1]$;

б) $y = 2\{x\} - \frac{1}{2}$;

в) $|y| = |x^2 - 2|x| - 8|$.

3.3. Методами додавання або віднімання графіків побудуйте графіки функцій:

а) $y = 1 + x + e^x$;

б) $y = (1+x) \cdot e^x$.



Числова послідовність та її границя

1 Теоретична частина

1.1.1. Заповніть пропуски:

а) Послідовність – це _____, що ставить у відповідність кожному натуральному числу n деяке дійсне число _____, яке називається _____ членом послідовності.

б) Дійсне число a називається границею числової послідовності (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, якщо для _____ наперед заданого дійсного числа $\varepsilon > 0$ _____ номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх номерів $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність _____.

в) Послідовність, яка має границю, називається _____; якщо послідовність границі не має або її границя нескінченна, то така послідовність називається _____.

г) Якщо число a є границею числової послідовності, то в інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, який називається _____, знаходиться _____ кількість членів послідовності, а за його межами _____.

д) Послідовність (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ називається нескінченно малою, якщо _____, а нескінченно великою, якщо _____.

1.1.2. Назвіть способи задання числової послідовності: _____

1.1.3. Скільки границь може мати збіжна числова послідовність? _____

1.1.4. Доведіть або спростуйте контрприкладом твердження: «Якщо послідовність обмежена, то вона збіжна»: _____

1.1.5. Позначте \square правильні твердження:

- а) Сума двох нескінченно малих є нескінченно малою;
- б) Добуток обмеженої та нескінченно малої є нескінченно малою ;
- в) Сума нескінченної кількості нескінченно малих є нескінченно малою;
- г) Добуток двох нескінченно малих є нескінченно малою.

1.1.6. У чому полягає зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями? _____

_____.

1.1.7. Послідовності (a_n) і (b_n) є розбіжними. Чи можна стверджувати, що послідовність $(a_n + b_n)$ також розбіжна?

Наведіть приклад або контрприклад: _____

_____.

1.1.8. Запишіть за допомогою кванторів твердження «Число a не є границею числової послідовності (x_n) »:

_____.

Практична частина

1.2.1. Запишіть перші чотири члени числових послідовностей:

а) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$: _____;

б) $((-1)^n)$: _____;

в) (n^2) : _____;

г) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$: _____.

1.2.2. Встановіть відповідність:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ | А) Необмежена і розбіжна |
| 2) $\left((-1)^n\right)$ | Б) Збіжна до нуля |
| 3) $\left(n^2\right)$ | В) Розбіжна, але обмежена |
| 4) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ | Г) Збіжна до числа $\neq 0$ |

1.2.3. Записати одну з можливих формул загального члена послідовності, якщо відомо її кілька членів:

- а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$: _____;
- б) $11, 21, 31, 41, \dots$: _____;
- в) $\frac{1}{2 \cdot 3}, -\frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, -\frac{4}{5 \cdot 6}, \dots$: _____.

1.2.4. Побудуйте приклад нескінченно малої послідовності, яка не є монотонною, але її квадрат монотонно спадає до нуля: _____

1.2.5. Наведіть приклад послідовності (a_n) , коли $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ існує, а $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ не існує. _____

2 Практичне заняття

2.1. Знайти третій та четвертий члени послідовності, якщо вона задана у вигляді:

а) $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}$;

б) $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} + 1, n = 2, 3, \dots$;

в) $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2n}, & n = 2k - 1, \\ 1 - \frac{1}{n}, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

2.2. Записати одну з можливих формул загального члена послідовності, якщо відомо її кілька членів:

а) $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, \dots$

б) $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{6}, \frac{11}{24}, \frac{14}{120}, \dots$

в) $\frac{2}{4}, -\frac{5}{9}, \frac{10}{14}, -\frac{17}{19}, \frac{26}{24}, \dots$

г) 1, 3, 1, 3, 1, 3, ...

2.3. Виконайте завдання:

а) Доведіть за означенням, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$.

б) Починаючи з якого n модуль різниці $|a_n - 1|$ не перевищує 0,0001?

в) Нехай $\varepsilon = 0,1$. Скільки членів послідовності $a_n = \frac{2n-1}{n}$ можуть лежати поза ε -околом точки 2? Запишіть декілька членів послідовності з ε -околу і за його межами.

2.4. Доведіть, що 1 не є границею послідовності $a_n = \frac{n+1}{2n}$.

2.5. Для різних послідовностей (x_n) розв'язок нерівності $|x_n - 2| < \varepsilon$ відносно n був записаний у вигляді:

$$1) n > \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}; \quad 2) n < \frac{9}{1 - 3\varepsilon}; \quad 3) n > 5 + \frac{2}{\varepsilon}; \quad 4) n < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}.$$

Для яких з цих послідовностей число 2 є границею?

2.6. Доведіть обмеженість послідовності $\left(\frac{n^2}{n^2 + 2}\right)$.

2.7. Встановіть характер монотонності послідовності $\left(\frac{2n - 1}{3n + 2}\right)$.

3 Домашнє завдання

3.1. Запишіть формулу загального члена послідовності (a_n) , якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ і $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $n \geq 3$. Вказівка: знайдіть декілька перших членів послідовності, запропонуйте формулу її загального члена, доведіть правильність цієї формули методом математичної індукції.

3.2. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть, що:

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 2} = \frac{2}{3}; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 1}{4^n} = 1.$$

3.3. Доведіть, що послідовність (x_n) , де

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n - \text{непарне,} \\ \frac{n}{n+1}, & n - \text{парне,} \end{cases}$$

є обмеженою. Дослідіть її на збіжність.



Обчислення границь числових послідовностей

1 Теоретична частина

1.1.1. Послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними до чисел a та b відповідно. Що можна стверджувати про збіжність послідовностей $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$? _____

1.1.2. Заповніть пропуски:

а) Послідовності (a_n) та (b_n) мають границі a і b відповідно, причому $a_n \leq b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то _____.

б) Послідовності (x_n) , (y_n) і (z_n) , такі що $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то _____.

1.1.3. Послідовності (x_n) , (y_n) і (z_n) , такі що $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всіх $n \geq 10$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Чи правильно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$? _____

1.1.4. Розкрийте суть взаємозв'язку між збіжними, обмеженими та монотонними числовими послідовностями. Проілюструйте прикладами: _____

1.1.5. Вкажіть послідовність, границею якої за означенням є число: _____.

Практична частина

1.2.1. Побудуйте приклади нескінченно малих послідовностей (a_n) і (b_n) таких, що:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ _____;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ _____;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ _____.

1.2.2. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{4}{9}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$. Знайдіть:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n + 3y_n)$ _____;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n}{0,1y_n}$

1.2.3. Що можна стверджувати про збіжність послідовність $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, коли (a_n) збіжна, а (b_n) є розбіжною? Проілюструйте прикладами: _____

1.2.4. Знайдіть помилку в міркуваннях при обчисленні границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = 0: \text{_____}$$

1.2.5. Показати, що послідовність із загальним членом $x_n = \frac{n^2}{n^2 + 4}$ є монотонно зростаючою та обмеженою. Знайти її границю. _____

2 Практичне заняття

2.1. Обчисліть границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+4}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n^2+1}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+4}{2n^2-1} - \frac{n-3}{3n+5} \right); \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n^2+1} \cos \frac{n+1}{2n-1};$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}; \quad 7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{n^3}{2n+1}; \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n^2+1} \sin n! + \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2+1} \right);$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+\dots+n); \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right);$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}} \right); \quad 13) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+4} \right)^{2n+3}.$$

2.2. Користуючись теоремою про границю проміжної

послідовності, знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$.

2.3. Доведіть, що послідовність $x_n = 2n(\sqrt{n^2+1} - n)$ має границю, рівну 1. **Вказівка.** Застосуйте теорему про границю проміжної послідовності.

2.4. За допомогою теореми про існування границі монотонної послідовності доведіть існування границі послідовності із загальним членом:

а) $x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{n}{4^{n-1}};$

б) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$

2.5. Доведіть, що послідовність $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, ..., $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}}$, ... має границю і знайдіть її.

2.6. За критерієм Коші доведіть збіжність послідовності,

загальний член якої $x_n = \frac{\sin 4}{1 \cdot 4} + \frac{\sin 7}{4 \cdot 7} + \frac{\sin 10}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{\sin(3n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$.

3 Домашнє завдання

3.1. Знайдіть значення параметрів a та b , при яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4bn^2}{2n-1} + an \right) = \frac{3}{2}.$$

3.2. Доведіть, що послідовність, для якої $a_1 = 0$, $a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4}$, має

границю і знайдіть її.

3.3. Доведіть збіжність послідовності із загальним членом

$$x_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)}{n^4 + 4n^3 + n + 11}$$
 і знайти її границю.

Вказівка. Використайте формулу суми кубів перших n натуральних чисел.

3.4. Сформулюйте теорему Штольця і використайте її для знаходження границі прикладу 3.

3.5. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

3.6. Населення країни щорічно зростає на 2%. У скільки разів воно збільшиться за 200 років?



Границя функції

1 Теоретична частина

1.1.1. Заповніть пропуски:

а) Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо _____ послідовності значень аргументу (x_n) , збіжної до точки x_0 і $x_n \neq x_0$ при всіх $n \in N$, відповідна _____ збігається до числа A .

б) Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо _____ як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ _____ таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in D(y)$, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність _____.

1.1.2. Наведіть алгоритм дій, щоб показати, що функція не має границі в певній точці, використовуючи означення за Гейне? _____

1.1.3. Мовою « $\varepsilon - \delta$ » сформулюйте, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$: _____

1.1.4. Мовою « $\varepsilon - \delta$ » сформулюйте, що:

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ _____;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ _____;

в) $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = +\infty$ _____.

1.1.5. Поясніть, чому в означенні границі функції в точці пишуть нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, а не $|x - x_0| < \delta$? _____

1.1.6. Опишіть геометричний зміст границі функції в точці: _____

_____.

1.1.7. Сформулюйте зв'язок між існуванням границі функції в точці та односторонніми границями _____

_____.

Практична частина

1.2.1. Дано $y = x^2$ і при $x \rightarrow 3$ маємо, що $y \rightarrow 9$. Знайдіть залежність значення δ від ε , якщо з умови $|x - 3| < \delta$ випливає $|y - 9| < \varepsilon$? _____

1.2.2. Якщо $x \rightarrow 1$, то значення функції $y = \frac{x-1}{x+1}$ наближаються до

числа 0. За яких значень δ з умови $|x-1| < \delta$ випливає $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 0,01$? _____

1.2.3. Побудувати схематично графік функції, для якої:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ та $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$;

в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$,

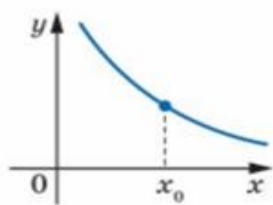
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$;

$$\text{Д) } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0, \quad \text{Е) } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty,$$

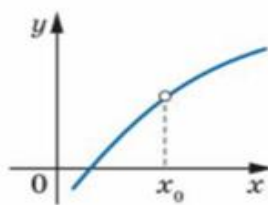
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

2 Практичне заняття

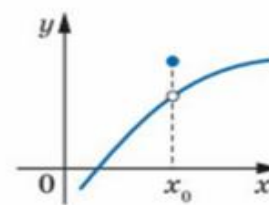
2.1. За допомогою графіка функції f з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0 :



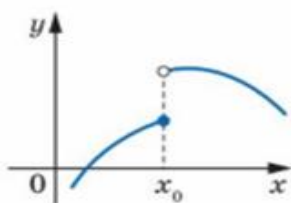
а



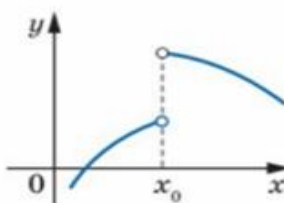
б



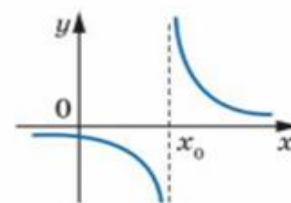
в



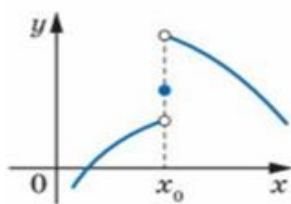
г



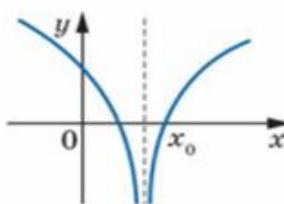
д



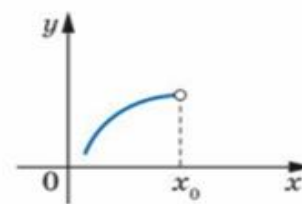
е



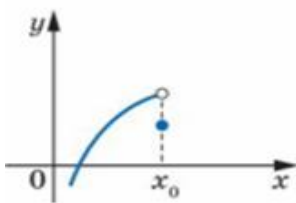
ж



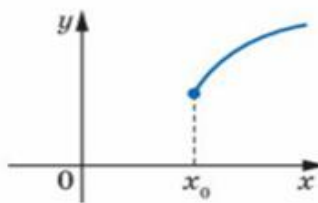
з



и



к



л

- а) _____; б) _____;
 в) _____; г) _____;
 ґ) _____; д) _____;
 е) _____; є) _____;
 ж) _____; з) _____;
 і) _____.

2.2. Користуючись означенням границі функції за Гейне (на мові

послідовностей) доведіть, що $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$.

2.3. Доведіть, що границя $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x-1}$ не існує. Поясніть, чому

існує границя $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0$.

2.4. За означенням Коші доведіть, що:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-8) = -5$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

3 Домашнє завдання

3.1. Користуючись означенням границі функції, доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{5}{2}.$$

3.2. Користуючись означенням границі функції, доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{5x+2} \neq 1.$$

3.3. Доведіть, що функція $y = 3^{\frac{1}{x}}$ не має границі в точці $x = 0$.



Техніка обчислення границь функцій

1 Теоретична частина

1.1.1. З'ясуйте справедливість тверджень:

а) кожна функція $f(x)$ має в точці x_0 єдину границю; _____

б) якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$, то функція $f(x)$ є обмеженою; _____

в) якщо функція $f(x)$ необмежена на множині E , то не існує границі $f(x)$ у точці $x_0 \in E$. _____

1.1.2. Заповніть таблицю:

Тип невизначеності	Вирази, які її складають	Спосіб розкриття

Практична частина

1.2.1. Обчисліть границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+3}{x-4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 7}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;

2 Практичне заняття

2.1. Обчисліть границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1};$$

7)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1});$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right);$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x;$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^3};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x};$$

25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x};$

29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{7^x - 1};$

30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$

27) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} \quad (a > 0);$

31) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}};$

28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$

32) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x}.$

2.2. Користуючись еквівалентними функціями, обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - \cos 5x + x^3 \cos^4 x}{x \arcsin 7x - \sqrt{3x} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x^2\right)};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 4 \operatorname{arctg} x + 2x^3}{\ln(1 + 7x + \sin^3 2x) + x \cos x}.$

2.3. Знайдіть односторонні границі в точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x + 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

2) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}, \quad x_0 = 1;$

3) $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}, \quad x_0 = 0;$

4) $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad x_0 = 4;$

5) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0.$

3 Домашнє завдання

3.1. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ та } n - \text{цілі числа});$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 3} - \sqrt[5]{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^7 + 1}};$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x;$

3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}};$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2});$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x};$

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$

13) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$

6) $\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2};$

14) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right)$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{tgx};$

15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right);$

8)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \arctg 3x} - \sqrt[3]{1 - \arcsin 3x}}{\sqrt{1 - \arcsin 2x} - \sqrt{1 + \arctg 2x}};$$

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x});$

9) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}.$

3.2. Користуючись еквівалентними функціями, обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 4x} - \cos 3x + \sqrt[3]{4x} \cdot 7^x}{\lg(1 + \sin \sqrt[3]{x}) + x^2}.$$

3.3. Знайдіть односторонні границі функції $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}$ в

точці $x_0 = 1$.

3.4. Дослідіть, чи існує $\lim_{x \rightarrow n} [x] \cdot \{x\}$, де n – натуральне число.

Вказівка. Застосуйте односторонні границі.



Неперервність функції в точці

1 Теоретична частина

1.1.1. Заповніть пропуски:

- а) функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо _____
_____;
- б) функція $f(x)$ називається неперервною на деякому проміжку, якщо _____;
- в) якщо функції $f(x)$ та $g(x)$, задані на деякому проміжку, неперервні в точці x_0 цього проміжку, то в цій точці будуть неперервними також і функції _____.

1.1.2. Яким трьом умовам має задовольняти функція, щоб вона була неперервною в точці? _____

Як виглядатиме графік функції поблизу точки, якщо:

- а) виконується тільки перша умова? _____

- б) _____ виконується тільки друга _____ і третя? _____ = _____
- в) виконуються всі три умови? _____

1.1.3. Сформулюйте означення неперервності функції в точці:

- а) на мові « ϵ - δ »: _____;
- б) на мові послідовностей: _____;
- в) на мові приростів: _____;
- г) через односторонні границі _____.

1.1.4. Заповніть таблицю:

Назва точки розриву	Умова	Ескіз графіка

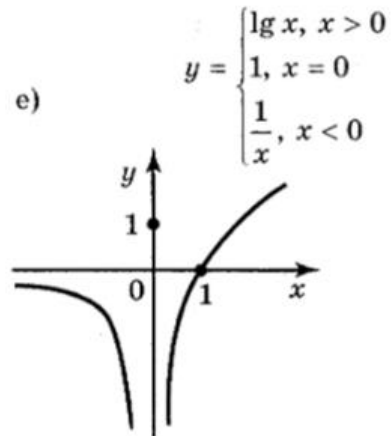
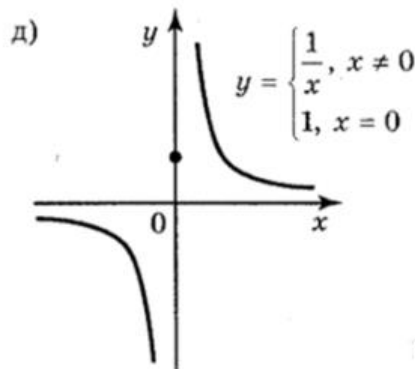
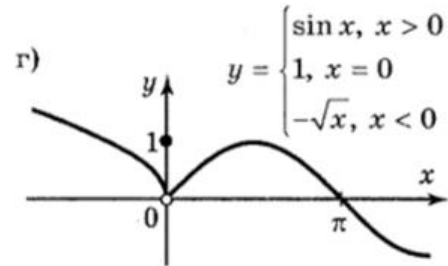
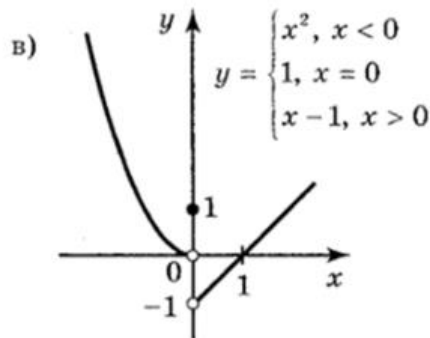
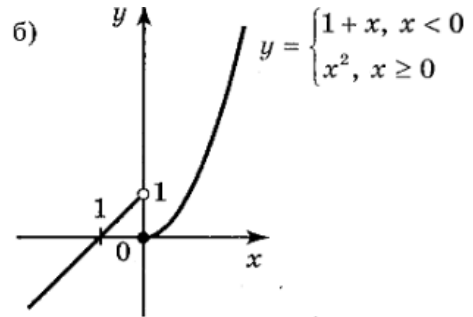
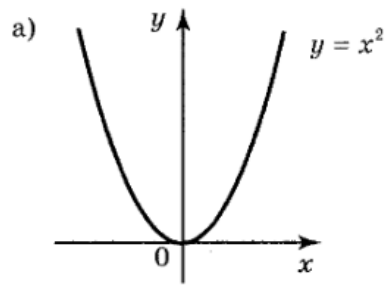
1.1.5. Наведіть алгоритм дій для того, щоб визначити точки розриву функції та з'ясувати характер розриву: _____

1.1.6. Чи вірне твердження:

- а) будь-яка послідовність є неперервною функцією на множині N ;
- б) якщо функція $f + g$ неперервна в точці, то функції f та g є неперервними в цій точці;
- в) якщо функції $f + g$ і $f - g$ неперервні в точці, то функції f та g є неперервними в цій точці;
- г) якщо функція не визначена в точці, то вона є розривною в цій точці;
- д) кожна усувна точка розриву функції є точкою розриву першого роду цієї функції, і навпаки.

Практична частина

1.2.1. Які з функцій, графіки яких зображені на рисунку, є неперервними в початку координат? У випадку розриву, встановіть його характер.



- а) _____ ;
 б) _____ ;
 в) _____ ;
 г) _____ ;
 д) _____ ;
 е) _____ .

1.2.2. Довести, що функція $y = \cos x$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}$:

1.2.3. Функцію задано формулою $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2; \\ A, & x = 2. \end{cases}$

Яким треба вибрати A , щоб функція була неперервною в точці $x = 2$? Побудуйте графік цієї функції.

2 Практичне заняття

2.1. За яких значень a і b функції будуть неперервними:

$$1) y = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} ax, & x < 1; \\ x^2 + x + 1, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} ax + b, & x < -1; \\ x^2 + b, & -1 \leq x \leq 1; \\ -ax + 2b, & x > 1; \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0; \\ ax + b, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$5) y = \begin{cases} x, & |x| \leq 1; \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$6) y = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq \frac{\pi}{2}; \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2.2. Встановіть тип розриву функції $y = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x}}}$ в точці $x = 0$.

Побудувати схематично графік цієї функції в околі точки $x = 0$.

2.3. Знайдіть односторонні границі функцій у вказаних точках.

Зробіть висновок про неперервність функцій у цих точках:

$$1) y = \begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2 \end{cases} \quad \text{при } x=2;$$

$$2) y = \frac{x^3-1}{|x-1|} \quad \text{при } x=1;$$

$$3) y = \cos \frac{\pi}{x} \quad \text{при } x=0;$$

$$4) y = \frac{x}{(x-3)^3} \quad \text{при } x=3;$$

$$5) y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 50, & x = 1 \end{cases} \quad \text{при } x=1;$$

$$6) y = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < 0, & x=0; \\ 1, & x=0, & \text{при } x=1; \\ x, & 0 < x < 1, & x=2; \\ -2x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$7) y = \begin{cases} 2\ln|x|, & x < 0, & x=0; \\ 5x, & 0 \leq x \leq 1, & \text{при } x=1; \\ 3x^2+1, & 1 < x \leq 2, & x=2. \\ 50, & 2 < x \leq +\infty \end{cases}$$

2.4. Дослідіть функції на неперервність, з'ясуйте характер точок розриву:

$$1) y = \frac{x^2}{x-2};$$

$$2) y = \frac{1+x^3}{1+x};$$

$$3) y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4};$$

$$4) y = \frac{x}{|x|};$$

$$5) y = \sin \frac{\pi}{x};$$

$$6) y = e^{\frac{1}{x+1}};$$

7) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

8) $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$;

9) $y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 4; \\ 2x+1, & x > 4; \end{cases}$

10) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

11) $y = \frac{x}{1+x^2}$;

12) $y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x - \cos x}$.

2.5. Чи можна доозначити функції так, щоб вони стали неперервними в точці $x=0$:

1) $y = x \sin \frac{\pi}{x}$;

2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$;

3) $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{1-x}$?

3 Домашнє завдання

3.1. Побудуйте функцію, яка:

1) має лише один розрив;

2) має один усувний розрив;

3) при $x=0$ має усувний розрив, при $x=1$ – розрив другого роду, в усіх інших точках неперервна;

4) при $x=-1$ має усувний розрив, при $x=0$ – розрив першого роду, в усіх інших точках неперервна;

5) при $x=1$ має розрив першого роду, при $x=-1$ – розрив другого роду, при $x=0$ – усувний розрив, в усіх інших точках неперервна;

б) при $x=a$ – розрив другого роду, при $x=b$ – усувний розрив, при $x=c$ – розрив першого роду, в усіх інших точках неперервна, якщо $a < b < c$.

3.2. Дослідіть на неперервність функції:

а) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$;

$$в) y = \begin{cases} x, & x \in \mathcal{Q}; \\ -x, & x \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

$$г) f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}];$$

$$д) f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

3.3. *Дозначте до неперервності в точці $x=0$ задані функції:*

$$а) f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$б) f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$$

3.4. *Побудуйте графік функції $y = [x^2]$ та дослідіть її на неперервність.*



Властивості функцій, неперервних на відрізку

1 Теоретична частина

1.1.1. *Перевірте, чи є правильними твердження:*

а) якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона обмежена на цьому проміжку;

б) якщо множиною значень функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ є відрізок $[f(a); f(b)]$, то функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$;

в) якщо $f(a)f(b) < 0$ і функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то $\exists c \in (a; b): f(c) = 0$.

1.1.2. *Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває значення одного знаку. Чи можна стверджувати, що на $[a; b]$ немає такої точки, в якій функція перетворюється в нуль? _*

Практична частина

1.2.1. Розбийте відрізок $[-4; 4]$ на частини точками $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ і виділіть ті, які містять корені рівняння $x^5 - 3x^3 + x^2 - 6 = 0$.

1.2.2. З'ясуйте, чи набуває функція $f(x) = \frac{x^3}{2} - \sin \pi x + 2$ значення 2 на відрізку $[-1; 1]$? _____

1.2.3. Дослідіть, чи є обмеженими дані функції на вказаних проміжках:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1; 2]$; $x \in [-1; 2]$; _____

б) $f(x) = 2^{-x}$, $x \in [2; e^2]$ _____.

1.2.4. Чи набувають функції своїх найбільшого та найменшого значень на вказаних проміжках:

а) $f(x) = 2^x + \lg(1 + x^2)$, $x \in [0; 1]$ _____;

б) $f(x) = \ln \sin x$, $x \in (0; \pi)$ _____.

2 Практичне заняття

2.1. Дослідіть, чи має рівняння $x^5 - 18x + 2 = 0$ корені, що належать відрізку $[-1; 1]$?

2.2. Покажіть, що рівняння $2x^3 + 2x - 1 = 0$ має корінь на відрізку $[0; 1]$ і знайдіть його з точністю до 0,01.

2.3. Для функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & 0 \leq x < 2; \\ (x - 4)^2 + 6, & 2 \leq x \leq 4; \end{cases}$ маємо, що

$f(0) = -4$, $f(2) = 10$, $f(4) = 6$. З'ясуйте, чи існує таке a , що $f(a) = 1$? $f(a) = 7$? $f(a) = 12$?

2.4. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$.

3 Домашнє завдання

3.1. Доведіть, що будь-яке алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами $a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ має принаймні один дійсний корінь.

3.2. Дослідіть на рівномірну неперервність функції:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R};$

б) $f(x) = \ln^3 x, \quad 0 < x < e.$

3.3. Доведіть, що коли функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$ і має на ньому обернену, то вона монотонна на $[a; b]$.

ТЕСТИ

Якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то обов'язково виконується:

а)	б)	в)	г)
$A = C$	$A \subseteq C$	$A \cap C = \emptyset$	$B = C$

Для яких множин A і B виконується рівність $A \setminus B = A$?

а)	б)	в)	г)
для $B \subseteq A$	для $A \subseteq B$	для $A \cap B = \emptyset$	для $A \cup B = A$

Скільки елементів містить множина $A \times B$, якщо множина A містить 3 елементи, а множина B – 4 елементи?

а)	б)	в)	г)
7	12	81	64

Визначте, до якої множини належить число $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$:

а)	б)	в)	г)
Z	N	Q	I

Запишіть у вигляді звичайного дроби число $0,2(3)$:

а)	б)	в)	г)
$\frac{23}{100}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{23}{90}$	$\frac{23}{99}$

Яке з наведених чисел є ірраціональним числом:

а)	б)	в)	г)
$\sqrt{0,64}$	$\sqrt{20}$	π^0	$\sqrt[3]{8}$

Яке з чисел є ірраціональним числом?

а)	б)	в)	г)
0,192(3)	$\frac{1}{2}$	0,33333....	0,1010010001...

Виберіть твердження, яке характеризує множину раціональних чисел:

а)	б)	в)	г)
впорядкованість, щільність, аксіома Архімеда, аксіома неперервності	впорядкованість, щільність, аксіома Архімеда,	впорядкованість, щільність, аксіома неперервності	впорядкованість, аксіома Архімеда, аксіома неперервності

Установіть відповідність між числовим виразом (1-4) та проміжком (а-д),
якому належить його значення:

Вираз		Проміжок	
1	$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$	а)	$(-\infty; -3)$
		б)	$[-3; 0)$
2	$8^{\frac{2}{3}}$	в)	$[0; 1)$
		г)	$[1; 3)$
3	$\log_{\frac{1}{2}} 10$	д)	$[3; +\infty)$
4	$\left \frac{1}{2} - 2\right $		

Скільки всього цілих чисел містить інтервал $(\sqrt{8}; \sqrt{81})$:

а)	б)	в)	г)
8	7	6	9

Винесіть множник з під знаку кореня $\sqrt[6]{6x^{18}y^8}$, $x > 0$, $y < 0$:

а)	б)	в)	г)
$x^3y\sqrt[6]{6x^3y^2}$	$-x^3y\sqrt[6]{6y^2}$	$x^2y\sqrt[6]{6x^3y^2}$	$-x^3y\sqrt[6]{6y}$

Розв'яжіть нерівність $|x - 2| < 3$:

а)	б)	в)	г)
$x \in (-1, 5)$	$x \in (-5, 1)$	$x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$

Для яких значень x виконується рівність $|x + 1| + |x - 2| = 5$?

а)	б)	в)	г)
$x \in \{-2, 3\}$	$x \in [-2, 3]$	$x \in (-\infty, -] \cup [3, +\infty)$	$x \in \emptyset$

Геометричний зміст нерівності $|x - a| < \delta$ полягає в тому, що:

а)	б)	в)	г)
відстань від x до a більша за δ	точка x належить δ -околу точки a	x належить інтервалу (a, δ)	x не належить інтервалу $(a - \delta, a + \delta)$

Знайдіть множину розв'язків рівняння $||x| - 1| = 2$:

а)	б)	в)	г)
$\{-3, -1, 1, 3\}$	$\{-3, 3\}$	$\{-1, 1\}$	$\{3\}$

Яке з тверджень є хибним?

а)	б)	в)	г)
$ a - b \leq a + b $	$ a - b \geq a - b $	$ a + b \geq a + b $	$ a + b \leq a + b $

Виберіть серед наведених означення множини A , обмеженої знизу:

а)	б)	в)	г)
$\forall a \in A \quad \exists m \in R: a \geq m$	$\forall a \in A \quad \exists M \in R: a \leq M$	$\exists a \in A \quad \exists m \in R: a \geq m$	$\exists a \in A \quad \exists M \in R: a \leq M$

Виберіть істинне твердження щодо множини натуральних чисел:

а)	б)	в)	г)
обмежена	обмежена знизу	обмежена зверху	скінченна

Верхня грань множини $A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$ дорівнює:

а)	б)	в)	г)
0	1	2	не існує

Чи є число 2 точною верхньою гранню множини $A = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$?

а)	б)	в)	г)
так, бо 2 є максимальним елементом множини A	так, бо 2 є найменшою верхньою межею множини A	ні, бо $2 \notin A$	ні, бо існує менша верхня межа

Множина $B = (0, 1) \cup \{2\}$ має:

а)	б)	в)	г)
$\sup B = 1,$ $\inf B = 0$	$\sup B = 2,$ $\inf B = 0$	$\max B = 1,$ $\min B$ не існує	$\sup B = 2,$ $\inf B$ не існує

Для множини $C = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ знайдіть $\inf C$:

а)	б)	в)	г)
-1	0	1	не існує

Рівняння $y^3 \sin xy = \sqrt[4]{y}$ задає функцію

а)	б)	в)	г)
в явному вигляді	у параметричній формі	у тригонометричному вигляді	в неявному вигляді

Композиція функцій $(f \circ g)(x)$, де $f(x) = 2x + 1$ і $g(x) = x^2$, дорівнює:

а)	б)	в)	г)
$2x^2 + 1$	$(2x + 1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$	$2x^2 + 2x + 1$

Маємо 3 способи розкладу функції $y = \frac{1}{\arcsin^2 x}$ в ланцюжок основних

елементарних: 1) $u = \arcsin x$, $v = u^2$, $y = \frac{1}{v}$; 2) $u = \arcsin x$, $v = \frac{1}{u}$, $y = v^2$;

3) $u = x^2$, $v = \arcsin u$, $y = \frac{1}{v}$. Які з цих способів є вірними?

а)	б)	в)	г)
1) і 2)	тільки 1)	тільки 3)	всі вірні

Функція, обернена до $f(x) = 2x - 3$, має вигляд:

а)	б)	в)	г)
$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$	$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$	$f^{-1}(x) = 2x+3$	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x-3}$

Знайдіть ескіз графіка функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

а)	б)	в)	г)

Серед поданих функцій знайдіть многочлен третього степеня:

а)	б)	в)	г)
$y = 1 - x + x^2 - 3x^3$	$y = x^3 - 2\sqrt{x} + 5$	$y = 5 - 2x^2$	$y = 4x^3 + 4x^2 - x - \frac{1}{x}$

Знайдіть серед наведених елементарну функцію:

а)	б)	в)	г)
$y = x^4 \ln \arcsin \sqrt{\frac{x}{x-1}}$	$y = x $	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1; \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$	$y = \text{Di } x$

Яка з цих функцій не є обмеженою?

а)	б)	в)	г)
$y = 1$	$y = \sin x$	$y = 2^x$	$y = \arcsin x$

Оберіть істинне твердження:

а)	б)	в)	г)
$y = x^4, x \in [0; +\infty)$ - парна	$y = x^4$ - парна та її графік симетричний відносно початку координат	$y = x^4$ - парна та її графік симетричний відносно осі Oy	$y = x^4$ - непарна

Укажіть парну функцію:

а)	б)	в)	г)
$y = 4^x$	$y = \sqrt{x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = x $

Функція $f(x)$ є парною, а $g(x)$ – непарною. Обчисліть значення виразу $3 \cdot f(-2) - g(1)$, якщо $f(2) = -5$, $g(-1) = 7$.

а)	б)	в)	г)
-8	-22	22	8

Укажіть означення монотонно неспадної функції

а)	б)	в)	г)
$\forall x_1, x_2:$ $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$	$\forall x_1, x_2:$ $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$	$\forall x_1, x_2:$ $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2)$	$\forall x_1, x_2:$ $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$

Установіть відповідність між твердженням (1-4) та функцією (а-д), для якої це твердження є правильним:

Твердження		Функція	
1	графік функції не перетинає жодну з осей координат	а)	$y = -x + 2$
		б)	$y = x^2 - 2$
2	областю значень функції є проміжок $(0; +\infty)$	в)	$y = -\frac{1}{x}$
3	функція спадає на всій області визначення		
4	на відрізку $[-1,5; 1,5]$ функція має два нулі	г)	$y = 3^x$
		д)	$y = \cos x$

Функція $y = f(x)$ є спадною на множині R . Укажіть правильну нерівність:

а)	б)	в)	г)
$f(1) > f(-1)$	$f(1) < f(8)$	$f(-1) < f(0)$	$f(1) > f(10)$

Функція $y = f(x)$ зростає на множині R . Яке з наведених чисел може бути значенням цієї функції в точці $x = 8$, якщо $f(1) = -2$, $f(9) = 5$?

а)	б)	в)	г)
-8	-3	3	8

Функція, обернена до функції $y = \ln(x - 1)$,

а)	б)	в)	г)
монотонно спадна на R	монотонно зростає на R	є обмеженою зверху	набуває від'ємних значень

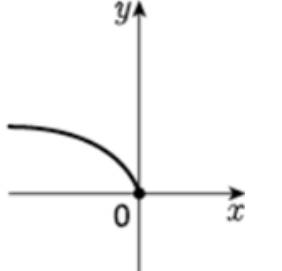
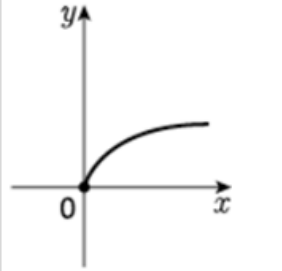
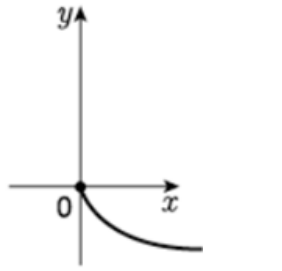
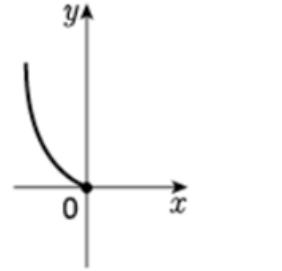
Яка з цих функцій не є періодичною?

а)	б)	в)	г)
$y = \{x\}$	$y = \sin x$	$y = 1$	$y = \arcsin x$

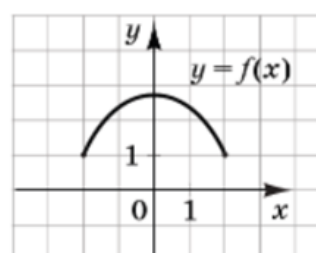
Яка з наступних операцій призводить до горизонтального зсуву графіка функції $y = f(x)$?

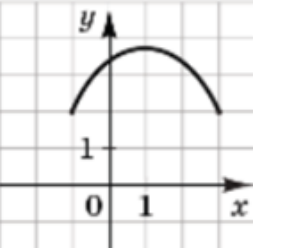
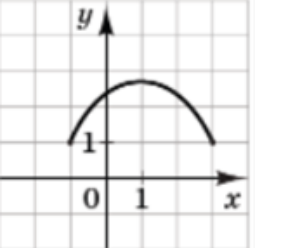
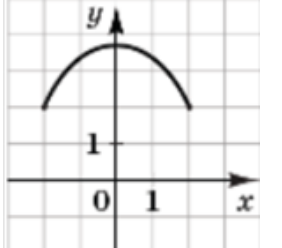
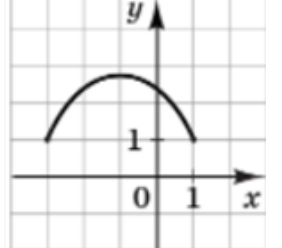
а)	б)	в)	г)
додавання константи до y	додавання константи до x	множення x на константу	множення y на константу

Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y = \sqrt{-x}$:

а)	б)	в)	г)
			

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $[-2; 2]$. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y = f(x+1)$:

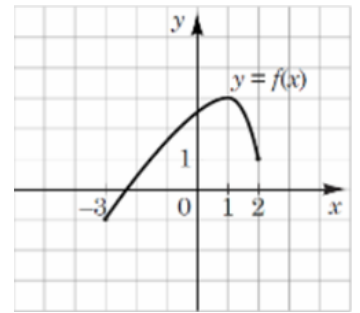


а)	б)	в)	г)
			

Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $M(1;1)$. При якому значенні a графік функції $y = f(x) + a$ проходить через точку $N(1;3)$?

а)	б)	в)	г)
$a = 2$	$a = -2$	$a = \frac{1}{3}$	$a = 3$

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $[-3; 2]$. Укажіть точку, в якій функція $y = f(x+3) - 2$ має найбільше значення:



а)	б)	в)	г)
$x_0 = -2$	$x_0 = 1$	$x_0 = 4$	$x_0 = -1$

Графік функції $y = -2f(x-1) - 3$ отримується з графіка функції $y = f(x)$ такими послідовними перетвореннями:

а)	б)	в)	г)
зсув вправо на 1, розтяг у 2 рази, симетрія відносно Oy , зсув вниз на 3	зсув вправо на 1, стиск у 2 рази, симетрія відносно Ox , зсув вгору на 3	зсув вліво на 1, стиск у 2 рази, симетрія відносно Ox , зсув вниз на 3	зсув вправо на 1, розтяг у 2 рази, симетрія відносно Ox , зсув вниз на 3

Загальний член послідовності $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{24}, \frac{6}{120}, \dots$ можна задати формулою

а)	б)	в)	г)
$\frac{n+1}{n^2}$	$\frac{n+1}{n!}$	$\frac{n+1}{2^n}$	$\frac{n+1}{n^n}$

Знайдіть третій член послідовності (a_n) , де $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k, \\ \frac{(-1)^n}{n^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$

а)	б)	в)	г)
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$

Послідовність, загальний член якої $x_n = \frac{n+1}{n}$ є:

а)	б)	в)	г)
зростаючою і обмеженою	спадною і обмеженою	зростаючою і необмеженою	спадною і необмеженою

δ -околом точки $x_0 = 1$, де $\delta = 0,1$, є

а)	б)	в)	г)
$[0,9; 1,1)$	$[0,9; 1,1]$	$(0,9; 1,1)$	$(0,9; 1,1]$

Для збіжності послідовності (x_n) до числа a необхідно і достатньо, щоб:

а)	б)	в)	г)
для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується $ x_n - a < \varepsilon$	існувало $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого $n_0(\varepsilon)$ при $n > n_0(\varepsilon)$ виконується $ x_n - a < \varepsilon$	послідовність була монотонною та обмеженою	для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується $ x_n - a > \varepsilon$

Послідовність, загальний член якої $x_n = (-1)^n$, є:

а)	б)	в)	г)
збіжною до 1	збіжною до -1	збіжною до 0	розбіжною

Границя послідовності, загальний член якої $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$, дорівнює

а)	б)	в)	г)
0	2	∞	1

Границя (x_n) , де $x_n = \frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$ і $k < l$, дорівнює:

а)	б)	в)	г)
0	∞	відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях чисельника і знаменника	не існує

Виберіть вірне твердження:

а)	б)	в)	г)
будь-яка зростаюча послідовність, обмежена знизу, має скінченну границю	будь-яка зростаюча послідовність, обмежена зверху, має скінченну границю	будь-яка спадна послідовність, обмежена зверху, має скінченну границю	будь-яка спадна послідовність має скінченну границю

Нехай послідовність (a_n) збігається до L , а послідовність (b_n) збігається до M . Що можна сказати про границю проміжної послідовності (c_n) ?

а)	б)	в)	г)
границя може дорівнювати будь-якому числу з $[L; M]$	границя дорівнює числу L	границя дорівнює числу M	границі не існує

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ на мові послідовностей означає, що

а)	б)	в)	г)
$\exists(x_n): x_n \neq x_0 \Rightarrow (f(x_n)) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$	$\exists(x_n): x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow (f(x_n)) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$	$\forall(x_n): x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow (f(x_n)) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$	$\forall(x_n): x_n \neq x_0 \Rightarrow (f(x_n)) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, то функція в цій точці є

а)	б)	в)	г)
нескінченно малою	нескінченно великою	сталою	розбіжною

Для існування границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ необхідно і достатньо, щоб:

а)	б)	в)	г)
функція була визначена в точці a	існували і були рівними односторонні границі	функція обмежена в околі точки a	функція була неперервною в точці a

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$:

а)	б)	в)	г)
$= L \cdot M$ (завжди)	$= L \cdot M$ (якщо L і M скінченні)	$= L + M$	може не існувати

Який з виразів не є невизначеністю?

а)	б)	в)	г)
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	$(\infty - \infty)$	$(0 + 0 + \dots + 0)$

Невизначеність $(\infty - \infty)$, задану ірраціональними виразами, розкривають

а)	б)	в)	г)
діленням на найвищий степінь змінної	за допомогою 1-ої чудової границі	розкладанням на множники	за допомогою спряженого виразу

Яким буде результат знаходження границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4 + 5x - x^2}$?

а)	б)	в)	г)
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	-2	∞

Знайдіть хибне твердження:

а)	б)	в)	г)
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Виберіть функції, які не є еквівалентними в околі точки 0:

а)	б)	в)	г)
$\ln(1-3x)$ і $3x$	$\arcsin 5x$ і $\sin 5x$	$e^{2x} - 1$ і $2x$	$\operatorname{tg} x^2$ і x^2

Знайдіть приріст функції $y = x^2$ при переході від точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 3$

а)	б)	в)	г)
2	8	-2	-8

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо

а)	б)	в)	г)
$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$	$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A < \infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

Яке твердження не є означенням неперервності функції в точці ?

а)	б)	в)	г)
$(f(a + \Delta x) - f(a)) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$	$\Delta f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = 0$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$

Функція $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$ неперервна на множині:

а)	б)	в)	г)
$(1; 2) \cup (2; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$(2; +\infty)$

Якщо $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, то в точці a

а)	б)	в)	г)
функція неперервна	функція має розрив 1-го роду	функція має розрив 2-го роду	ситуація невизначена

Функція $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ у точці $x = 0$:

а)	б)	в)	г)
має усувний розрив	має розрив типу «стрибок»	має розрив другого роду	є неперервною

Дослідіть на неперервність функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1; \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ в точці $x = 1$:

а)	б)	в)	г)
неперервна	має усувний розрив	має розрив типу «стрибок»	має розрив другого роду

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то:

а)	б)	в)	г)
функція має максимум на $(a;b)$	існує точка $c \in (a;b):$ $f(c) = 0$	функція зростає на $[a;b]$	$f(x)$ має розрив на $(a;b)$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона

а)	б)	в)	г)
обмежена і досягає своїх точних граней	має не більше одного нуля	монотонна	на кінцях відрізка $[a, b]$ має значення різних знаків

Список використаних джерел

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969. 440 с.
2. Бохан К. А., Егорова И. А., Лашенов К. В. Курс математического анализа. У II-х т.: Учеб. пос. для студ. заочн. физ.-мат. фак. пединституты // Под ред. Вулиха Б. З. М., Просвещение, 1972..
3. Вступ до математичного аналізу в курсі вищої математики: навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання галузі знань 12 «Інформаційні технології» освітнього рівня «бакалавр» / Укладачі: Кривень В.І., Цимбалюк Л.І., Валяшек В.Б.. Тернопіль : 2022. 48 с.
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. К.: Вища школа, 1992. Ч.1. 359 с.
5. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. К., 1993. Ч. 1, 2.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. К.: А.С.К., 2001. 648 с.
7. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Ляшенко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч. 1. К.: Вища школа. 2002. 462 с.
8. Заболоцький М. В. та ін. Математичний аналіз : підр. / / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. К. : Знання, 2008. 421 с.
9. Киричевський В.В., Клименко М.І., Стреляєв Ю.М. Границя послідовності. Границя функції. Неперервність: навч. –метод. посібник для студентів 1 курсу математичного факультету. Запоріжжя, ЗНУ. 2005. 50 с.
10. Лісевич Л.М., Бабенко В.В., Бокало М.М., Тріщ Б.М. Математичний аналіз у задачах і вправах: частина I (Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної), Київ, 1993.
11. Ляшко І. І. та ін. Математичний аналіз. / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. К., 1992 – 1993. Ч. 1, 2.
12. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функций одной переменной). М.: Наука, 1970. 400 с.
13. Мартиненко О.В., Чкана Я.О. Вступ до математичного аналізу. Навчально-методичний посібник. Суми, 2025. 114 с.
14. Математический анализ в примерах и задачах: В 2 ч. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. К.: Вища шк. Головное изд-во, 1975. Ч.1. 680 с.

- 15.Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне силення функції однієї змінної. Харків, ХТУРЕ. 2022. 552 с.
- 16.Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Госуд. изд-во техн.-теор. л-ры, 1951. 696 с.
- 17.Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т. М.: Наука, 1969.
- 18.Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: В 2 т. М.: ГИТТЛ, 1957.
- 19.Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2 ч. К.: Вища шк., 2005. Ч.1. 448 с.
- 20.Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: В 3 т. К.: Либідь, 1994.
- 21.Шунда Н. М., Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. К.: Вища шк., 1993. 376 с.
- 22.Ясницька Н. М., Ахієзер О. Б., Боєва А. А., Геляровська О. А. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. Мод. 1 : Вступ до математичного аналізу. Елементи теорії множин, послідовності. Харків : вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2014. 140 с.

Навчальне видання

Мартиненко Олена Вікторівна

Чкана Ярослав Олегович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

з математичного аналізу

Вступ до аналізу

Навчально-методичний посібник

(Українською мовою)

Суми: СумДПУ, 2026

Комп'ютерний набір та верстка Чкана Я.О.

Редактор Мартиненко О.В.

СумДПУ імені А.С.Макаренка

40002 Суми, вул. Роменська, 87