УДК [378.016:517]:581
DOI 10.5281/zenodo.14566875

А. І. Римар
ORCID ID 0000-0001-9077-236X
Криворізький державний педагогічний університет

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ КІЛ НА ПРИКЛАДІ КАЛИНИ ЯК СИМВОЛУ УКРАЇНСЬКОЇ КУЛЬТУРИ

У статті досліджено процес генерування числових рядів, пов'язаних із рослинами-символами України, зокрема калиною, на основі їхнього розташування всередині кола. Проаналізовано геометричні інтерпретації цих рядів.

Визначено ряди, що базуються не тільки на площах криволінійних трапецій та кругів, а й на довжинах кіл, усередині яких розміщено рослини. Знайдено ряди радіусів, діаметрів, довжин кіл, ряд довжин кривих, що утворюють контури калинових гілок, ряди площ кругів та площ грон калини. Обчислено їх загальні й частинні суми, вказано сигма-моделі, а також рівень складності запропонованих задач. З'ясовано збіжність/розбіжність кожного з рядів за ознакою Д'Аламбера, а також побудовано графіки залежності частинних сум того чи того ряду від кількості доданків. Отримані результати представлені у вигляді таблиці, яка систематизує основні характеристики кожного з досліджених числових рядів, що дозволяє легко порівнювати їхні властивості та параметри. Такі таблиці не лише забезпечують зручність у сприйнятті інформації, а сприяють глибшому розумінню досліджуваних категорій, актуалізуючи їх значення в контексті математичного аналізу. Умотивовано доцільність застосування компетентнісного та різнорівневого підходів у викладанні числових рядів, підкреслюючи важливість міжпредметних зв'язків, зокрема між математикою та природознавством. Практичну значущість отриманих результатів підкреслено в контексті їх використання у навчальному процесі. Результати дослідження позитивно впливають не тільки на краще сприйняття навчального матеріалу та поглиблення знань студентів, а й мають виховне значення, оскільки дозволяють усвідомити глибокі зв'язки між математикою та культурними символами України.

Таким чином, стаття демонструє новий підхід до вивчення числових рядів шляхом осмислення їх через призму рослинних символів, що робить процес навчання більш інтерактивним і привабливим для студентів, стимулює розвиток мислення та формування ключових компетентностей.

Ключові слова: *числовий ряд, геометрична інтерпретація, рослини-символи України, калина, ключові компетентності, освітній процес з геометрії, геометричне моделювання, математичне мислення.*

Постановка проблеми. Числові ряди є важливим розділом математичного аналізу, однак часто навчальні завдання не пов'язують їх із реальними об'єктами або явищами навколишнього світу. Особливо бракує таких задач, що інтегрують міждисциплінарний підхід та сприяють вихованню патріотизму, любові до природи й екологічній свідомості. Проблема полягає у відсутності завдань, що ілюструють числові ряди за допомогою геометричних моделей, зокрема, на основі рослин-символів України, розміщених у різних геометричних фігурах, таких як коло. Тому дослідження числових рядів, що ґрунтуються на площах та довжинах кривих, мають важливе практичне й освітнє значення.

Аналіз актуальних досліджень. Теорія числових рядів завжди привертала увагу відомих математиків, серед яких можна виділити Л. Ейлера, Ж. Л. Д'Аламбера, О. Л. Коші, Е. Е. Кумера, Г. Раабе, П. Менгорі та Я. Бернулі. Їхній внесок у розвиток методів дослідження збіжності та розбіжності рядів був дуже значним, що дало поштовх до подальшого розвитку цієї галузі.

Сучасні дослідження починають фокусуватися на практичному застосуванні числових рядів у різних галузях науки та освіти. Зокрема, В. В. Корольський у своїх роботах [1, 3, 4, 5, 6, 7] досліджував геометричні підходи до вивчення рядів, таких як гармонічні та геометричні ряди, а також ряди, побудовані на основі нескінченних дробів і відношень.

Використання геометричних моделей для вивчення числових рядів, заснованих на символах української флори, є новим підходом, що поєднує математичну теорію та культурні аспекти. Особливо це стосується символів, таких як калина, що має значне місце в українській культурі та народній традиції. У попередніх дослідженнях [2, 8, 9, 10] уже розглядалися числові ряди, побудовані на геометричній інтерпретації різних рослин. Це дозволяє не лише покращити розуміння математичних концепцій, а й формувати екологічну свідомість і патріотизм.

Мета статті – представити результати дослідження числових рядів, геометричні інтерпретації яких пов'язані з рослинами-символами України у контексті калини, підкреслюючи їх значення в освітньому процесі через міждисциплінарний підхід.

Виклад основного матеріалу. Вивчення числових рядів з використанням геометричної інтерпретації дозволяє зробити складні математичні поняття більш наочними та зрозумілими, що особливо важливо в освітньому процесі, оскільки візуалізація числових рядів через геометричні моделі сприяє кращому засвоєнню складних математичних понять, допомагає розвивати абстрактне мислення та розуміння принципів збіжності рядів. Крім того, геометричне моделювання надає можливість застосувати математику в реальних ситуаціях і пов'язати її з культурними та екологічними аспектами, що сприяє поглибленню міжпредметних зв'язків та формуванню ширших компетентностей у студентів. Ми вважаємо, що ефективним підходом до опрацювання числових рядів є початок з побудови геометричних образів для їхніх елементів. У цьому контексті розгляд рослин-символів України як об'єктів для генерування числових рядів на основі їхніх геометричних характеристик є перспективним напрямом. У роботі подано аналіз побудови числових рядів із геометричною інтерпретацією, а також досліджено їхні властивості, зокрема збіжність і розбіжність.

Одним із центральних аспектів дослідження є математичні задачі, де розглянуто числові ряди довжин кривих та площ криволінійних трапецій, що мають форму калини. Геометричну модель кожної рослини розміщено всередині кіл. Це дозволяє створити числовий ряд, елементи якого обчислюються через площі цих криволінійних трапецій та довжини кривих. Основне завдання полягає у вивченні цього ряду на предмет його збіжності та обчислення частинних сум.

Задача. Геометрична інтерпретація ряду задана на малюнку 1. Гілочка калини розміщена всередині кола радіуса 0,5 одиниці довжини. Кожна гілочка розміщена всередині кола радіуса $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}, r_n -$ радіус n-го кола. Деякі елементи на малюнку мають однакову площу. Вихідні дані подано в таблиці 1. Складіть числові ряди, обчисліть їх суму та дослідіть на збіжність за різними ознаками:

1. Ряд радіусів кіл.
2. Ряд діаметрів кіл.
3. Ряд довжин кіл.
4. Ряд довжин кривих, що утворюють контури калинових гілок.
5. Ряд площ кругів.
6. Ряд площ калинових гілок.

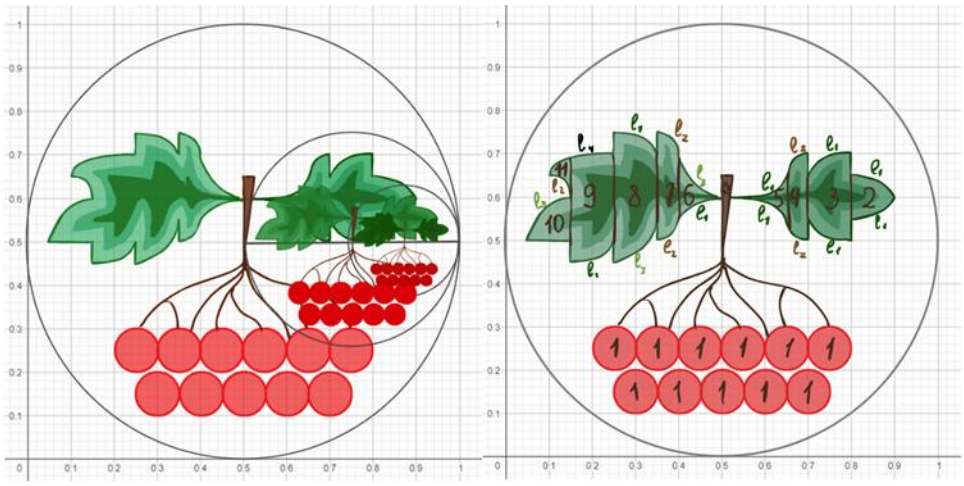


Рис. 1. Геометрична інтерпретація ряду «гілок калини» з розбиттям криволінійної трапеції на фрагменти

Таблиця 1

Вихідні дані

№	*Функція*	*Похідна першого порядку*	*Проміжок*
1	$(x-0{,}25)^2+(y-0{,}25)^2=0{,}05^2$	-	$x\in[0{,}2;0{,}3]$
2	$y=-10x^2+3x+0{,}375$	$y'(x)=-20x+3$	$x\in[0{,}05;0{,}15]$
3	$y=0{,}5$	$y'(x)=0$	$x\in[0{,}05;0{,}15]$
4	$y=-20x^2+4x+0{,}45$	$y'(x)=-40x+4$	$x\in[0{,}1;0{,}15]$
5	$y=\sqrt{\frac{1}{60}(x-0{,}1)+0{,}65}$	$y'(x)=\frac{1}{120\sqrt{\frac{1}{60}(x-0{,}1)}}$	$x\in[0{,}1;0{,}25]$
6	$y=\sqrt{-\frac{1}{40}(x-0{,}35)+0{,}7}$	$y'(x)=-\frac{1}{80\sqrt{-\frac{1}{40}(x-0{,}35)}}$	$x\in[0{,}25;0{,}35]$
7	$y=-20x^2+14x-1{,}7$	$y'(x)=-40x+14$	$x\in[0{,}35;0{,}4]$
8	$y=10x^2-10x+3{,}1$	$y'(x)=20x-10$	$x\in[0{,}4;0{,}5]$
9	$y=-5x^2+5x-0{,}65$	$y'(x)=-10x+5$	$x\in[0{,}4;0{,}5]$
10	$y=20x^2-14x+2{,}95$	$y'(x)=40x-14$	$x\in[0{,}35;0{,}4]$
11	$y=10x^2-5x+1{,}075$	$y'(x)=20x-5$	$x\in[0{,}25;0{,}35]$
12	$y=5x^2-1{,}5x+0{,}5625$	$y'(x)=10x-1{,}5$	$x\in[0{,}15;0{,}25]$
13	$y=6x-3{,}5$	$y'(x)=6$	$x\in[0{,}5;0{,}525]$
14	$y=0{,}65$	$y'(x)=0$	$x\in[0{,}5;0{,}525]$
15	$y=5x^2-5{,}5x+2{,}1125$	$y'(x)=10x-5{,}5$	$x\in[0{,}55;0{,}65]$
16	$y=-5x^2+5{,}5x-0{,}9125$	$y'(x)=-10x+5{,}5$	$x\in[0{,}55;0{,}65]$
17	$y=-5x^2+8x-2{,}55$	$y'(x)=-10x+8$	$x\in[0{,}7;0{,}8]$
18	$y=5x^2-8x+3{,}7$	$y'(x)=10x-8$	$x\in[0{,}7;0{,}8]$
19	$y=5x^2-8x+3{,}75$	$y'(x)=10x-8$	$x\in[0{,}8;0{,}9]$
20	$y=-5x^2+8x-2{,}55$	$y'(x)=-10x+8$	$x\in[0{,}8;0{,}9]$
21	$y=-20x^2+28x-9{,}1$	$y'(x)=-40x+28$	$x\in[0{,}65;0{,}7]$
22	$y=20x^2-28x+10{,}3$	$y'(x)=40x-28$	$x\in[0{,}65;0{,}7]$

Ряд радіусів кіл

Розглянемо коло радіуса 0,5 одиниці довжини. Кожна гілочка розміщена всередині кола радіуса $r_{n+1}=\frac{r_n}{2}, r_n-$ радіус n-го кола.

Нехай перше коло має радіус $r_1=\frac{1}{2}$. Тоді друге коло має такий радіус: $r_2=r_1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, а третє коло матиме радіус $r_3=\ r_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ і так далі.

Запишемо послідовність довжин радіусів r_n: $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{4}, r_3 = \frac{1}{8}, \cdots, r_n = \frac{1}{2^n}$

Маємо ряд такого виду: $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови: $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Необхідна умова виконується, а тому ряд довжин радіусів кіл може бути збіжним.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $r_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Обчислимо суму членів ряду: $S_n = \pi$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \pi = \pi \neq \infty$$

Сума є скінченною величиною, а тому ряд довжин радіусів кіл збіжний.

Ряд діаметрів кіл

Діаметр кожного кола рівний двом радіусам цього кола, тому ряд діаметрів має вид: $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

Дослідимо цей ряд на збіжність. Перевіримо виконання необхідної умови: $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ Необхідна умова виконується, а тому ряд довжин діаметрів кіл може бути збіжним.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $d_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Обчислимо суму членів ряду: $S_n = 0{,}5$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}5 = 0{,}5 \neq \infty$$

Сума є скінченною величиною, а тому ряд довжин діаметрів кіл збіжний.

Ряд довжин кіл

Використаємо формулу для знаходження довжини кола: $C_n = 2\pi r_n$

Послідовність радіусів кіл була знайдена у попередньому пункті задачі.

Запишемо послідовність довжин кіл C_n:

$$C_1 = 2\pi r_1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

$$C_2 = 2\pi r_2 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$C_3 = 2\pi r_3 = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n = 2\pi r_n = 2\pi \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$$

Маємо ряд такого виду: $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n-1}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^{n-1}} = [\text{властивість границі}] = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

Необхідна умова виконується, а тому ряд довжин кіл може бути збіжним.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $C_1 = \pi$, $q = \frac{1}{2}$. Обчислимо суму n членів ряду: $S_n = 2$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \neq \infty$$

Сума є скінченною величиною, а тому ряд довжин кіл збіжний.

Ряд довжин кривих, що утворюють контури калинових гілок

Коло, що утворює кожну ягоду має однакову довжину. Обчислимо довжину кола для однієї ягоди: $l_{\text{ягоди}} = 2\pi r_{\text{ягоди}} = 2\pi \cdot 0{,}05 = 0{,}1\pi$. Гроно містить 11 однакових ягід, загальна довжина кіл яких $l_{\text{ягід}} = 11 \cdot 0{,}1\pi = 1{,}1\pi$.

Обчислимо загальну довжину кривих, що утворюють контури двох листків калини.

Для цього використаємо вихідні дані з таблиці 1 та формулу $\int_a^b \sqrt{1+(f`(x))^2}\,dx$, де $a, b$ – межі інтегрування; кінці інтервалів з цієї таблиці, $f`(x)$ – похідна функції з таблиці. Деякі фрагменти кривих мають однакові довжини.

Листя калини обмежене різними графіками функцій. Обчислимо довжини кожного фрагменту та знайдемо суму. Вона і буде шуканою довжиною контуру листя калинової гілки.

$$L_{\text{листя}} = 9l_1 + 4l_2 + 3l_3 + l_4 + 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 9$$

Обчислимо довжину дуги кривої лінії l_1. Вона обмежена інтервалом $\mathrm{x} \in [0{,}15; 0{,}25]$ та графіком функції $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}^2 - 1{,}5\mathrm{x} + 0{,}5625$.

Знайдемо похідну функції: $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = 10\mathrm{x} - 1{,}5$.

$$l_1 = \int_{0{,}15}^{0{,}25} \sqrt{1+(10\mathrm{x}-1{,}5)^2}\,dx \approx 0{,}114779 \approx 0{,}115$$

Обчислимо довжину дуги кривої лінії l_2. Вона обмежена інтервалом $\mathrm{x} \in [0{,}35; 0{,}4]$ та графіком функції $\mathrm{y} = 20\mathrm{x}^2 - 14\mathrm{x} + 2{,}95$.

Знайдемо похідну функції: $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = 40\mathrm{x} - 14$.

$$l_2 = \int_{0{,}35}^{0{,}4} \sqrt{1+(40\mathrm{x}-14)^2}\,dx \approx 0{,}0739471 \approx 0{,}074$$

Обчислимо довжину дуги кривої лінії l_3. Вона обмежена інтервалом $\mathrm{x} \in [0{,}05; 0{,}15]$ та графіком функції $\mathrm{y} = -10\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 0{,}375$.

Знайдемо похідну функції: $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = -20\mathrm{x} + 3$.

$$l_3 = \int_{0{,}05}^{0{,}15} \sqrt{1+(-20\mathrm{x}+3)^2}\,dx \approx 0{,}1478942 \approx 0{,}148$$

Обчислимо довжину дуги кривої лінії l_4. Вона обмежена інтервалом $\mathrm{x} \in [0{,}1; 0{,}25]$ та графіком функції $\mathrm{y} = \sqrt{\frac{1}{60}(\mathrm{x}-0{,}1)} + 0{,}65$.

Знайдемо похідну функції: $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{120\sqrt{\frac{1}{60}(\mathrm{x}-0{,}1)}}$.

$$l_4 = \int_{0{,}1}^{0{,}25} \sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{1}{60}(\mathrm{x}-0{,}1)}+0{,}65\right)^2}\,dx \approx 0{,}15$$

Отже, довжина кривої у формі калинової гілки становить:

$$L_{\text{листя}} = 9 \cdot 0{,}115 + 4 \cdot 0{,}074 + 3 \cdot 0{,}148 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 9 = 6{,}525\ (\text{од. довж.})$$

$$l_{12} = 0{,}15 + 0{,}025 + 0{,}15 = 0{,}325\ (\text{од. довж.})$$

Обчислимо довжину контуру калинової гілки: $L_{\text{калини}} = L_{\text{листя}} + l_{\text{ягід}} + l_{12}$.

$$L_{\text{калини}} = 6{,}525 + 1{,}1\pi + 0{,}325 \approx 10{,}305751 \approx 10{,}3\ (\text{од. довж.})$$

Послідовність довжин кіл відома: $\mathrm{C}_1 = \pi$, $\mathrm{C}_2 = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{C}_3 = \frac{\pi}{4}, \cdots, \mathrm{C}_n = \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

Тож, можна легко отримати ряд довжин калинових гілок:

$\sum_{n=1}^{\infty} L_{n\ \text{калини}} = \sum_{n=1}^{\infty} 10{,}3 \cdot \frac{2^{n-1}}{\pi}$.

Дослідимо його на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} L_{n\ \text{калини}} = \lim\limits_{n\to\infty} 6{,}525 \cdot \frac{2^{n-1}}{\pi} = \infty$ – необхідна умова не виконується, а тому ряд контурів «калин» є розбіжним.

Ряд площ кругів

Використаємо формулу для обчислення площі круга: $S_n = \pi {r_n}^2$

Послідовність довжин радіусів r_n нам відома з одного з попередніх пунктів задачі: $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{4}, r_3 = \frac{1}{8}, \cdots, r_n = \frac{1}{2^n}$

Запишемо послідовність площ кругів.

$$S_1 = \pi {r_1}^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2^2}$$

$$S_2 = \pi {r_2}^2 = \pi \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{2^4}$$

$$S_3 = \pi {r_3}^2 = \pi \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{2^6}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = \pi {r_n}^2 = \pi \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{\pi}{2^{2n}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{2n}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^{2n}} = 0$

Необхідна умова виконується, а тому ряд площ кругів може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо:

$$S_{n+1} = \frac{\pi}{2^{2n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2^2} < 1$$

Ряд площ кругів абсолютно збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_1 = \frac{\pi}{2^2}$, $q = \frac{1}{2^2}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{\pi}{3}$.

Ряд площ калинових гілок

Кожна ягода калини має однакову площу, що є площею круга радіуса 0,05 одиниць довжини. Обчислимо площу однієї ягоди: $S_{\text{ягоди}} = \pi {r_{\text{ягоди}}}^2 = \pi \left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{\pi}{10^4}$. Гроно містить 11 однакових ягід, площа яких $S_{\text{ягід}} = \frac{11\pi}{10^4}$.

Обчислимо площу меншого листка калини.

Вона обмежена різними графіками функцій. Тож, умовно розіб'ємо її прямими на менші площі. Обчислимо їх та знайдемо суму. Вона і буде площею шуканої криволінійної трапеції.

Площа S_{10} обмежена графіками функцій: $\text{y} = -10(\text{x} - 0{,}15)^2 + 0{,}6$, $\text{x} = 0{,}05$, $\text{x} = 0{,}15$, $\text{y} = 0{,}5$.

$$S_{10} = \int_{0,05}^{0,15} (-10(\text{x} - 0{,}15)^2 + 0{,}6 - 0{,}5)\, dx = \frac{1}{150}$$

Решту площ можна обчислити за аналогічним алгоритмом із певними особливостями. В результаті отримано:

$$S_{\text{малого листа}} = \frac{7}{200}\ \text{кв. од.}$$

$$S_{\text{великого листа}} = \frac{43}{600}\ \text{кв. од.}$$

$$S_{12} = \frac{3}{800}\ \text{кв. од.}$$

Отже, площа калинової гілки становить:

$$S_{\text{калини}} = S_{\text{ягід}} + S_{\text{малого листа}} + S_{\text{великого листа}} + S_{12}$$

$$S_{\text{калини}} = \frac{11\pi}{10^4} + \frac{7}{200} + \frac{43}{600} + \frac{3}{800} = \frac{11\pi}{10^4} + \frac{53}{480}\ (\text{кв. од.})$$

Площа кожної криволінійної трапеції у формі калинової гілки становить $\frac{11\pi}{10^4} + \frac{53}{480}$ площі круга. Послідовність площ кругів відома: $S_1 = \frac{\pi}{2^2}$, $S_2 = \frac{\pi}{2^4}$, $S_3 = \frac{\pi}{2^6}$, $\cdots$, $S_n = \frac{\pi}{2^{2n}}$.

Тож, можна легко отримати ряд площ калинових гілок:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\ \text{калини}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11\pi}{10^4}+\frac{53}{480}\right)\cdot\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

Дослідимо його на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\ \text{калини}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11\pi}{10^4}+\frac{53}{480}\right)\cdot\frac{\pi}{2^{2n}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ «калин» може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2^2} < 1$ – ряд площ «калин» збіжний.

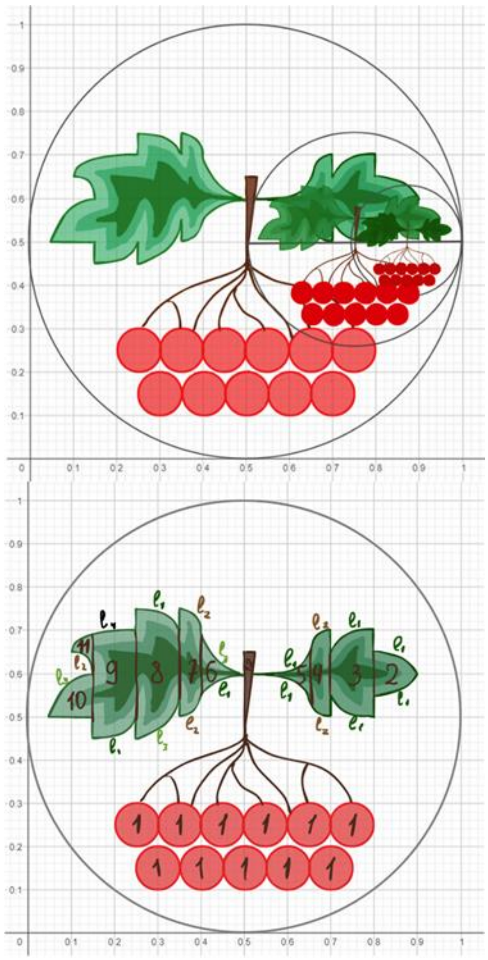
Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\ \text{калини}} = \frac{11\pi}{10^4}+\frac{53}{480}$, $q = \frac{1}{2^2}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\ \text{калини}}}{1-q} = \left(\frac{11\pi}{10^4}+\frac{53}{480}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi(6625+66\pi)}{180000}$.

За аналогічним алгоритмом були отримані ряди маку.

Результати дослідження ряду гілок калини детально проаналізовані й наведені у таблиці 2.

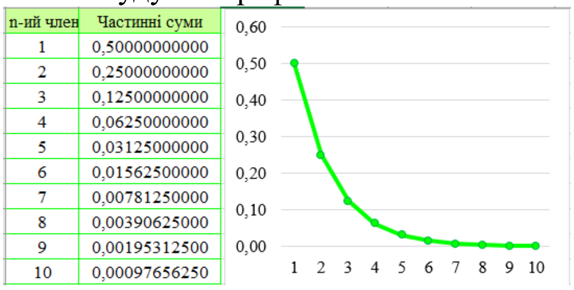
Таблиця 2

Результати дослідження ряду гілок калини

Характеристика			Геометрична інтерпретація ряду гілок калини
Довжина початкової фігури	$l_{\text{кривої}}$	10,3	
	$l_{\text{кола}}$	π	
	$r_{\text{кола}}$	0,5	
	$d_{\text{кола}}$	1	
Площа початкової фігури	$S_{\text{кр.тр.}}$	$\frac{11\pi}{10^4}+\frac{53}{480}$	
	$S_{\text{круга}}$	$\frac{\pi}{4}$	
Сигма-модель ряду довжин	радіусів кіл	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$	
	діаметрів кіл	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$	
	кіл	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^{n-1}}$	
	криволінійних трапецій	$\sum_{n=1}^{\infty}10{,}3\cdot\frac{2^{n-1}}{\pi}$	
Сигма-модель ряду площ	кругів	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^{2n}}$	
	калини	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11\pi}{10^4}+\frac{53}{480}\right)\cdot\frac{\pi}{2^{2n}}$	
Сума ряду довжин	радіусів кіл	π	**Рис. 2. Геометрична інтерпретація ряду «гілок калини» з розбиттям криволінійної трапеції на фрагменти**
	діаметрів кіл	0,5	
	кіл	2	
Сума ряду	кругів	$\frac{\pi}{3}$	

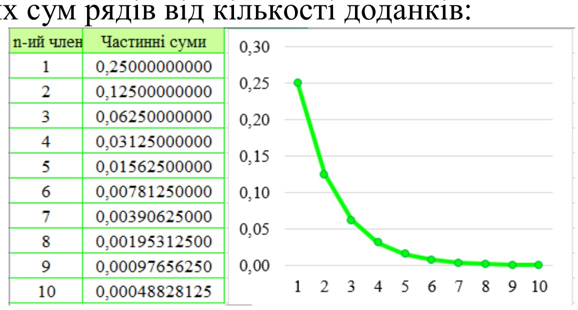
площ	калини	$\dfrac{\pi(6625 + 66\pi)}{180000}$	
Збіжність / розбіжність		Збіжний (1-3, 5, 6), розбіжний (4)	
Рівень складності задач		I (1,2), II (3, 5), III (4, 6)	

Побудуємо графіки залежності частинних сум рядів від кількості доданків:



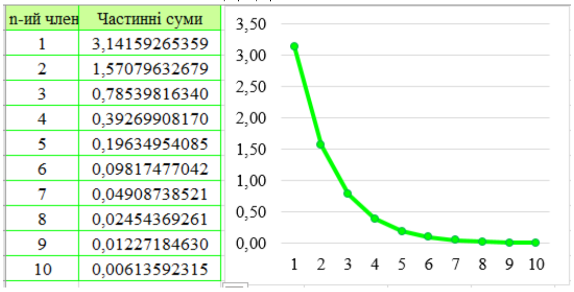
n-ий член	Частинні суми
1	0,50000000000
2	0,25000000000
3	0,12500000000
4	0,06250000000
5	0,03125000000
6	0,01562500000
7	0,00781250000
8	0,00390625000
9	0,00195312500
10	0,00097656250

Рис 3. Графік залежності частинних сум ряду радіусів кіл від кількості доданків



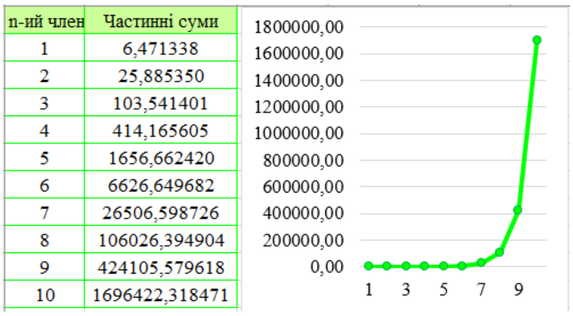
n-ий член	Частинні суми
1	0,25000000000
2	0,12500000000
3	0,06250000000
4	0,03125000000
5	0,01562500000
6	0,00781250000
7	0,00390625000
8	0,00195312500
9	0,00097656250
10	0,00048828125

Рис 4. Графік залежності частинних сум ряду діаметрів кіл від кількості доданків



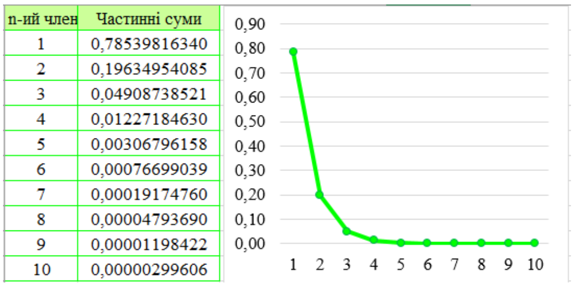
n-ий член	Частинні суми
1	3,14159265359
2	1,57079632679
3	0,78539816340
4	0,39269908170
5	0,19634954085
6	0,09817477042
7	0,04908738521
8	0,02454369261
9	0,01227184630
10	0,00613592315

Рис 5. Графік залежності частинних сум ряду довжин кіл від кількості доданків



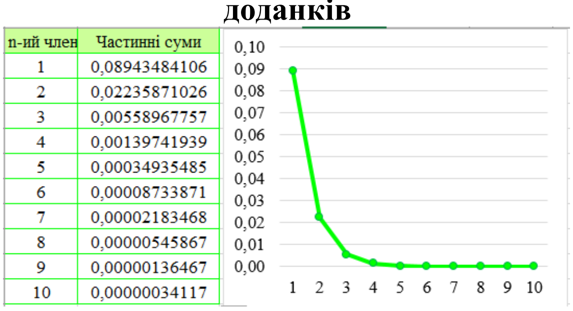
n-ий член	Частинні суми
1	6,471338
2	25,885350
3	103,541401
4	414,165605
5	1656,662420
6	6626,649682
7	26506,598726
8	106026,394904
9	424105,579618
10	1696422,318471

Рис 6. Графік залежності частинних сум ряду довжин кривих від кількості доданків



n-ий член	Частинні суми
1	0,78539816340
2	0,19634954085
3	0,04908738521
4	0,01227184630
5	0,00306796158
6	0,00076699039
7	0,00019174760
8	0,00004793690
9	0,00001198422
10	0,00000299606

Рис 7. Графік залежності частинних сум ряду площ кругів від кількості доданків



n-ий член	Частинні суми
1	0,08943484106
2	0,02235871026
3	0,00558967757
4	0,00139741939
5	0,00034935485
6	0,00008733871
7	0,00002183468
8	0,00000545867
9	0,00000136467
10	0,00000034117

Рис 8. Графік залежності частинних сум ряду площ калинових гілок від кількості доданків

Одним із ключових аспектів використання геометричних моделей для вивчення числових рядів є можливість інтеграції різнорівневих і міжпредметних підходів, що дозволяє урізноманітнити освітній процес і зробити його більш ефективним. Запропоновані задачі на прикладі калини не лише формують математичні компетентності студентів, але й виховують почуття патріотизму та підвищують їхню екологічну свідомість. Зокрема, акцентування уваги на культурних символах України, таких як калина, сприяє усвідомленню цінності національної спадщини та любові до рідної природи. Цей підхід також дозволяє більш ефективно формувати навички аналітичного мислення, оскільки студенти мають змогу не лише абстрактно розглядати математичні моделі, а й застосовувати їх до реальних об'єктів.

Представлені результати можуть бути використані для подальшого розвитку навчальних матеріалів із математики, зокрема для включення задач, пов'язаних із геометричними інтерпретаціями числових рядів, у навчальний процес.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. У результаті проведеного дослідження було продемонстровано можливості використання геометричних моделей числових рядів на основі культурного символу України – калини. Показано, що такі завдання не лише допомагають у вивченні теорії числових рядів і властивостей їхньої збіжності, але й сприяють розвитку міждисциплінарних компетентностей студентів, формуванню патріотичного виховання та екологічної свідомості. Практична значущість результатів полягає в можливості їх застосування в освітньому процесі як ефективного інструменту для поєднання математичної теорії з реальними об'єктами навколишнього середовища. Запропоновані підходи можуть бути інтегровані в курс математики для підвищення інтересу студентів до навчання і розвитку їхніх аналітичних та творчих здібностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Корольський, В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп‘ютерні технології: науково-методичний збірник, XV, 57–63 (Korolskiy, V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. Latest computer technologies: scientific and methodical collection, XV, 57–63).
2. Корольський, В. В., Римар, А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов‘язаних з державною символікою. Актуальні питання природничо-математичної освіти: збірник наукових праць, 2(20), 29–38. (Korolskiy, V. V., Rymar, A. I. (2022). Geometric interpretation of numerical series associated with state symbols. Topical issues of natural and mathematical education: a collection of scientific papers, 2(20), 29–38).
3. Корольський, В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп‘ютерні технології: науково-методичний збірник, XVI, 59–66 (Korolskiy, V. V. (2018). Geometric interpretation of a numerical series of arithmetic progression. Latest computer technologies: scientific and methodical collection, XVI, 59–66).
4. Корольський, В. В., Габ, С. С. (2018). Лінійна, квадратурна та кубатурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп‘ютерні технології: науково-методичний збірник, XVI, 67–73 (Korolskiy, V. V., Gab, S. S. (2018). Linear, quadrature and cuboidal geometric interpretation of numerical series by means of modeling. Latest computer technologies: scientific and methodical collection, XVI, 67–73).
5. Корольський, В. В., Шокалюк, С. В., Мельниченко, Ю. А. (2018). Теоретикометодичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта, 4(18), 81–89 (Korolskiy, V. V., Shokaluk, S. V., Melnychenko, Y. A. (2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. Physical and mathematical education, 4(18), 81–89).
6. Корольський, В. В., Тураєва О. (2023). Генерація та дослідження чисельних рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1(21), 46–54. (Korolsky, V. V., Turaeva O. (2023). Generation and study of numerical series using a geometric model and a combination of series. Topical issues of natural science and mathematics education, 1(21), 46–54).
7. Корольський, В. В., Габ, С. С. (2018). Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання», 42, 39–45. (Korolsky, V. V., Gab, S. S. (2018). Numerical series related to the parameters of the dodecahedron. Bulletin of the International Research Center "Human: Language, Culture, Cognition", 42, 39–45).
8. Римар, А. І. (2022). Генерація та дослідження чисельних рядів із застосуванням квадратури проектів різноманітних об'єктів: кваліфікаційна робота ступінь вищої освіти магістр, спеціальність 01404 середня освіта (математика). Кривий Ріг: науковий керівник В. В. Корольський. (Rymar, A. I. (2022). Generation and study of numerical series using quadrature of projects of various objects: qualification work, higher education degree Master, specialty 01404 secondary education (mathematics). Kryvyi Rih: scientific supervisor V. V. Korolsky)

9. Римар, А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з об'єктами флори. Наукові записки молодих учених, 10. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка. Режим доступу: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1968/pdf. (Rymar, A. I. (2022). Geometric interpretation of numerical series related to flora objects. Scientific notes of young scientists, 10. Kropyvnytskyi: RVV TSPU im. V. Vynnychenko. Retrieved from: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1968/pdf).
10. Римар, А. І., Корольський, В. В. (2023). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з рослинами-символами України. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1(21), 70–77. (Rymar, A. I., Korolskyi, V. V. (2023). Geometric interpretation of numerical series related to plants-symbols of Ukraine. Topical issues of natural science and mathematics education, 1(21), 70–77).
11. Шкіль, М. І. (1981). Математичний аналіз, частина II: Посібник для педагогічних інститутів. Київ: Вища школа. Головне видавництво. (Shkil, M. I. (1981). Mathematical analysis, part II: A manual for pedagogical institutes. Kyiv: Vyshcha shkola. Main publishing house).

Rymar A. I. Geometric modeling of numerical series of circles on the example of viburnum as a symbol of Ukrainian culture.

The article investigates the process of generating numerical series associated with plants-symbols of Ukraine, in particular viburnum, based on their location within a circle. Geometric interpretations of these series are analyzed.

The series are based not only on the areas of curved trapezoids and circles, but also on the lengths of the circles within which the plants are placed. The series of radii, diameters, and lengths of circles, the series of lengths of curves forming the contours of viburnum branches, the series of areas of circles and areas of viburnum bunches were found. Their total and partial sums are calculated, sigma models are specified, and the level of complexity of the proposed problems is indicated. The convergence/divergence of each of the series by D'Alembert's sign is determined, and graphs of the dependence of partial sums of a series on the number of terms are plotted. The obtained results are presented in the form of a table that systematizes the main characteristics of each of the studied numerical series, which makes it easy to compare their properties and parameters. Such tables not only provide convenience in perceiving information, but also contribute to a deeper understanding of the studied categories, actualizing their meaning in the context of mathematical analysis. The expediency of using competency-based and multi-level approaches in teaching numerical series is substantiated, emphasizing the importance of interdisciplinary connections, in particular between mathematics and natural science. The practical significance of the results obtained is emphasized in the context of their use in the educational process. The results of the study have a positive impact not only on the better perception of educational material and deepening of students' knowledge, but also have an educational value, as they allow us to realize the deep connections between mathematics and cultural symbols of Ukraine.

Thus, the article demonstrates a new approach to the study of number series by understanding them through the prism of plant symbols, which makes the learning process more interactive and attractive for students, stimulates the development of thinking and the formation of key competencies.

Key words: *numerical series, geometric interpretation, plants-symbols of Ukraine, viburnum, key competencies, geometry educational process, geometric modeling, mathematical thinking.*