Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Я.О. Чкана, О.В. Мартиненко, І.В. Шишенко

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Суми 2022

УДК 378.14

Рекомендовано до друку рішенням кафедри математики, фізики та методик їх навчання Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка (протокол № 2 від 29.09.2022 р.)

Рецензенти:

Швець В.О. – завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор

Тарельник В.Б. – завідувач кафедри "Технічний сервіс" Сумського національного аграрного університету, доктор технічних наук, професор

Чкана Я.О., Мартиненко О.В., Шишенко І.В. Застосування аналітичної геометрії в задачах математичного аналізу : Навчально-методичний посібник. – Суми: ФОП Литовченко Є.Б., 2022. – 118 с.

Матеріали, надані у цьому посібнику, є керівництвом до застосування елементів аналітичної геометрії на площині та у просторі при розв'язуванні типових задач курсу математичного аналізу. Для студентів спеціальностей 014 Середня освіта (Математика) та 014 Середня освіта (Фізика).

УДК 378.14

ЗМІСТ

ВСТУП

Упровадження у вищій освіті України нових державних стандартів підготовки бакалаврів та магістрів педагогічних спеціальностей, які забезпечують перехід на компетентністну модель освіти, вимагають удосконалення системи підготовки студентів. Це призводить до зміни програм фахових дисциплін, що вивчаються майбутніми вчителями, зокрема вчителями математики.

Аналіз стану математичної підготовки педагогів, випускників фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, свідчить про відсутність у них належного досвіду здійснювати інтеграцію при навчанні дисциплін математичного циклу на основі реалізації міжпредметних зв'язків, зокрема математичного аналізу та аналітичної геометрії. Тому для адаптації майбутніх бакалаврів середньої освіти у професійно педагогічному середовищі закладу освіти та успішної самореалізації в умовах Нової української школи важливо володіти компетентностями з обох дисциплін інтегрально.

Представлений посібник відповідає навчальним програмам з математичного аналізу та аналітичної геометрії, які викладаються майбутнім бакалаврам середньої освіти фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. При його створенні автори особливу увагу звернули на потреби при вивченні інтегрального та диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних, оскільки розв’язування задач з цих розділів математичного аналізу неможливе без глибоких знань аналітичної геометрії.

Посібник складається з двох частин, в яких відповідно розкривається застосування аналітичної геометрії площини та простору при розв’язуванні задач математичного аналізу.

Навчальний посібник забезпечений великою кількістю детально розібраних і проілюстрованих прикладів, що надає можливість сформувати взаємозв’язок між абстрактно-наочним та абстрактнологічним образами подання основних понятійних об’єктів наведеного теоретичного матеріалу і змісту математичних задач.

Посібник містить посилання на допоміжний довідковий матеріал у вигляді QR-кодів.

Нумерація формул і рисунків у посібнику має двоступеневу структуру: 1-ша цифра відповідає номеру розділу, а 2-га – номеру формули або рисунка.

Даний посібник створено на основі досвіду викладання математичного аналізу та аналітичної геометрії майбутнім бакалаврам середньої освіти фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університетів.

Розділ 1. Застосування геометрії площини в задачах математичного аналізу

1. Системи координат

Положення точок на прямій, на площині та в просторі можна визначити за допомогою їх координат – деяких чисел. З точок утворюються більш складні геометричні об’єкти, дослідження яких зручно проводити за допомогою методу координат. Координатний метод розглянемо на прямій лінії, на площині і в просторі.

Системою координат називають сукупність умов, за допомогою яких визначається положення точки на прямій лінії (один вимір), на площині (два виміри), в просторі (три виміри).

Система координат на прямій лінії

Сукупність умов, що визначають систему координат на прямій лінії (рис. 1.1):

1) один з двох напрямів на прямій *NM* вибираємо за “додатний” і позначимо його стрілкою;

2) одну з точок (нехай точку *O*) цієї прямої виберемо за “початок координат”;

3) довжину деякого визначеного вектора $\vec{e}$ (одиничного) вважаємо *одиницею довжини*, за допомогою якої вимірюватимемо довжини відрізків на прямій *NM*.

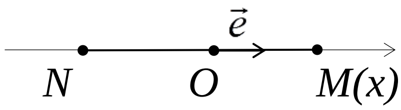


Рис. 1.1

Довільній точці *M* прямої поставимо у відповідність число *x* (тобто $M(x)$), модуль якого дорівнює відношенню довжини двох відрізків $OM : |\vec{e}\,|$. Точкам променя, що йде від точки *O* в додатному напрямі прямої, приписуємо знак плюс, а іншим - знак мінус, точці *O* відповідатиме число нуль.

Пряму, на якій задано додатний напрям, точку *O* і одиничний вектор $\vec{e}$, називають *віссю координат* (або просто *віссю*) і позначають *Ox*.

Отже, *координатою x* точки *M* на осі *Ox* називають відстань *OM*, виміряну масштабною одиницею $|\vec{e}\,|$ і взятою зі знаком плюс, якщо напрям від точки *O* до точки *M* збігається з додатним напрямом осі *Ox*, і знаком мінус, якщо ці напрямки протилежні. Це записують як $M(x)$.

Зауваження. При побудові системи координат на прямій розглядається деякий *базис*, що задається одиничним вектором $\vec{e}$ з початком в точці *O*. Вісь, яка проходять через точку *O* в напрямі базисного вектора, називають *віссю координат* або *координатною віссю*.

Декартова система координат на площині

Розглянемо на площині деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ із спільним початком *O* (рис. 1.2). Сукупність точки *O* і базису $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ називають *декартовою системою координат* на площині.

Точка *O* називається *початком координат*, а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються *осями координат*. Перша з них проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$ і називається *віссю абсцис*, друга – у напрямі вектора $\vec{e}_2$ і називається *віссю ординат*.

Будь-якій точці *M* площини можна поставити у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат *O*, а кінець – з точкою *M*. Такий вектор називається *радіус-вектором* точки *M* відносно точки *O*. За теоремою про розклад вектора за базисом існують такі дійсні числа x_1 і x_2, що $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$.

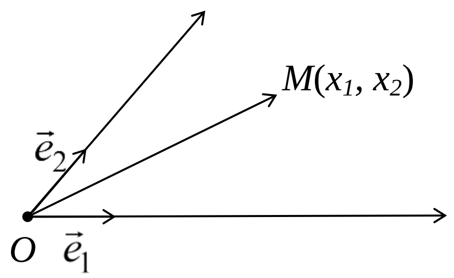


Рис. 1.2

Координати x_1 і x_2 радіус-вектора точки *M* відносно початку координат називають *декартовими координатами точки M* в даній системі координат і записують так: $M(x_1, x_2)$. Координата x_1 називається *абсцисою* точки *M*, а координата x_2 - *ординатою* точки *M*.

Система координат на площині визначає відповідність між точками площини і упорядкованими парами дійсних чисел. Наприклад, на рис. 1.3 зображено точки $A(2;1), B(-3;2), C(1;-3), D(-3;-3)$.

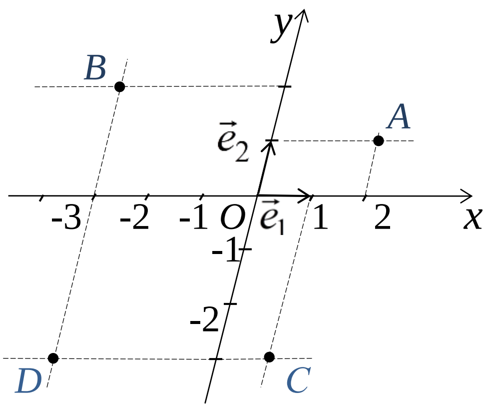


Рис. 1.3

Декартових систем координат на площині можна задати скільки завгодно. Серед них найбільш широко використовується так звана прямокутна декартова система координат. Щоб визначити цю систему, введемо поняття ортонормованих векторів: вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ називаються *ортонормованими*, якщо вони перпендикулярні і мають одиничну довжину.

Прямокутною декартовою системою координат (або просто *прямокутною системою координат*) називається система координат, базис якої ортонормований.

Прямокутну систему координат позначають *Oxy* або xOy.

Полярна система координат

Крім декартової системи координат на площині можна побудувати інші координатні системи, в яких положення точки повністю визначається двома числовими величинами (координатами). На практиці дуже часто використовується *полярна* система координат.

Вона задається точкою *O*, яка називається *полюсом*, і одиничним вектором $\vec{e}$, що виходить з цієї точки. Промінь, що виходить з точки *O* і співнапрямлений з вектором $\vec{e}$, називається *полярною віссю*.

Для визначення полярних координат точки на площині обирають *полюс O* та *полярну вісь* $O\rho$. Візьмемо довільну точку *M* на площині і побудуємо вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1.4).

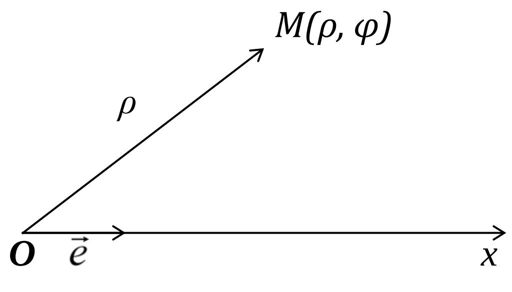


Рис. 1.4

Положення точки M повністю визначається кутом φ між полярною віссю та вектором $\overrightarrow{OM}$ і довжиною ρ вектора $\overrightarrow{OM}$. Числа $\rho,\ \varphi$ називаються *полярними координатами* точки $M(\rho,\varphi)$.

Отже, положення точки M на площині, яка не співпадає з полюсом, однозначно визначається заданням двох координат: відстанню ρ точки M від полюса та кутом φ між променем OM і полярною віссю. Полярний кут вимірюється в радіанах та вважається додатним, якщо відкладається проти годинникової стрілки.

На рис. 1.5 показана побудова декількох точок за їхніми полярними координатами.

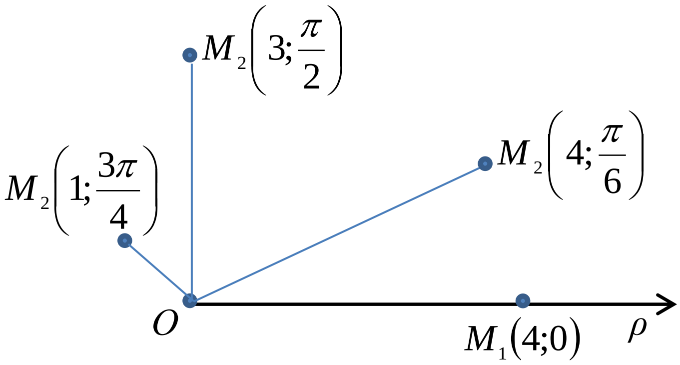


Рис. 1.5

Очевидно, що полярний радіус є величиною невід'ємною, тобто $\rho \geq 0$.

Якщо полюс полярної системи координат співпадає з початком координат декартової системи, а додатна піввісь Ox має однаковий напрямок з полярною віссю $O\rho$, то зв'язок між цими системами координат виражається формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Для знаходження величини кута φ потрібно визначити, в якій чверті знаходиться полярний промінь OM. Це можна зробити за знаками координат x та y точки M у прямокутній декартовій системі координат.

2. Поняття про лінію та її рівняння

Рівняння

$$F(x,y) = 0, \tag{1.1}$$

називається *рівнянням лінії* l, заданої на площині в деякій системі координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки, що лежить на лінії l, і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Якщо вираз $F(x,y)$ в рівнянні (1.1) є многочленом від змінних x та y (тобто сума скінченого числа одночленів виду $ax^k y^m$, де a – сталий коефіцієнт, а показники k, m – цілі невід'ємні числа), то лінія, що задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною*. Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*.

Алгебраїчні лінії розрізняють залежно від їхнього порядку. Якщо рівняння (1) алгебраїчне, то його степенем називається найвищий степінь одночлена, що входить до його складу. Степінь цього рівняння називається *порядком алгебраїчної лінії.*

Наприклад, рівняння $x - y + 5 = 0$ визначає лінію першого порядку.

Аналітична геометрія вивчає лінії лише першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються *неявними* рівняннями виду $ax + by + c = 0$ та $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$.

В аналітичній геометрії розв'язуються дві основні задачі:

1) скласти рівняння лінії (аналітичний закон), яка задана геометрично;

2) встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично.

В математичному аналізі при розв'язуванні задач більш доцільним є використання явного способу задання ліній (кривих) як графіків деяких функцій $y = f(x)$.

Окремим способом задання лінії є так званий параметричний.

Параметричні рівняння ліній

Нехай залежність між x і y виражена через третю змінну t, тобто

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки (x, y) на площині.

Якщо t змінюється неперервно, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб задання лінії називається *параметричним*, а рівняння (1.2) – *параметричним рівнянням лінії* l.

Приклади.

1. Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої. Якщо вздовж осі Ox котиться без ковзання коло радіуса R, то будь-яка нерухома точка кола описує криву, яка називається *циклоїдою* (рис. 1.6) і задається рівнянням

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π, то дані рівняння визначають першу арку циклоїди, якщо $2\pi < t < 4\pi$ – другу арку і т.д.

Циклоїда є найпростішою з кривих, яку на нерухомій площині описує точка однієї лінії, що котиться без ковзання по іншій лінії.

2. *Гіпоциклоїдою* та *епіциклоїдою* (рис. 1.7, а, б) називаються криві, які описує точка одного кола, що котиться по іншому нерухомому колу всередині та зовні відповідно. Вигляд і рівняння кривих залежить від відношення радіусів кіл.

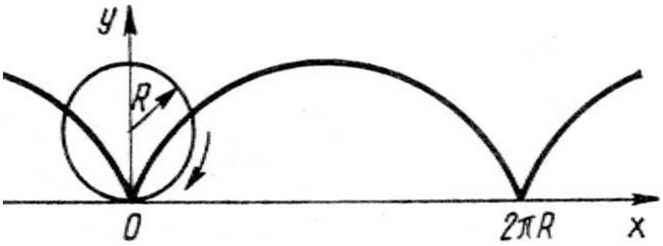


Рис. 1.6

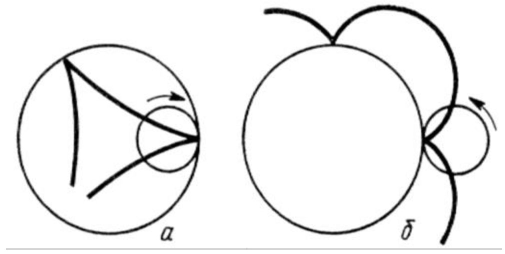


Рис. .1.7

Якщо радіуси кіл відносяться як 1:4, то гіпоциклоїда називається *астроїдою* (рис. 1.8, а), а якщо радіуси кіл відносяться як 1:1, то епіциклоїда називається *кардіоїдою* (рис. 1.8, б).

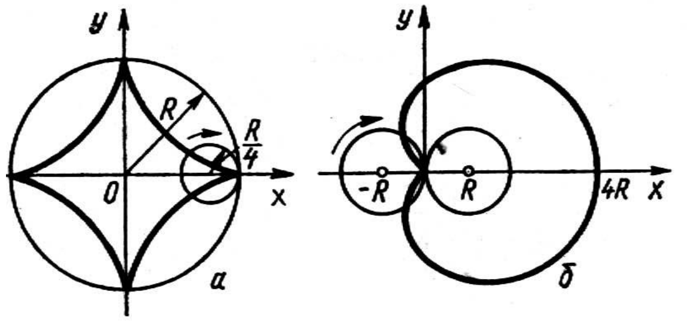


Рис.1. 8

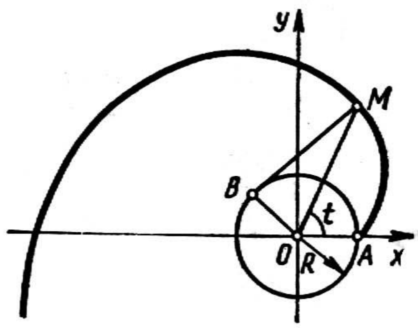


Рис. 1.9

Параметричне рівняння астроїди має такий вигляд:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t, \\ y = R\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Кардіоїда задається параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2R\cos t(1+\cos t), \\ y = 2R\sin t(1+\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Відзначимо, що полярне рівняння кардіоїди можна записати простіше, враховуючи, що $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а параметр t співпадає з полярним кутом φ:

$$\rho = 2R(1+\cos\varphi).$$

3. *Евольвентною розгорткою кола* (рис. 1.9) (від латинського *evolvo* – розгортати) називається крива, що задається рівняннями

$$\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t), \\ y = R(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t < +\infty.$$

Полярне рівняння лінії

Рівняння $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ називається *рівнянням лінії* l *в полярних координатах*, або *полярним рівнянням*, якщо його задовольняють полярні координати ρ і φ будь-якої точки лінії l і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Найчастіше лінія в полярній системі координат є графіком деякої функції $\rho = f(\varphi)$, для якої полярний кут є незалежною змінною, а полярний радіус – функцією.

Пропонуємо схему дослідження і побудови графіка такої функції:

1. Знайти область визначення функції, тобто ті значення аргументу φ, при яких функція існує (у полярній системі координат значення полярного радіусу є невід'ємним, тобто $\rho \geq 0$).

2. Визначити промені симетрії, тобто напівпрямі, що виходять з полюса, відносно яких графік функції є симетричним.

3. Знайти період функції.

4. Враховуючи отримані дані в пунктах 1-3, скласти таблицю і за значеннями φ та ρ побудувати точки, які надалі з'єднати плавною кривою.

Приклад. Побудувати графік функції $\rho = \cos 2\varphi$.

Область визначення функції знаходимо з умови $\cos 2\varphi \geq 0$, з якої отримаємо $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ або $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Існування променя симетрії $\varphi = 0$ графіка функції випливає із парності функції косинус, а період $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Враховуючи ці дані, графік заданої функції досить побудувати для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ (таблиця 1.1, рис.1.10).

Таблиця 1.1

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
2φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}85$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$	0,5	0

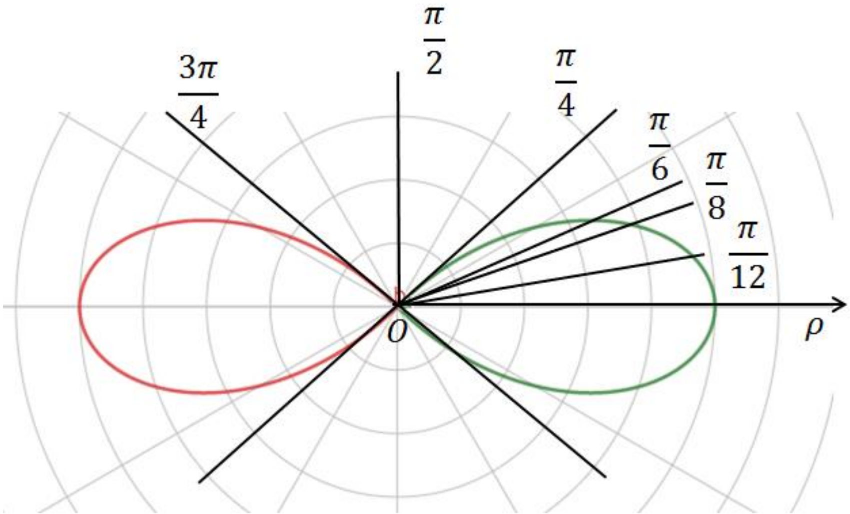


Рис.1.10

Приклад. Побудувати графік функції $\rho = \sin\frac{\varphi}{2}$.

Область визначення функції знаходимо з умови $\sin\frac{\varphi}{2} \geq 0$, з якої отримаємо $2\pi k \leq \frac{\varphi}{2} \leq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$ або $4\pi k \leq \varphi \leq 2\pi + 4\pi k,\ k \in Z$.

Очевидно, що період функції $T = 4\pi$. Оскільки $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$ або $\sin\frac{1}{2}(\pi + \varphi) = \sin\frac{1}{2}(\pi - \varphi)$, то промінь $\varphi = \pi$ є променем симетрії графіка функції. Цей факт також можна встановити, виходячи з непарності функції синус, симетрії її графіка відносно початку координат і нерівності $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ при $k = 0$ для полярного кута.

Враховуючи ці дані, графік заданої функції досить побудувати для $0 \leq \varphi \leq \pi$ (таблиця 1.2, рис.1.11).

Таблиця 1.2

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{\varphi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}85$	1

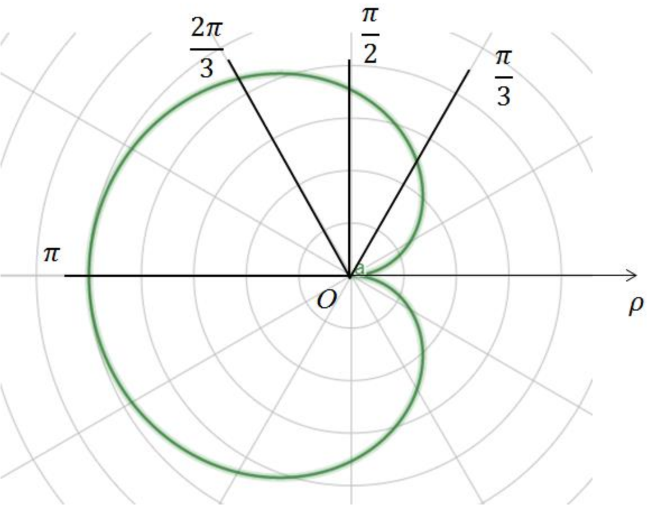
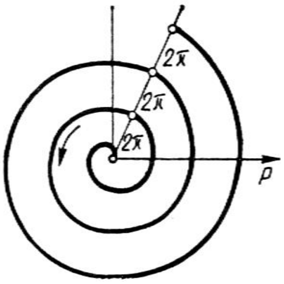


Рис. 1.11

Наведемо приклади ліній які доцільно розглядати в полярних координатах.

1. Лінія описана точкою, що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку називається *спіраллю Архімеда*. Рівняння спіралі Архімеда (рис. 1.12) має вигляд $\rho = a\varphi$, де $a > 0$ – стала величина.



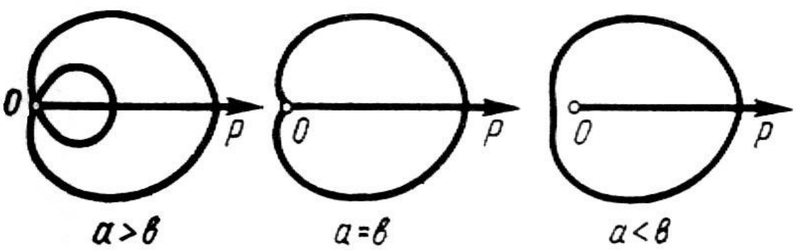


Рис. 1.12 Рис.1.13

2. Крива на рисунку 1.13, що задається рівнянням $\rho = a\cos\varphi + b$, називається *равликом Паскаля*.

3. Крива, що задається рівнянням $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ і має форму вісімки, називається *лемніскатою Бернуллі* (рис. 1.14). Зауважимо, що у прямокутних координатах рівняння лемніскати Бернуллі записується складнішим виразом $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$.

4. Крива (рис. 1.15), що задається рівнянням $\rho = a\cos 3\varphi$, називається *трипелюстковою розою*.

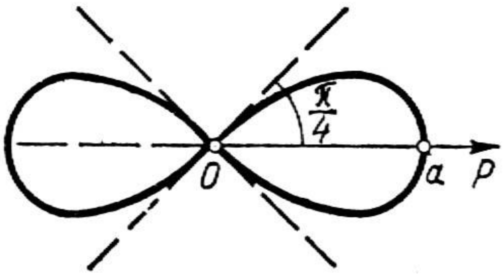


Рис. 1.14

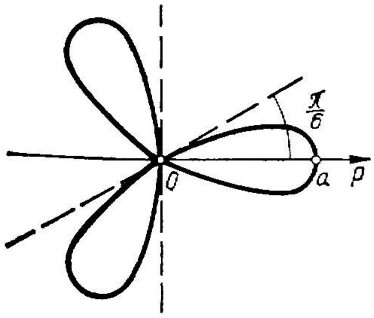


Рис. 1.15

3. Пряма на площині. Різні види її рівняння

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних *x* і *y*.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами. Розглянемо різні види її рівняння.

1) Складемо рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої* (рис. 1.16). Позначимо через M довільну точку прямої, проведемо радіус-вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на даній прямій.

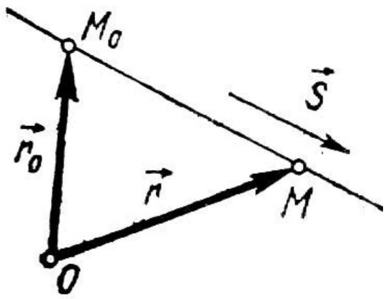


Рис. 1.16

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$, звідки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t. \qquad (1.3)$$

Змінна t у формулі (1.3) може набувати довільних дійсних значень і називається *параметром*, а рівняння (1.3) називається *векторним рівнянням прямої*.

2) Якщо пряма l розглядається на координатній площині і задається точкою $M_0(x_0,\, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m, n)$, то з формули (1.3) для відповідних координат векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0 + \vec{s}t$ маємо *параметричне рівняння прямої*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Виключимо параметр t в системі (1.4) і отримаємо *канонічне рівняння прямої*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (1.5)$$

3) Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1,\ y_1)$ та $M_2(x_2,\ y_2)$. Її рівняння отримаємо з канонічного рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (1.6)$$

Рівняння (1.6) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.*

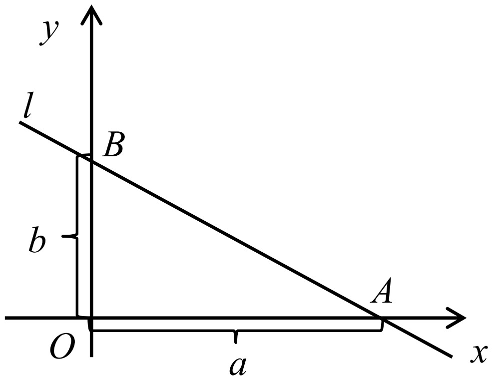


Рис. 1.17

4) Якщо пряма l проходить через точки $A(a;\,0)$ та $B(0;\,b)$, тобто відтинає на координатних осях Ox та Oy відповідно відрізки довжиною $|a|$ та $|b|$ (залежно від знаку чисел) (рис. 1.17), то з рівняння (1.6) маємо

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1.7)$$

Рівняння (1.7) називається *рівнянням прямої у відрізках на осях.*

5) Рівняння (1.5) запишемо у вигляді

$$y-y_0=\frac{n}{m}(x-x_0)$$

і позначимо $\frac{n}{m}=k$, отримаємо рівняння

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (1.8)$$

Покладемо $y_0-kx_0=b$, з (1.8) маємо

$$y=kx+b. \qquad (1.9)$$

Відношення $k=\frac{n}{m}=tg\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 1.18), називається *кутовим коефіцієнтом прямої,* а величина b є ординатою точки перетину прямої з віссю Oy.

Якщо пряма проходить через початок координат, тобто $b=0$, то рівняння прямої має вигляд

$$y=kx.$$

Рівняння (8) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт*, а рівняння (9) – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

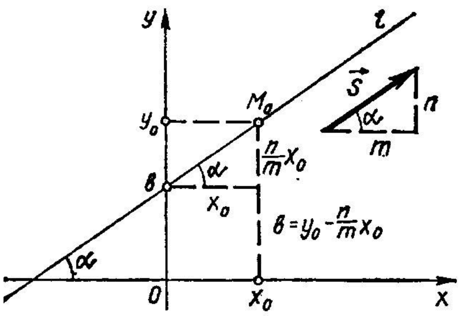


Рис. 1.18

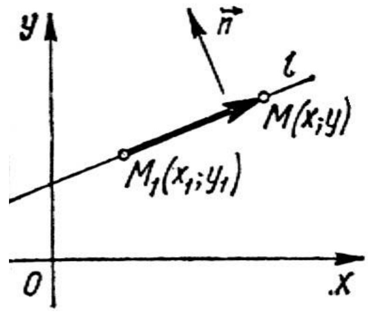


Рис. 1.19

6) Нехай задано вектор $\vec{n}=(A,B)$, перпендикулярний до прямої l. Візьмемо на цій прямій довільну точку $M(x,y)$ і отримаємо вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1)$ (рис. 1.19). Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \qquad (1.10)$$

Рівняння (1.10) називається рівнянням *прямої, яка проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора.*

Вектор $\vec{n}=(A,B)$ називається *нормальним вектором прямої*.

Якщо у рівнянні (1.10) розкрити дужки і позначити $C=-Ax_1-By_1$, то отримаємо рівняння

$$Ax+By+C=0, \qquad (1.11)$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*.

Теорема. Рівняння будь-якої прямої у прямокутній декартовій площині Oxy є лінійним рівнянням відносно x і y. І навпаки, кожне лінійне рівняння $Ax+By+C=0$ з двома змінними x і y визначає в прямокутній системі координат на площині деяку пряму.

7) Нехай на площині задано пряму (рис. 1.20). Припустимо, що відомий кут α, який утворює перпендикуляр, опущений з початку координат $O(0, 0)$ на цю пряму, та довжина цього перпендикуляра p ($p\geq 0$), тобто відстань від початку координат до прямої. Ці два параметри однозначно визначають розташування прямої на площині. Знайдемо її рівняння.

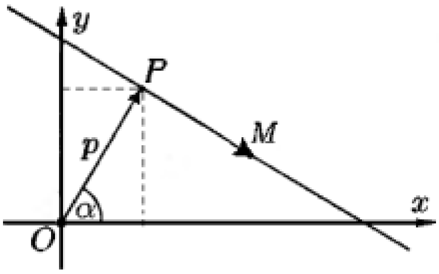


Рис. 1.20

Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0,0)$ на пряму. Тоді точка P має координати $P(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$ і вектор $\overrightarrow{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ на прямій і складемо вектор $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$. Помітимо, що вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OP}$, звідки випливає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OP} = (x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\sin\alpha)\sin\alpha = 0$.

Таким чином, отримали рівняння

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (1.12)$$

яке називається *нормальним рівнянням прямої*.

Звернемо увагу, що для нормального рівняння мають виконуватися дві умови:

1) $p > 0$;
2) $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

Розглянемо, як із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна перейти до її нормального рівняння (1.12). Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, якщо $C < 0$, і на $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, якщо $C > 0$. Покладаючи $\lambda C = -p$, отримаємо рівняння $(\lambda A)x + (\lambda B)y - p = 0$, де $p > 0$. Оскільки $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$, то числа λA та λB є відповідно косинусом та синусом одного і того самого кута. Покладемо $\lambda A = \cos\alpha$ і $\lambda B = \sin\alpha$. Тоді рівняння нашої прямої набуває вигляду: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Отже, ми звели загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду. Підкреслимо, що множник $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ називається *нормуючим множником*.

Узагальнимо відомості про різні види рівнянь прямої на площині у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Види рівнянь прямої на площині

№	**Назва рівняння**	**Задання**	**Рівняння**
1.	Параметричне рівняння прямої	точкою $M_0(x_0,\, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(m,n)$	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$
2.	Канонічне рівняння прямої	точкою $M_0(x_0,\, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(m,n)$	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$
3.	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	двома точками $M_1(x_1,\, y_1)$ та $M_2(x_2,\, y_2)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$
4.	Рівняння прямої у відрізках на осях	відтинає на координатних осях відрізки $\lvert a\rvert$ та $\lvert b\rvert$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
5.	Рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт	точкою $M_0(x_0,\, y_0)$ та кутовим коефіцієнтом k	$y-y_0=k(x-x_0)$
6.	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	кутовим коефіцієнтом k та відрізком довжиною $\lvert b\rvert$ на осі Oy	$y=kx+b$
7.	Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора	точкою $M_1(x_1,\, y_1)$ та нормальним вектором $\vec{n}=(A,B)$	$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$
8.	Загальне рівняння прямої	нормальним вектором $\vec{n}=(A,B)$	$Ax+By+C=0$
9.	Нормальне рівняння прямої	кутом α, який утворює перпендикуляр довжиною p, опущений з початку координат на пряму	$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$

Приклад. Скласти канонічне рівняння прямої, яка задана точкою $M_0(-1, 2)$ і напрямним вектором $\vec{s}=(3,4)$. Перейти до інших видів рівняння прямої.

Розв'язання. Використовуючи формулу (1.6) маємо:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}.$$

Це є канонічне рівняння шуканої прямої.

Після спрощень одержимо загальне рівняння прямої

$$4(x+1) = 3(y-2)$$
$$4x-3y+10=0.$$

З цього рівняння маємо координати нормального вектора прямої $\vec{n}=(4;\,-3)$.

Тепер отримаємо рівняння «в відрізках на осях»:

$$4x-3y=-10,$$
$$\frac{4x}{-10}-\frac{3y}{-10}=1,$$
$$\frac{x}{-\frac{10}{4}}+\frac{y}{\frac{10}{3}}=1,$$
$$\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{\frac{10}{3}}=1.$$

З цього рівняння маємо координати точок перетину прямої з осями координат: $\left(-\frac{5}{2};\ 0\right)$ та $\left(0;\ \frac{10}{3}\right)$.

Від загального рівняння можемо також перейти до рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$3y=4x+10,$$
$$y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}.$$

З цього рівняння маємо кутовий коефіцієнт прямої $k=\frac{4}{3}$ та точку $\left(0;\ \frac{10}{3}\right)$ перетину прямої з віссю Oy.

Запишемо нормальне рівняння прямої. Для цього знайдемо нормуючий множник M і домножимо на нього усі компоненти загального рівняння:

$$M=-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{5},$$
$$-\frac{4x}{5}+\frac{3y}{5}-\frac{10}{5}=0,$$
$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2=0.$$

З цього рівняння маємо відстань від початку координат до прямої $p = 2$, а також напрямні косинуси нормалі $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$.

Покажемо, як маючи загальне рівняння прямої, перейти до канонічного рівняння. Спочатку знайдемо координати точки, через яку проходить пряма $4x-3y+10=0$. Нехай $x_0 = -1$, тоді обчислюємо $y_0 = 2$. Знайдемо координати напрямного вектора $\vec{s}=(m,n)$. Оскільки напрямний вектор прямої перпендикулярний до її нормального вектора $\vec{n} = (4;\ -3)$, то їх скалярний добуток дорівнює 0:

$$4m - 3n = 0,$$

звідки

$$m = \frac{3n}{4}.$$

Запишемо канонічне рівняння:

$$\frac{x+1}{\frac{3n}{4}} = \frac{y-2}{n},$$

$$\frac{x+1}{\frac{3}{4}} = \frac{y-2}{1},$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}.$$

Взаємне розташування прямих на площині

Прямі на площині можуть:

1) перетинатися під довільним кутом;
2) бути паралельними;
3) бути перпендикулярними.

Нехай прямі l_1 та l_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}.$$

1) ***Кут між прямими.*** Нехай $\varphi = (l_1 \hat{,} l_2)$– кут між прямими, $0<\varphi<\pi$ (рис. 1.21). Оскільки вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ є напрямними векторами даних прямих, то кут між цими прямими є кутом між їхніми

напрямними векторами $\varphi = \left(\vec{s}_1, \hat{\ } \vec{s}_2\right)$, косинус якого знайдемо з формули скалярного добутку двох векторів:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

2) ***Умова паралельності прямих***. Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

3) ***Умова перпендикулярності двох прямих.*** Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то і вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ перпендикулярні. Тоді їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

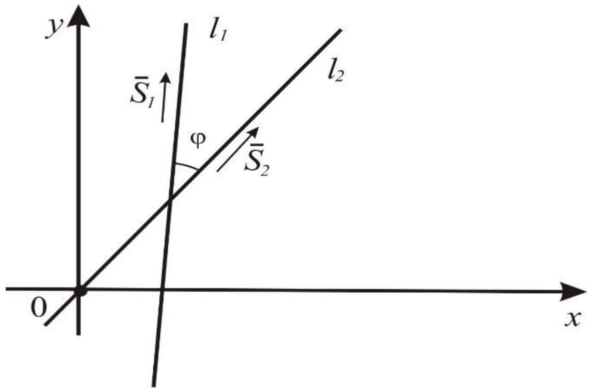


Рис. 1.21

Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

1) ***Кут між прямими*** l_1 і l_2 дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ (рис. 1.22), тому косинус кута φ між прямими l_1 і l_2 визначається формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (1.13)$$

2) ***Умова паралельності прямих*** l_1 і l_2:

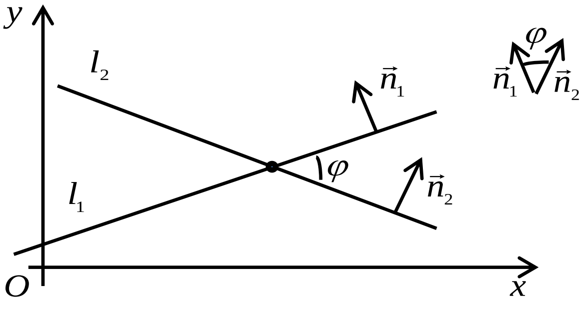


Рис. 1.22

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

3) *Умова перпендикулярності прямих* l_1 і l_2:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Нехай прямі l_1 *і* l_2 *задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами*

$$y = k_1x + b_1; \qquad y = k_2x + b_2,$$

де $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ – відповідні кутові коефіцієнти (рис. 1.23).

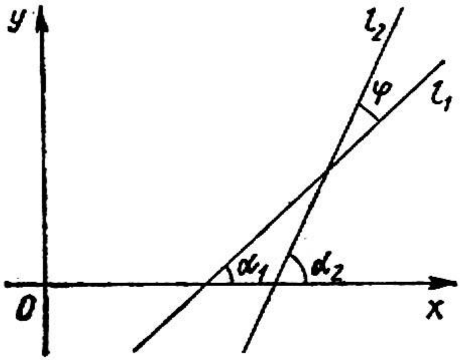


Рис. 1.23

1) ***Кут між прямими***: $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$ або

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (1.14)$$

2) ***Умова паралельності прямих.*** Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$, тому з формули (1.14) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2.$$

3) ***Умова перпендикулярності прямих.*** Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^0$ і $tg\varphi$ не існує, тому знаменник дробу (1.13) дорівнює нулю. Отже, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1k_2 + 1 = 0 \quad \text{або} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Приклад. Знайти кут між прямими $x = 4$ і $2x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. За формулою (1.13) маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \text{ де } \vec{n}_1 = (1, 0), \quad \vec{n}_2(2, -1);$$

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1)}{1 \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Приклад. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 (2; 1) під кутом 45^0 до даної прямої.

Розв'язання. Оскільки для шуканої прямої маємо точку, яка належить цій прямій, то знайдемо її нормальний вектор $\vec{n}_1 = (A, B)$. Для заданої прямої маємо нормальний вектор $\vec{n}_2 = (2,3)$. Урахуємо, що кут між цими прямими 45^0, і складемо рівняння:

$$cos\, 45^0 = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2A + 3B}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2A + 3B}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$4A + 6B = \sqrt{26}\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$5A^2 - 24AB - 5B^2 = 0,$$

Тоді $A = 5B$ або $A = -\frac{1}{5}B$ і умові задачі задовольняє два нормальних вектори $\vec{n}_1 = (5;\ 1)$ або $\vec{n}_1{}' = \left(-\frac{1}{5}; 1\right)$.

Складаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора:

$5(x - 2) + (y - 1) = 0$ або $-\frac{1}{5}(x - 2) + (y - 1) = 0$.

$5x + y - 11 = 0$ або $x - 5y + 3 = 0$.

Відстань від точки до прямої

Нехай пряма L задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, і задана деяка точка площини $M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої L (рис. 1.23).

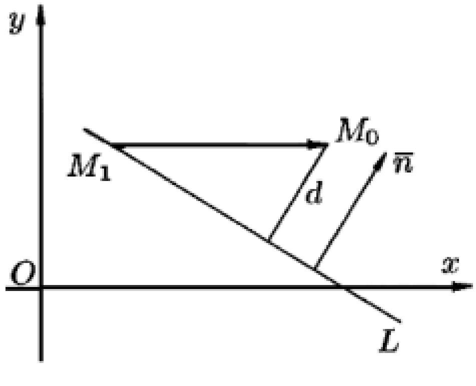


Рис. 1.23

Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де точка $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точки прямої L, на напрям нормального

$$d = \left|np_{\vec{n}}\, \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{(x_0 - x_1)A + (y_1 - y_0)B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

вектора $\vec{n} = (A, B)$ прямої L. Отже,

Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, звідки $-Ax_1 - By_1 = C$. Тому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад. Дано вершини трикутника ABC: $A(1,-2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. Скласти рівняння сторони AB трикутника, рівняння бісектриси AL, рівняння висоти BN, рівняння медіани CM, рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно AB. Знайти довжину висоти BN (рис. 1.24).

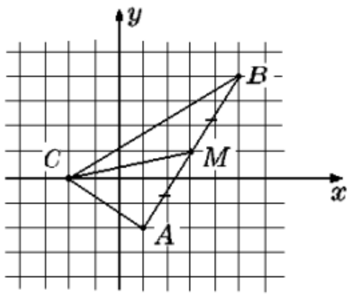


Рис. 1.24

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона AB трикутника ABC, як рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$$AB: \frac{x-1}{5-1} = \frac{y+2}{4+2}, \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{6},$$

звідки отримаємо рівняння $3x - 2y - 7 = 0$.

Складемо рівняння бісектриси AL. Для цього знайдемо координати точки L, використовуючи властивість бісектриси трикутника: $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.

Оскільки

$|AB = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52}$ і $AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$,

то $\lambda = \frac{BL}{LC} = 2$. За формулами поділу відрізка у заданому відношенні

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{1}{3}, \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{4}{3},$$

тобто $L\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Таким чином, рівняння прямої, на якій лежить бісектриса внутрішнього кута при вершині A трикутника ABC

$$AL: \frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \Leftrightarrow 5x + y - 3 = 0.$$

Перед тим як скласти рівняння висоти *BN*, складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона *AC*, як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$AC:\ \frac{x-1}{-2-1}=\frac{y+2}{0+2},\quad \frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{2}\Leftrightarrow 2x+3y+4=0.$$

Тепер складемо рівняння прямої, на якій лежить висота *BN*, як рівняння прямої перпендикулярної *AC*, що проходить через точку *B*. Оскільки вектор $\vec{n}=(2;3)$ – нормальний вектор прямої *AC*, то він є напрямним вектором прямої *BN*. Тому шукане рівняння висоти

$$BN:\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{3}\ \Leftrightarrow 3x2y-7=0.$$

Бачимо, що пряма, на якій лежить висота *BN*, співпадає з прямою, на якій лежить сторона *AB*. Таким чином, точка *N* співпадає з точкою *A*, а кут при вершині *A* — прямий. Обчислимо довжину висоти *BN* за формулою відстані від точки до прямої:

$$d=\frac{|2\cdot 5+3\cdot 4+4|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}.$$

Для того, щоб скласти рівняння прямої, на якій лежить медіана *CM* трикутника, знайдемо координати точки *M* за формулами середини відрізка *AB*:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+5}{2}=3,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+4}{2}=1.$$

Тому рівняння медіани

$$CM:\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-0}{1-0},\quad \frac{x+2}{5}=\frac{y}{1}\Leftrightarrow x-5y+2=0.$$

Нарешті, складемо рівняння прямої, що проходить через точку *C* паралельно стороні *AB*. Оскільки паралельні прямі мають колінеарні нормальні вектори, то нормальний вектор $\vec{n}=(3;-2)$ прямої *AB* можна вважати також нормальним вектором шуканої прямої. Тоді за рівнянням прямої, що проходить через задану точку *C*(−2, 0) перпендикулярно вектору $\vec{n}=(3;-2)$, рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$3(x+2)-2(y-0)=0\ \Leftrightarrow 3x-2y+6=0.$$

4. Лінії другого порядку

Поняття лінії другого порядку

Алгебраїчна лінія другого порядку – це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

де коефіцієнти a, b, c, d, e, f – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a, b, c відмінне від нуля.

Зауваження. Лінії другого порядку називаються також конічними перерізами, оскільки їх можна дістати як лінії перетину прямого кругового конуса з площиною.

Коло, еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок площини, що називаються *фокусами*, є сталою величиною, більшою ніж відстань між фокусами.

Нехай F_1 і F_2 – фокуси еліпса, а $M(x, y)$ – довільна точка еліпса (рис 1.24). Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів F_1 і F_2 через $2a$. За означенням еліпса $2a > 2c$.

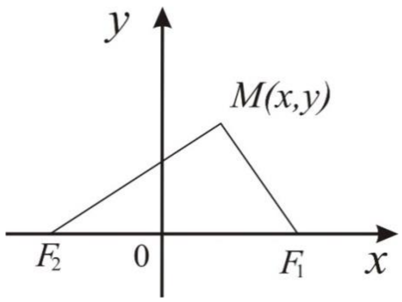


Рис. 1.24

Виберемо прямокутну систему координат на площині так, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а вісь Oy є перпендикулярною до Ox і проходить через середину відрізка $F_1 F_2$. Тоді відносно цієї системи координат фокуси еліпса матимуть координати $F_1(c,\ 0)$ і $F_2(-c,\ 0)$. За формулою відстані між двома точками обчислимо довжини відрізків MF_1 і MF_2 (вони називаються *фокальними радіусами точки M*):

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

За означенням еліпса отримаємо, що

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Виконавши спрощення з заміною $b^2 = a^2 - c^2$, одержимо *канонічне рівняння еліпса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.15)$$

Оскільки рівняння (1.15) містить парні степені змінних x та y, то еліпс симетричний відносно координатних осей *Ox, Oy* та відносно точки *O,* яка

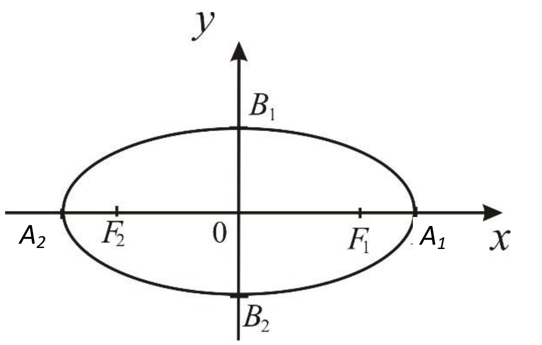


Рис. 1.25

називається *центром еліпса.* Еліпс перетинає вісь Ox у точках $A_1(a,\,0)$ і $A_2(-a,\,0)$, а вісь Oy – у точках $B_1(0,b)$ і $B_2(0,-b)$, які називаються *вершинами* еліпса. Відрізки $A_1A_2=2a$ та $B_1B_2=2b$ $(a>b)$ називаються відповідно *великою і малою осями еліпса,* а числа a і b називаються відповідно *малою* і *великою півосями* еліпса (рис. 1.25).

При побудові еліпса доцільно спочатку побудувати прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, діагоналі якого перетинаються в початку координат, і вписати в нього еліпс.

Якщо в рівнянні еліпса $a=b$, то маємо рівняння *кола* $x^2+y^2=a^2$. Отже, коло є окремим випадком еліпса.

До фокальних властивостей еліпса відносяться поняття ексцентриситету та директрис.

Ексцентриситетом еліпса (позначається e) називають відношення відстані між його фокусами до довжини його великої осі:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ випливає, що $c<a$, тому для еліпса його ексцентриситет $e<1$.

Через ексцентриситет еліпса можна виразити відношення його півосей:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-e^2}\,.$$

Звідси, при наближенні ексцентриситету e до одиниці, відношення півосей еліпса $\frac{b}{a}$ зменшується і прямує до нуля, а отже, еліпс стає дедалі більш розтягнутим вздовж осі Ox.

Директрисами еліпса називають дві прямі, які перпендикулярні до фокальної осі еліпса і розміщені симетрично відносно центра еліпса на відстані $\dfrac{a}{e}$ від нього.

Директриси еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ мають рівняння $x=\pm\dfrac{a}{e}$. Оскільки $e<1$ або $\dfrac{a}{e}>a$, то ці прямі еліпс не перетинають (рис. 1.26).

Справедливе твердження:

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=e\cdot$$

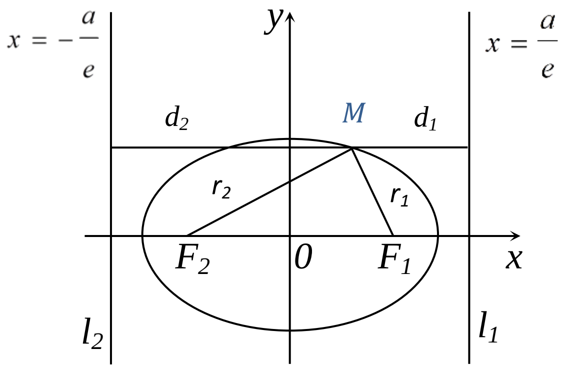


Рис. 1.26

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1\left(4,-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2},\ 3\right)$. Знайти його ексцентриситет та скласти рівняння його директрис. Побудувати його.

Розв'язання. Оскільки точки належать еліпсу, то їхні координати задовольняють рівняння (1.15):

$$\frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1;\qquad \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1.$$

Розв'язком отриманої системи рівнянь є $a^2=20,\ b^2=15.$ Отже, шукане рівняння еліпса має вигляд $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$. Побудуємо його (рис. 1.27).

Із співвідношення $c^2 = a^2 - b^2$, отримаємо $c = \sqrt{5}$. Тому ексцентриситет $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$, а рівняння директрис мають вигляд $x = \pm 4\sqrt{5}$.

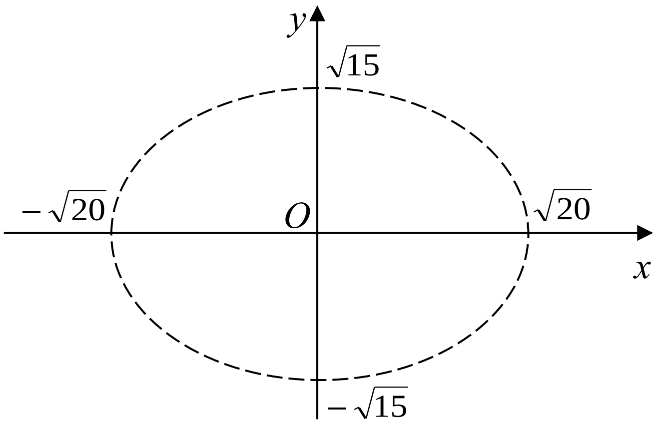


Рис. 1.27

Зауважимо, що рівняння $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ визначає еліпс з центром у точці $(x_0; y_0)$.

Приклад. Впевнитися в тому, що наступне рівняння $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ визначає еліпс. Знайти координати його центра, піввісі, фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис.

Розв'язання. У заданому рівнянні слід зібрати повні квадрати та звести рівняння до канонічного вигляду:

$$5x^2 - 30x + 9y^2 + 18y + 9 = 0,$$
$$5(x^2 - 6x + 9) - 45 + 9(y^2 + 2y + 1) - 9 + 9 = 0,$$
$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45,$$
$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Отже, маємо канонічне рівняння еліпса з центром в точці $C\,(3; -1)$ (рис. 1.28). Піввісі цього еліпса $a = 3$, $b = \sqrt{5}$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-5} = 2$. Фокуси $F_1(1;-1)$ та $F_2(5;-1)$ будуть розташовуватися на прямій $y = -1$ на відстані $c = 2$ від центра еліпса. Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Директриси еліпса будуть знаходитися на відстані $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$ від центра еліпса і мати рівняння:

$$x_1 = x_0 + \frac{a}{\varepsilon} = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2},\ x_2 = x_0 - \frac{a}{\varepsilon} = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}.$$

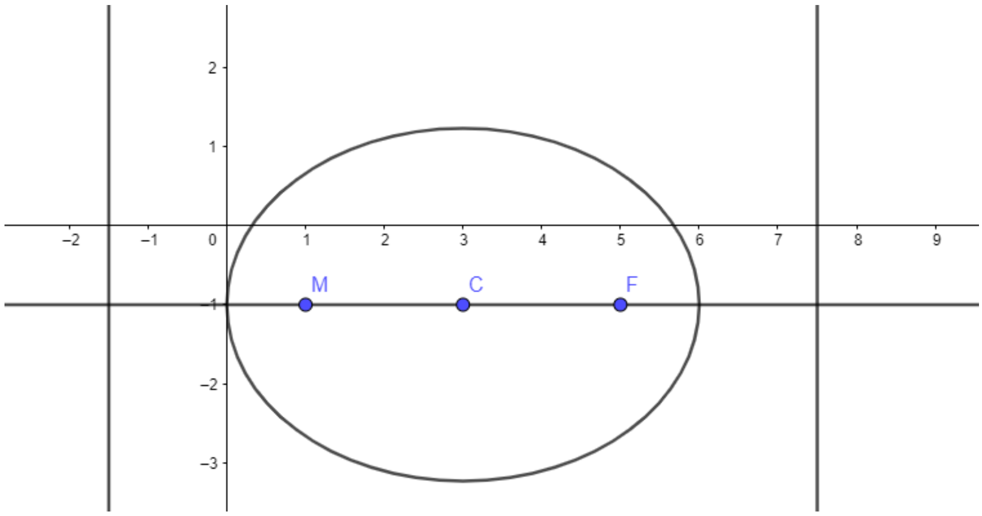


Рис. 1.28

Розглянемо параметричне рівняння кола. Позначимо через t кут між віссю Ox і радіус-вектором OM довільної точки M $(x;\ y)$ кола (рис.1.29). Із співвідношень у прямокутному трикутнику маємо, що точка $M(x;\ y)$ лежить на колі тоді і тільки тоді, коли змінні x та y задовольняють параметричні рівняння

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t;\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

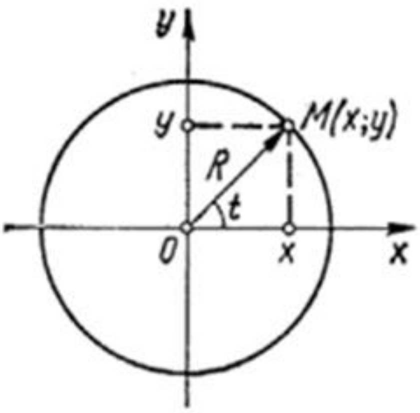


Рис. 1.29

Зауважимо, що еліпс з центром у точці $(x_0; y_0)$ і півосями a та b задають параметричні рівняння $x = x_0 + a\cos t$, $y = y_0 + b\sin t$, $a > 0, b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, різниця відстаней яких від двох фіксованих точок площини (*фокусів)*, є сталою величиною, меншою ніж відстань між фокусами.

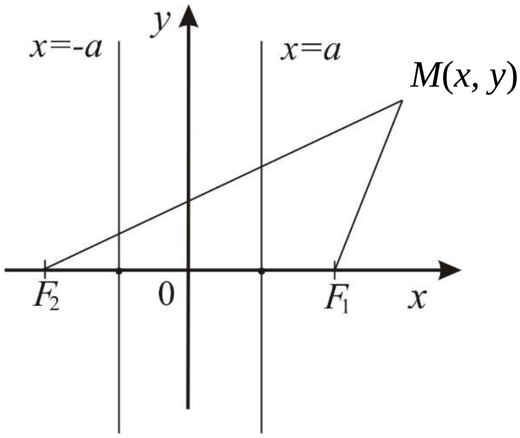


Рис. 1.30

Нехай F_1 і F_2 - фокуси гіперболи, відстань між якими позначимо через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів - через $2a$. Очевидно, що $a < c$ (за означенням гіперболи).

Виберемо прямокутну систему координат Oxy на площині так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 1.30). За означенням точка $M(x, y)$ лежить на гіперболі тоді і тільки тоді, коли $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$ або

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a .$$

Виконавши перетворення, одержимо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1.15)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Рівняння (1.15) містить парні степені змінних x та y, а тому гіпербола симетрична відносно координатних осей Ox, Oy та відносно точки O, яка називається *центром гіперболи.*

Гіпербола (1.15) перетинає вісь Ox у двох точках $A_1(a,\ 0)$ і $A_2(-a, 0)$, а вісь Oy взагалі не перетинає. Точки A_1 і A_2 називають *дійсними вершинами гіперболи*, а відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається дійсною віссю гіперболи. Точки $B_1(0, b)$ і $B_2(0, -b)$ називаються *уявними вершинами гіперболи*, а вісь Oy - уявною віссю. Числа a і b гіперболи називаються відповідно *дійсною та уявною півосями гіперболи*.

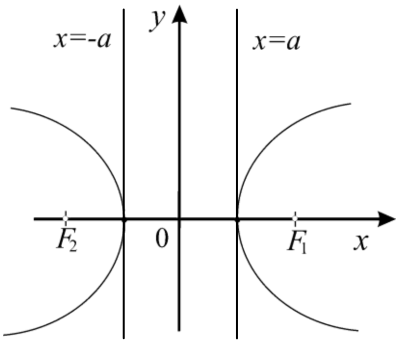


Рис. 1.31

Якщо $|x|$ прямує до нескінченності, то $|y|$ також необмежено зростає. Всередині смуги між паралельними прямими $x = \pm a$ немає жодної точки гіперболи.

Гіпербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ складається з двох нескінченних віток, симетричних відносно осей

Ox і Oy. Кожна з цих віток перетинає вісь Ox у вершині гіперболи (рис. 1.31).

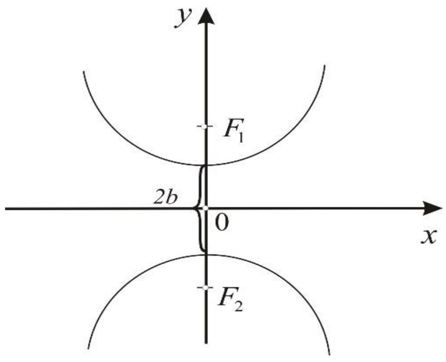


Рис. 1.32

Рівняння

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.16)$$

задає гіперболу, для якої вісь Oy є дійсною, а Ox – уявною (рис. 1.32). Для гіперболи (1.16) довжина дійсної півосі дорівнює b, уявної a. Фокуси гіперболи лежать на осі Oy. $c^2=a^2+b^2$, отже, маємо $F_1(0,c)$ і $F_2(0,-c)$.

Гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ називаються *спряженими.*

Гіпербола з рівними півосями $(a=b)$ називається *рівносторонньою*, а її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2-y^2=a^2.$$

Асимптотою гіперболи називається пряма, точки якої віддаляючись по віткам гіперболи до нескінченності, необмежено наближаються до цієї прямої. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ є *асимптотами* гіперболи (1.15).

При побудові гіперболи доцільно:

1) побудувати прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, діагоналі якого перетинаються в початку координат;

2) провести прямі, що проходять через діагоналі цього прямокутника – асимптоти гіперболи, і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи;

3) побудувати вітки гіперболи.

До фокальних властивостей гіперболи відносяться поняття ексцентриситету та директрис.

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення відстані між її фокусами до довжини її дійсної осі:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}>1, \qquad (1.17)$$

де $c>a$ (за означенням).

Через ексцентриситет гіперболи можна виразити відношення уявної півосі до дійсної:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}.$$

Ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим менше e, тим менше відношення $\frac{b}{a}$, тим менший кут між асимптотою і віссю Ox, і тим повільніше гіпербола відхиляється від осі Ox.

Директрисами гіперболи називають прямі, які перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і знаходяться на відстані $\frac{a}{e}$ від початку координат.

Рівняннями директрис гіперболи (1.15) є $x = \pm\frac{a}{e}$, а спряженої до неї гіперболи (1.16) – $y = \pm\frac{b}{e}$. Директриси гіперболи не перетинаються.

Справедливе твердження: *Відношення довжини фокальних радіусів кожної точки гіперболи до відстаней цієї точки від відповідних директрис є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету гіперболи* (рис. 1.33)*, тобто*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e.$$

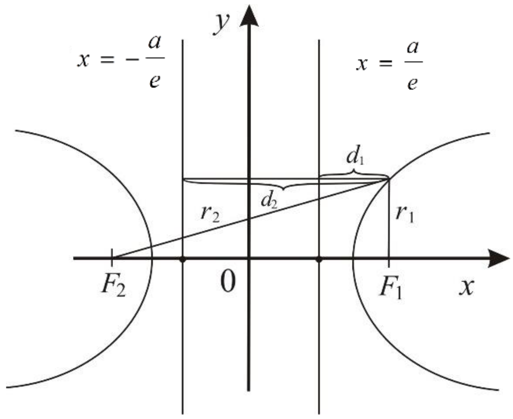


Рис. 1.33

Приклад. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 12, а ексцентриситет $e = \frac{5}{3}$. Записати рівняння її асимптот та побудувати її.

Розв'язання. Оскільки $2a = 12$, то $a = 6$, $e = \frac{5}{3} = \frac{c}{a}$, звідки $c = 10$. За формулою $b^2 = c^2 - a^2$ маємо $b = 8$. Тоді шукане рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$, а рівняння її асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Ескіз гіперболи зображено на рис. 1.34.

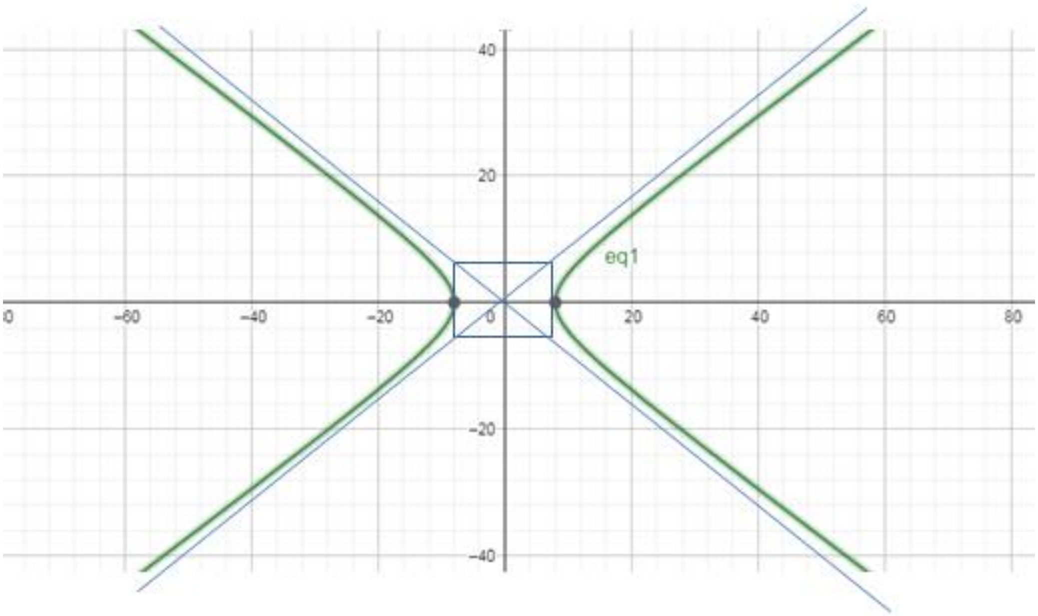


Рис.1.34

Рівняння $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ визначає гіперболу з центром у точці $(x_0; y_0)$.

Приклад. Установити координати центра, піввісі, фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис гіперболи

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

Розв'язання. Маємо канонічне рівняння гіперболи з центром в точці *C* (3; –1). Піввісі гіперболи a = 3, b = 2; $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$. Фокуси будуть розташовуватися на прямій y = –1 на відстані c = $\sqrt{13}$ від центра гіперболи в точках F_1 (3–$\sqrt{13}$; –1) та F_2 (3+$\sqrt{13}$; -1). Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$. Директриси гіперболи будуть знаходитися на відстані $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{9\sqrt{13}}{13}$ від центра гіперболи: $x_1=x_0+\frac{a}{\varepsilon}=3+\frac{9\sqrt{13}}{13}$, $x_2=x_0-\frac{a}{\varepsilon}=3-\frac{9\sqrt{13}}{13}$ (рис. 1.35)

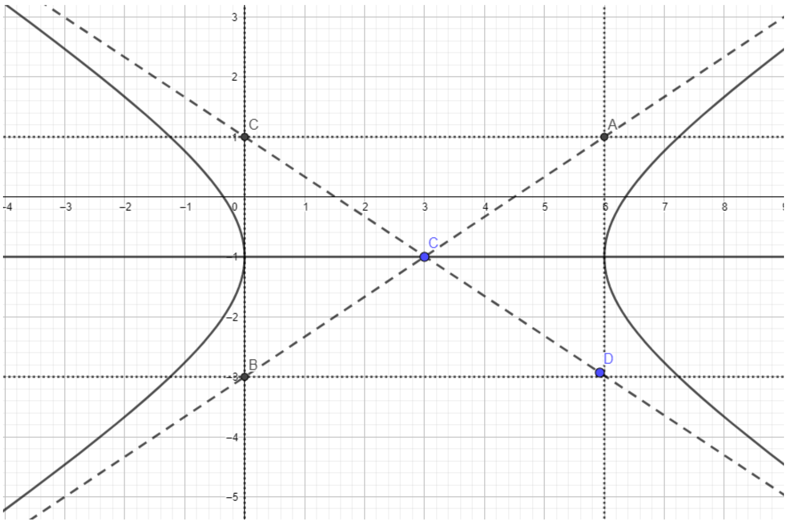


Рис. 1.35

Зауважимо, що параметричні рівняння гіперболи з центром у точці $(x_0; y_0)$ і півосями a та b мають вигляд $x = x_0 + a\,ch\,t$, $y = y_0 + b\,sh\,t$, $a > 0, b > 0, -\infty \le t \le +\infty$.

Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, відстань яких від фіксованої точки, що називається *фокусом*, дорівнює відстані від фіксованої прямої, яку називають *директрисою*.

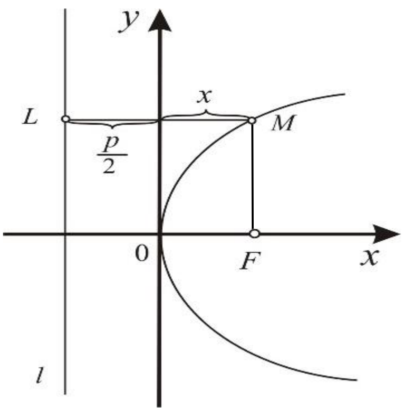


Рис. 1.36

Нехай F – фокус параболи, а пряма l – її директриса (рис. 1.36). Прямокутну декартову систему координат виберемо так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно до прямої l, а вісь Oy поділяла відрізок осі Ox між фокусом та директрисою навпіл. Відстань між фокусом та директрисою позначимо через p. Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння директриси визначається як $x = -\frac{p}{2}$.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що лежить на параболі, тоді відрізки ML і MF визначають відстані цієї точки від директриси і фокуса. За означенням параболи $ML = MF$ або

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Після спрощень одержимо *канонічне рівняння параболи*

$$y^2 = 2px. \qquad (1.17)$$

Оскільки рівняння (1.17) містить парний степінь змінної y, то парабола симетрична відносно осі Ox. Тому достатньо розглянути лише ту її вітку, яка лежить у верхній півплощині, де $y \geq 0$. Рівняння такої параболи має вигляд

$$y = \sqrt{2px}. \tag{1.18}$$

З рівняння (1.18) очевидно, що парабола розміщена справа від осі Oy (при $x < 0$ вираз (1.18) не має змісту). Парабола проходить через початок координат, оскільки координати точки $O(0;0)$ задовольняють рівняння (1.18). Із зростанням x значення y також зростає, тому рівняння (1.18) визначає монотонно зростаючу функцію.

Параболу (1.17) отримаємо при симетричному відображенні вітки параболи (1.18) відносно осі Ox (рис. 1.34).

Зауважимо, що рівняння вітки параболи при $y < 0$ має вигляд $y = -\sqrt{2px}$.

Вісь симетрії параболи називається її *віссю*; точка перетину осі з параболою – *вершиною* параболи; число p, яке дорівнює відстані фокуса від директриси, – *параметром* параболи.

Якщо в рівнянні (1.18) вважати $x = \dfrac{p}{2}$, то $y = \pm p$, тобто на параболі маємо дві точки $\left(\dfrac{p}{2}; p\right)$ і $\left(\dfrac{p}{2}; -p\right)$, симетричні відносно осі Ox. Відстань між цими точкам дорівнює $2p$ і збільшується із зростанням параметра p. Отже, параметр p характеризує „ширину” області, яку обмежує парабола.

Оскільки для параболи $ML = d$, де d – відстань точки параболи до директриси, а $MF = r$ – фокальний радіус точки параболи (рис. 1.36), то

$$\frac{r}{d} = e = 1,$$

тобто *ексцентриситет параболи дорівнює одиниці*.

Рівняння $y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py$, у яких параметр $p > 0$ визначають параболи, зображені на рис. 1.37.

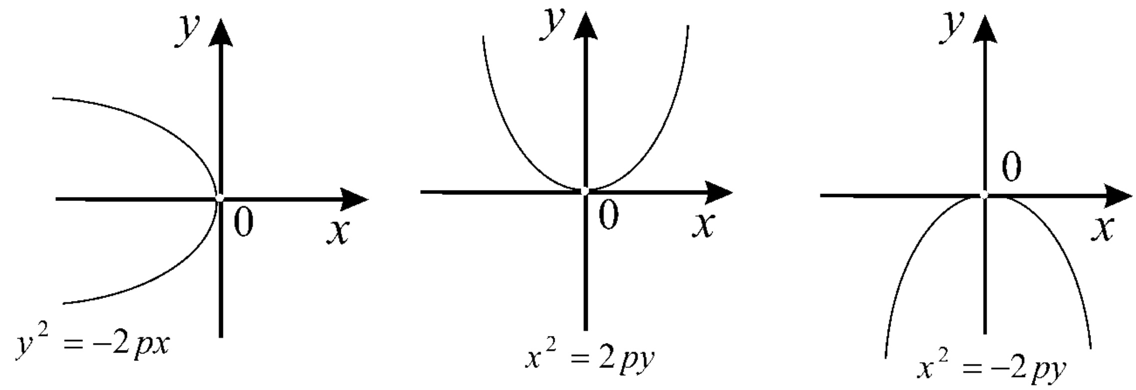


Рис. 1.37

Приклад. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо парабола симетрична відносно осі Ox і проходить через точку $(2,\ 4)$ та побудувати її.

Розв'язання. Оскільки точка належить параболі, то її координати задовольняють рівняння (1.17)

$$y^2 = 2px, \quad 16 = 2p\cdot 2,$$

звідки $p = 4$. Тоді шукане рівняння параболи:

$$y^2 = 8x.$$

Тоді координати фокуса шуканої параболи $F(2, 0)$, а її „ширина” $2p = 8$. Вершина параболи знаходиться в точці $O(0; 0)$, а вісь Ox є віссю симетрії. Будуємо параболу (рис. 1.38).

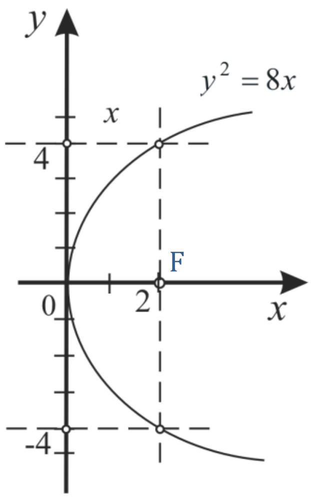


Рис. 1.38

Рівняння параболи з вершиною в точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

В цьому випадку фокус буде знаходитися у точці $F\ (x_0 + p/2; y_0)$.

Приклад. Побудувати параболу:

$$(y - 1)^2 = 4(x + 2).$$

Розв'язання. Маємо канонічне рівняння параболи з центром в точці C $(–2; 1)$. $2p = 4$, тоді $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$. Фокус знаходиться у точці $F\ (–1; 1)$.

Виконаємо побудову (рис. 1.39).

.

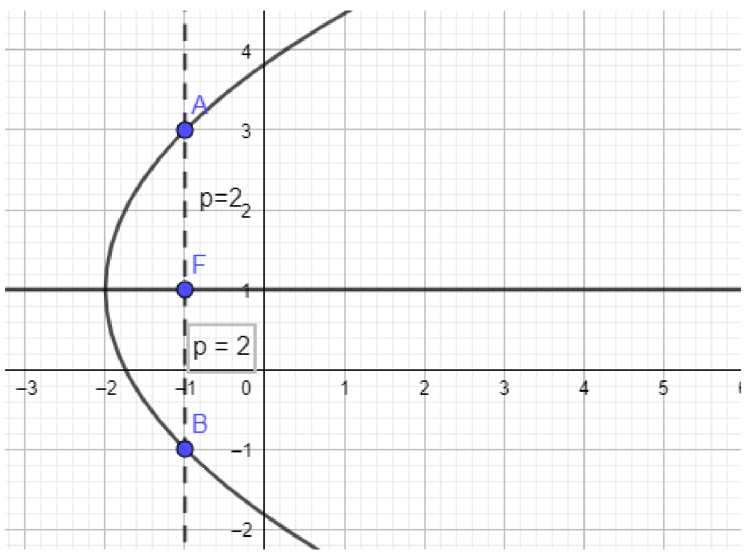


Рис. 1.39

Полярні рівняння кривих другого порядку

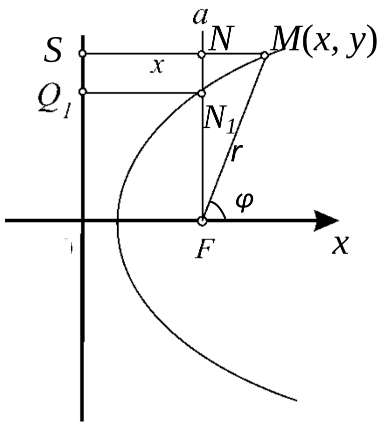


Рис.1.40

Для виведення полярного рівняння лінії другого порядку використаємо властивість точок ліній другого порядку: відношення віддалі від заданої точки (фокуса) до віддалі до заданої прямої (директриси) є величина стала і дорівнює ексцентриситету.

Виберемо полярну систему координат так, щоб полюс і фокус лінії другого порядку співпадали, а директриса була перпендикулярна до фокальної вісі (рис. 1.40).

Розглянемо точку M (x; y), яка належить лінії другого порядку. У полярній системі координат вона має координати M (r; φ). Тоді MS – відстань до відповідної директриси, $MS = a = SN + NM$.

Трикутник FNM – прямокутний, тоді $NM = r\cos\varphi$.

$SN = Q_1N_1$, тоді $\frac{N_1F}{N_1Q_1} = \varepsilon$, звідки $N_1Q_1 = \frac{p}{\varepsilon}$.

$$MS = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi,$$

Оскільки $\frac{FM}{MS} = \varepsilon$ і $FM = r$, то

$$\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi} = \varepsilon.$$

Звідки і маємо *загальне полярне рівняння* лінії еліпса, параболи або правої вітки гіперболи.

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \qquad (1.19)$$

При $0 < e < 1$ рівняння (1.19) визначає еліпс, при $e = 1$ – параболу, а при $e > 1$ – праву вітку гіперболи.

Зауважимо, що рівняння лівої вітки гіперболи в заданій полярній системі координат має вигляд

$$r = \frac{-p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Число p в полярних рівняннях називається *полярним параметром* ліній. Для еліпса і гіперболи $p = \frac{b^2}{a}$, а для параболи полярний параметр дорівнює параметру p її канонічного рівняння. Рівняння (1.19) застосовується в механіці.

Приклад. Дослідити, яку криву визначає рівняння $r=\dfrac{4}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$. Записати її канонічне рівняння.

Розв'язання. Оскільки $e=\sqrt{2}>1$, то дане рівняння визначає праву вітку гіперболи. Знайдемо її півосі.

$$p=4=\frac{b^2}{a};\quad b^2=4a;$$

$$\frac{c}{a}=e=\sqrt{2};\ \frac{c^2}{a^2}=2;\ \frac{a^2+b^2}{a^2}=2;\ 1+\frac{b^2}{a^2}=2;\quad \frac{b^2}{a^2}=1;$$

$$a^2=b^2=4a;\ a=4;\ b^2=16;\ b=4.$$

Тепер можна записати канонічне рівняння цієї гіперболи

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Приклад. Дослідити, яку криву визначає рівняння $r=\frac{2}{4-\cos\varphi}$. Записати її канонічне рівняння.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $r=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\cos\varphi}$

Оскільки $\varepsilon=\frac{1}{4}<1$, то дане рівняння визначає еліпс. Знайдемо його півосі.

$$\begin{cases}\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \varepsilon=\dfrac{1}{4},\end{cases}\begin{cases}\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{15}{16},\end{cases}\begin{cases}b^2=\dfrac{a}{2},\\ \dfrac{a}{2a^2}=\dfrac{15}{16},\end{cases}\begin{cases}b^2=\dfrac{a}{2},\\ a=\dfrac{8}{15},\end{cases}\begin{cases}b^2=\dfrac{4}{15},\\ a^2=\dfrac{64}{225}.\end{cases}$$

Тепер можна записати канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{\frac{64}{225}}+\frac{y^2}{\frac{4}{15}}=1.$$

5. Застосування аналітичної геометрії на площині до задач математичного аналізу

Знаходження області визначення функцій

Приклад. Знайти область визначення функції та зобразити її на координатній площині:

а) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

б) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$;

в) $z=\arccos\left(x+2y\right)$.

Розв'язання.

а) Даний вираз має зміст за умови одночасного виконання нерівностей $1-x^2\ge 0, 1-y^2\ge 0$. Областю визначення функції є множина точок площини $\left\{(x,y): x\in[-1;1],\ y\in[-1;1]\right\}$, яка зображена на рисунку 1.41.

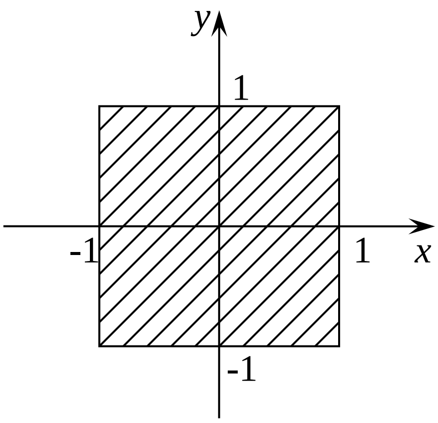


Рис. 1.41

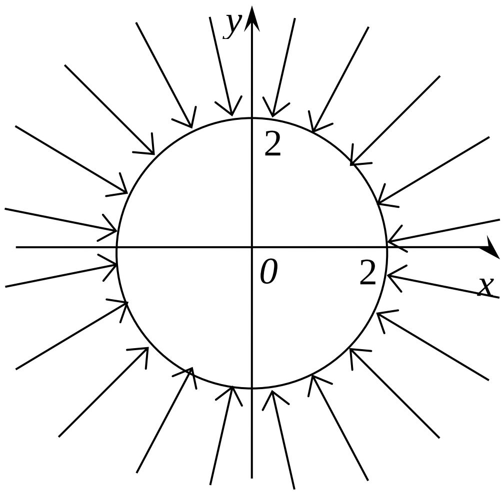


Рис. 1.42

б) Областю визначення даної функції є множина точок площини, що визначається нерівністю $x^2+y^2-4>0$, зображенням якої є вся площина, крім точок круга $x^2+y^2=4$ (рис. 1.42).

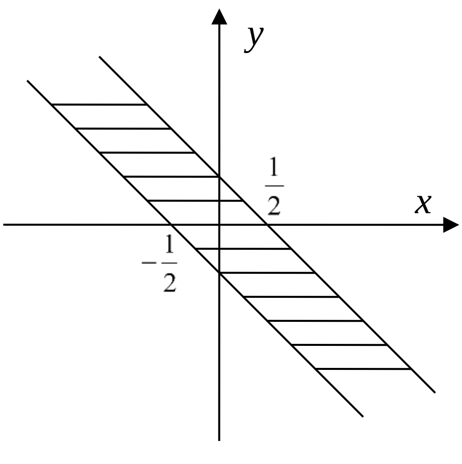


Рис. 1.43

в) З означення функції $z=\arccos\left(x+2y\right)$ маємо: $-1\le x+2y\le 1$. Звідси

$$\begin{cases} x+2y\ge -1 \\ x+2y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge -\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2} \\ y\le -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Отже, областю визначення є частина площини, яка обмежена знизу прямою $y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$, зверху – прямою $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$ (рис. 1.43).

Дотична та нормаль до плоскої кривої

Нехай рівняння $F(x,y)=0$ задає деяку криву на площині xOy, точка $M_0(x_0,y_0)$ належить цій кривій, функція $F(x,y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0,y_0)$. Рівняння дотичної та нормалі відповідно мають вигляд:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0), \quad k\neq 0,$$

де k – кутовий коефіцієнт дотичної.

Якщо $k=0$, то рівнянням нормалі є рівняння $x=x_0$.

Відомо, що $k=f'(x_0)=-\dfrac{F_x'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}$, де $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$, тоді рівняння дотичної і нормалі будуть відповідно:

$$y-y_0=-\frac{F_x'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}(x-x_0),$$

$$y-y_0=\frac{F_y'(x_0,y_0)}{F_x'(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

або

$$F_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0)(y-y_0)=0, \qquad (1.20)$$

$$F_y'(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x'(x_0,y_0)(y-y_0)=0. \qquad (1.21)$$

Ці рівняння визначають дотичну та нормаль до кривої $F(x,y)=0$ і у випадку, коли $F_y'(x_0,y_0)=0$, але $F_x'(x_0,y_0)\neq 0$.

Якщо $F_x'(x_0,y_0)=F_y'(x_0,y_0)=0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ є особливою, в цій точці рівняння (1.20), (1.21) втрачають зміст.

Приклад. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2y^2-3x+6y+11=0$ в точці $(1;-2)$.

Розв'язання. Знайдемо $F_x'(x_0,y_0)$ та $F_y'(x_0,y_0)$, де $(x_0,y_0)=(1;-2)$:

$F_x'(x,y)=2xy^2-3,\qquad F_y'(x,y)=2x^2y+6,$

$F_x'(1;-2)=5,\qquad F_y'(1;-2)=2.$

Рівняння дотичної має вигляд $5x+2y-1=0$, а рівняння нормалі – $2x-5y-12=0$.

Приклад. Дотична до графіка функції $y=\sqrt[3]{x}$ така, що абсциса t точки дотику належить відрізку $[0{,}5;1]$. При якому значенні t площа трикутника, обмеженого цією дотичною, віссю абсцис і вертикальною прямою $x=2$, буде найменшою і чому дорівнює ця площа?

Розв’язання. Складемо рівняння дотичної до графіка функції $y=\sqrt[3]{x}$ в точці з абсцисою t. Маємо:

$$y'(t)=\frac{2}{3\sqrt[3]{t}},$$

$$y-\sqrt[3]{t}=\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}(x-t) \text{ або } y=\frac{2x+t}{3\sqrt[3]{t}}.$$

Знайдемо координати точок A та B, як точок перетину з віссю Ox та з прямою $x=2$ відповідно (рис. 1.44).

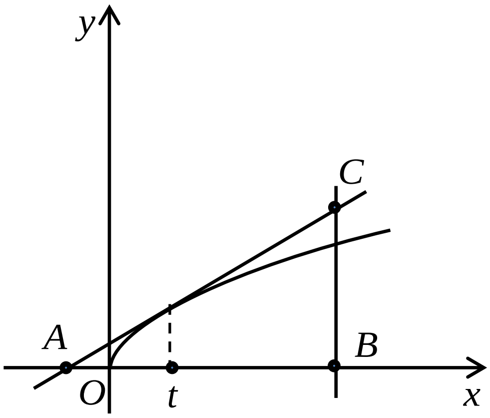


Рис. 1.44

$$A\colon y=0 \Rightarrow \frac{2x+t}{3\sqrt[3]{t}}=0 \Rightarrow x=-\frac{t}{2},$$

$$B\colon \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{2x+t}{3\sqrt[3]{t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{t+4}{3\sqrt[3]{t}} \end{cases}.$$

Отже, $A\left(-\frac{t}{2};0\right)$, $B\left(2;\frac{t+4}{3\sqrt[3]{t}}\right)$

Знайдемо довжини катетів BC і AC трикутника ABC. Очевидно, що $BC=\frac{t+4}{3\sqrt[3]{t}}$, а $AC=AO+OC=\frac{t}{2}+2=\frac{t+4}{2}$. Тому площу трикутника ABC знаходимо як $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{(t+4)^2}{12\sqrt[3]{t}}$.

За умовою задачі потрібно знайти її найменше значення, тому дослідимо отриману функцію на екстремум:

$$S'=\left(\frac{(t+4)^2}{12\sqrt[3]{t}}\right)'=\frac{(t+2)(5t-4)}{3\sqrt[3]{t^4}}.$$

Критичними точками є $t_1 = -2,\ t_2 = 0,\ t_3 = \frac{4}{5}$. Маємо, що площа трикутника ABC набуває свого мінімального значення в точці $t = \frac{4}{5}$, яка належить відрізку $[0{,}5;1]$, і воно дорівнює $S = \frac{48}{25}\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

Екстремальні задачі геометричного змісту

Приклад. Діагональ d осьового перерізу циліндра утворює з основою кут x. Для якого значення x циліндр має найбільший об'єм?

Розв'язання. Нехай осьовим перерізом циліндра буде прямокутник $ABCD$, в якого діагональ $AC=d$ утворює з основою $\angle DAC=x$ (рис. 1.45).

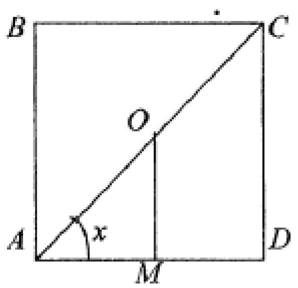


Рис. 1.45

Позначимо $AM=R, AB=H$. Об'єм циліндра: $V = \pi R^2 H$. Виразимо тепер R і H через d і x: $R = \frac{d}{2}\cos x$, $H=2\cdot OM=d\sin x$. Тоді об'єм циліндра запишемо в такому вигляді: $V = \frac{\pi}{4} d^3 \cos^2 x \sin x$.

Розглянемо функцію: $V(x) = \frac{\pi}{4} d^3 \cos^2 x \sin x$.

Знайдемо її похідну:

$$V'(x) = \frac{\pi}{4} d^3 \left(-2\cos x \sin^2 x + \cos^3 x\right) = \frac{\pi}{4} d^3 \left(3\cos^2 x - 2\right).$$

Оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то функція $V(x)$ має лише одну критичну точку, яка є для неї точкою максимуму.

Отже, об'єм циліндра при сталому d буде найбільшим, якщо кут нахилу діагоналі осьового перерізу до основи дорівнює $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Знайдемо значення об'єму циліндра для знайденого кута:

$$V(x) = \frac{\pi}{4} d^3 \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\pi d^3 \sqrt{3}}{18}.$$

Методи аналітичної геометрії на площині при розв'язуванні задач інтегрального числення

Обчислення подвійних інтегралів

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де область D обмежена лініями $x=2,\ y=x,\ xy=1$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують задану область інтегрування. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y=x \\ xy=1 \end{cases}$. Отримаємо точку $B(1,1)$.

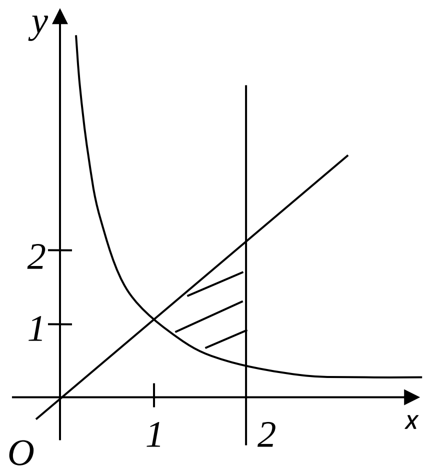


Рис. 1.46

Тоді область D (рис. 1.46) можна описати системою нерівностей так: $1 \le x \le 2,\ \frac{1}{x} \le y \le x$.

Переходимо до повторних інтегралів:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int\limits_1^2 dx\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x} = \int\limits_1^2 \left(-x+x^3\right)dx = \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, якщо $D=\{y=x,\ y=2-x,\ y=0\}$.

Розв'язання. Область D (рис. 1.47) можна описати системою нерівностей так: $0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2-y$. Переходимо до повторного інтегралу

$$\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} (x+y)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_y^{2-y} = \int\limits_0^1 \left(2-2y^2\right)dy =$$

$$= \left(2y - \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

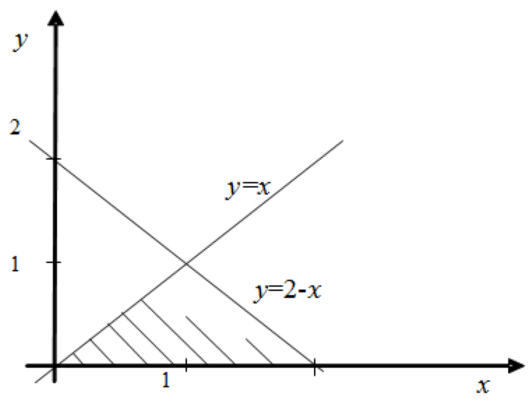


Рис.1.47

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$, якщо область D - квадрат, обмежений прямими $x+y=1,\ x-y=1,\ x+y=3,\ x-y=-1$.

Розв'язання. Покладемо $x+y=u,\ x-y=v$ або $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Обчислимо якобіан переходу $I=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0, |I|=\frac{1}{2}$. Область (E) можна описати системою нерівностей $E=\{1\le u\le 3,\ -1\le v\le 1\}$. Тоді за формулою заміни змінних маємо

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy=\frac{1}{2}\iint_E u^3v^2dudv=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\int_{-1}^1 v^2dv=\frac{20}{3}.$$

Приклад. Обчислити $\iint_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область (D) - частина кола $x^2+y^2\le a^2$, розташована в першій чверті.

Розв'язання. При переході до полярних координат отримаємо прямокутну область (E), що задається системою нерівностей $0\le\rho\le a,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Тому

$$\iint_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{(E)}\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta==\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2d\rho=\frac{\pi a^3}{6}.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x=4y-y^2,\ x+y=6$.

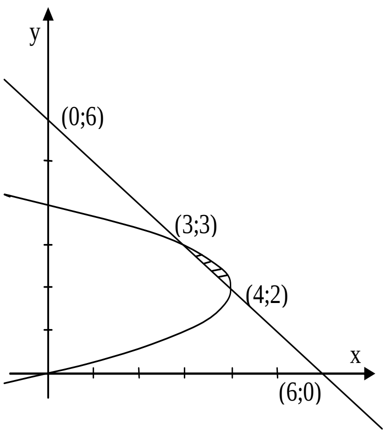


Рис. 1.48

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases}x=4y-y^2\\ x+y=6\end{cases}$. Маємо $A(4,2),\ B(3,3)$.

Область інтегрування D (рис.1.48) описується нерівностями $2\le y\le 3,\ 6-y\le x\le 4y-y^2$.

Тоді площа фігури обчислюється за формулою

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=$$

$$=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=\int_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\frac{1}{6}.$$

Приклад. Знайти площу поверхні P, якщо P - частина поверхні $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$.

Розв'язання. Очевидно, що областю інтегрування є область, обмежена контуром $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$. В даному випадку для обчислення площі поверхні зручно перейти до полярної системи координат, тоді областю інтегрування буде область $(D') = \left\{(\rho,\varphi) : \rho = \sqrt{\sin 2\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\right\}$. Побудуємо її, встановивши відповідність між ρ та φ за допомогою таблиці:

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	0,7	0,84	0,93	1	0,93	0,84	0

Дана крива зображена на рис. 1.49.

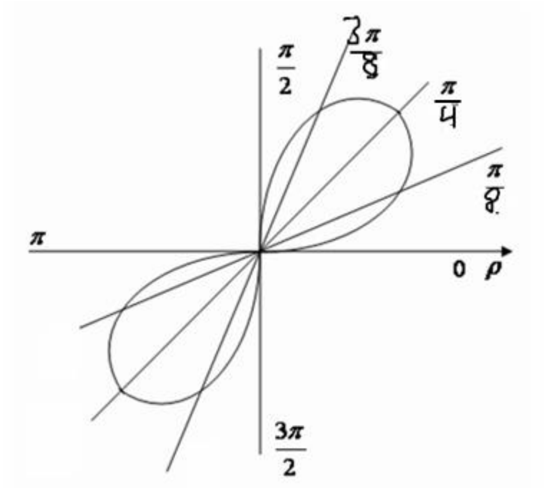


Рис. 1.49

Частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ дорівнюють: $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ та $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Очевидно, що дана область є симетричною відносно початку координат і променя $\varphi = \frac{\pi}{4}$, тоді

$$S = 4\iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = $$
$$= 4\sqrt{2}\iint\limits_{(D)} dxdy.$$

Перейдемо до полярної системи координат та отримаємо:

$$S = 4\sqrt{2}\iint\limits_{(D')} \rho d\rho d\varphi = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi = \sqrt{2} \text{ (кв. од.)}$$

Приклад. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ через повторні інтеграли із зовнішнім інтегруванням по змінній *x* і зовнішнім інтегруванням по змінній *y*, якщо область D задана лініями $y = \sqrt{4 - x^2}, x \ge 0, x = 1$ (рис. 1.50).

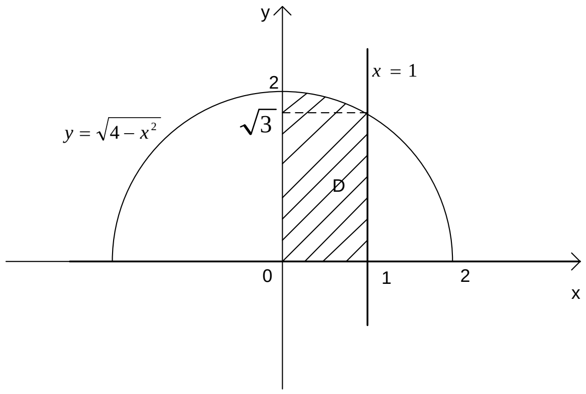


Рис. 1.50

Розв'язання. З умови очевидно, що $0 \le x \le 1$, а для змінної y маємо $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$. Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Для знаходження меж зовнішнього інтегрування по змінній y виразимо змінну x через y: $x = \sqrt{4-y^2}$.

Знайдемо точки перетину ліній $y = \sqrt{4-x^2}$ і $x = 1$: $y = \pm\sqrt{3}$. Очевидно, що $y = -\sqrt{3}$ не задовольняє умову. Тому відрізок прямої $y = \sqrt{3}$ розбиває область інтегрування на дві частини, перша з яких обмежена лініями $0 \le y \le \sqrt{3}$, $0 \le x \le 1$, а друга визначається нерівностями $\sqrt{3} \le y \le 2$, $0 \le x \le \sqrt{4-y^2}$. Отже, маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{3}} dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

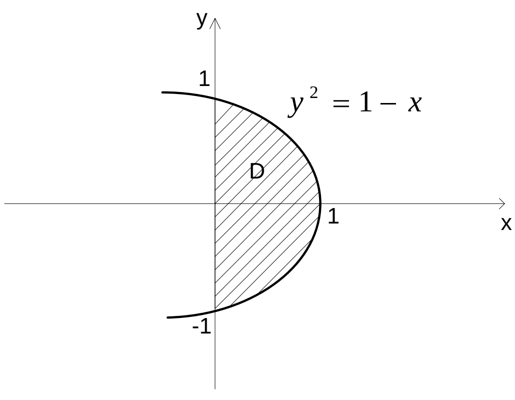


Рис. 1.51

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xy^3\,dxdy$ по області *D*, обмеженій лініями $y^2 = 1-x$, $x \ge 0$.

Розв'язання. Оскільки область *D* (рис. 1.51) симетрична відносно осі *Ox*, то:

$$\iint_D xy^3dxdy = 2\int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} xy^3dx = 2\int_0^1 \frac{x^2y^3}{2}\Bigg|_0^{1-y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^2y^3dy = \int_0^1 (1-2y^2+y^4)\,y^3dy =$$

$$= \int_0^1 (y^3-2y^5+y^7)\,dy = \left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y^6}{6} - \frac{y^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{5}{24}.$$

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D x^2ydxdy,$ де область інтегрування D обмежена параболою $y = 2 - x^2$ та прямими $y = \pm x$, $x \in [-1{,}1]$.

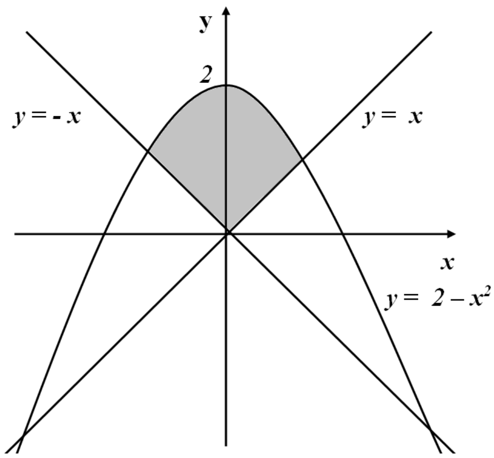


Рис. 1.52

Розв'язання. На рисунку область інтегрування D зафарбована сірим кольором (рис. 1.52). Виберемо послідовність інтегрування, коли внутрішнє інтегрування буде відбуватися по змінній y. Бачимо, що область інтегрування потрібно розбивати на дві частини віссю ординат, де перша частина обмежена лініями $-1 \le x \le 0,\ -x \le y \le 2 - x^2$, а друга визначається нерівностями $0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2 - x^2$.

Обчислимо подвійний інтеграл:

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_{-1}^0 x^2dx \int_{-x}^{2-x^2} ydy + \int_0^1 x^2dx \int_x^{2-x^2} ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(y^2 \Big|_{-x}^{2-x^2}\right)x^2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(y^2 \Big|_{x}^{2-x^2}\right)x^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}((2-x^2)^2 - x^2)x^2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}((2-x^2)^2 - x^2)x^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(4x^2 - 5x^4 + x^6)dx = \int_{0}^{1}(4x^2 - 5x^4 + x^6)dx =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} - x^5 + \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{21}$$

Зауваження. Вибір іншого порядку інтегрування є технічно рівноправним.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D dxdy$, де область D обмежена лінією $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4$.

Розв'язання. Оскільки аналітичний вираз містить $(x^2 + y^2)$, то доцільно перейти до полярної системи координат:

$$(r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi)^3 = a^2r^4cos^4\varphi;$$

$$r^6 = a^2r^4cos^4\varphi;$$

$$r^2 = a^2cos^4\varphi; \qquad r = acos^2\varphi.$$

Отже, рівняння лінії у полярних координатах має вигляд $r = acos^2\varphi$, а її ескіз зображено на рис. 1.53.

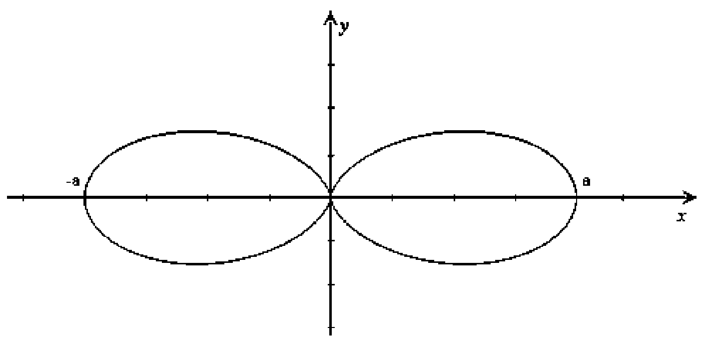


Рис. 1.53

Область, обмежена лінією, симетрична відносно осей Оx та Оy, тому

$$\iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_{D'} rdrd\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\,cos^2\varphi} rdr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\,cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\varphi d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+cos2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2cos2\varphi + cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\varphi d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4}sin2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4\varphi d\varphi = \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{a^2}{16}sin4\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{8} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

Розв'язання. Область D (рис. 1.54) визначається нерівностями

$$0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2},$$

тобто вона обмежена лініями

$$x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = \sqrt{4-x^2}.$$

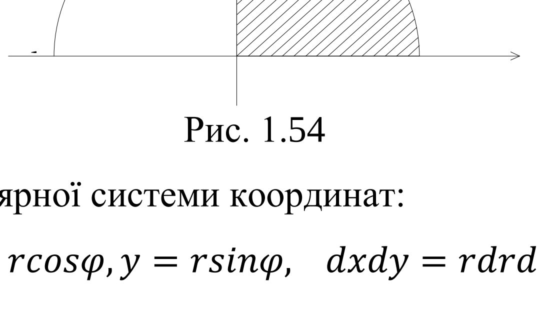


Рис. 1.54

Перейдемо до полярної системи координат:

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi, \quad dxdy = rdrd\varphi.$$

Маємо, що $0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, тоді

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{r^2 sin\varphi cos\varphi}{r} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^2 sin\varphi cos\varphi dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi cos\varphi \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right) d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi cos\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2\varphi d\varphi = -\frac{4}{3}\frac{cos2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}(1+1) = \frac{4}{3}.$$

Приклад. Обчислити статичний момент однорідної пластини D, обмеженої лініями $x^2+y^2+2ax=0$, $x^2+y^2+ax=0$, $y \ge 0$ відносно осі Ox.

Розв'язання.

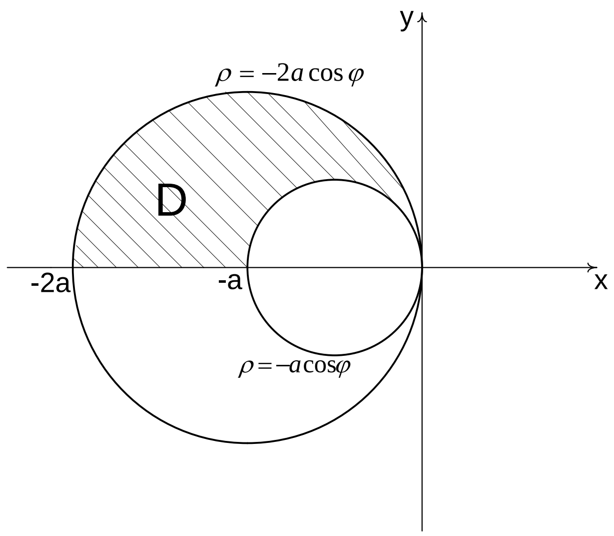


Рис. 1.55

Перейдемо до полярних координат:

$$x^2+y^2+2ax=0, \quad x^2+y^2+ax=0;$$

$$\rho^2 = -2a\rho cos\varphi, \quad \rho^2 = -a\rho cos\varphi,$$

$$\rho = -2acos\varphi, \qquad \rho = -acos\varphi.$$

Статичний момент відносно осі Ox даної пластини обчислюється за формулою $M_x = \iint_D y\mu(x,y)\,dxdy$.

У полярній системі координат область D (рис. 1.55) перетворюється на область D': $-acos\varphi \le \rho \le -2acos\varphi$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$. Отже, маємо:

$$M_x = \iint\limits_D \rho sin\varphi\, \rho\, d\varphi d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\varphi d\varphi \int\limits_{-a\cos\varphi}^{-2a\cos\varphi} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} \bigg|_{-a\cos\varphi}^{-2a\cos\varphi} \right) sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\varphi(-8a^3cos^3\varphi + a^3cos^3\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\varphi(-7a^3cos^3\varphi)\, d\varphi =$$

$$= -\frac{7a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\varphi\, cos^3\varphi d\varphi = \frac{7a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos^3\varphi d\,(cos\varphi) = \frac{7a^3}{3} \frac{cos^4\varphi}{4} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7a^3}{12}.$$

Обчислення криволінійних інтегралів

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y^2 ds$, де L - арка циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $x' = a(1 - \cos t),\ y' = a\sin t$ та диференціал дуги $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = a\sqrt{2}\sqrt{1 - cost}dt$. Отримаємо інтеграл

$$\int\limits_L y^2 ds = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}dt = \frac{256}{15}a^3.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} xydx + xdy$, де $\breve{AB}$ – крива $y = x^2$, що сполучає точки $A(0,0)$ і $B(1,1)$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\limits_{AB} xydx = \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}, \qquad \int\limits_{AB} xdy = \int\limits_0^1 \sqrt{y}dy = \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Тому $\int\limits_{AB} xydx + xdy = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання. Використаємо параметричне задання кола рівняннями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Маємо $dx = -R\sin tdt,\ dy = R\cos tdt,$ тоді

$$\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot \left(-R\sin t\right)}{R^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi .$$

Розділ 2. Застосування геометрії простору в задачах математичного аналізу

1. Системи координат у просторі

Декартова система координат

Розглянемо в просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 2.1). Сукупність точки O і базису називається *декартовою системою координат у просторі*. Точка O називається *початком координат*, а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються *осями координат*. Перша з них називається *віссю абсцис* і проходить у напрямі вектора $\vec{e}_1$, друга вісь проходить у напрямі вектора $\vec{e}_2$ – це *вісь ординат* і третя вісь – *вісь аплікат* – проходить у напрямі вектора $\vec{e}_3$. Площини, які проходять через ординатні осі, називаються *координатними площинами*.

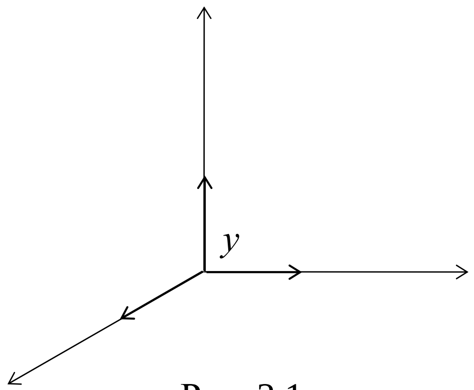


Рис. 2.1

Будь-якій точці M площини відповідає *радіус-вектор* $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець – з точкою M. За теоремою про розклад вектора за базисом існують такі дійсні числа x_1, x_2 і x_3, що $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

Координати x_1, x_2, x_3 радіус-вектора точки M відносно початку координат називаються *декартовими координатами точки M* в даній системі координат і це записують так: $M(x_1, x_2, x_3)$. Координата x_1 називається *абсцисою*, координата x_2 - *ординатою* і координата x_3 - *аплікатою* точки M.

Серед декартових координат у просторі широко використовується прямокутна декартова система координат.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом*. Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де

$$|\vec{i}\,| = |\vec{j}\,| = |\vec{k}\,| = 1,\ (\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{j}) = (\vec{j}\,\widehat{,}\,\vec{k}) = (\vec{k}\,\widehat{,}\,\vec{i}) = \frac{\pi}{2}.$$

Прямокутну систему координат (рис. 2) позначають $Oxyz$ (Ox - вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz - вісь аплікат), а координатні площини – Oxy, Oxz, Oyz. Вони поділяють простір на вісім октантів.

Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка простору M (рис. 2.2). Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки за теоремою про розклад вектора за базисом записують у вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad \text{або} \qquad \vec{r} = (x, y, z). \tag{2.1}$$

Числа x, y, z є *координатами точки* M, позначається $M(x, y, z)$.

З ортогональності базисних векторів системи *Oxyz* випливає, що координати точки *M* дорівнюють відповідним проекціям радіус-вектора цієї точки на осі координат, тобто

$$x = np_{Ox}\overrightarrow{OM},\ y = np_{Oy}\overrightarrow{OM},\ z = np_{Oz}\overrightarrow{OM}\ .$$

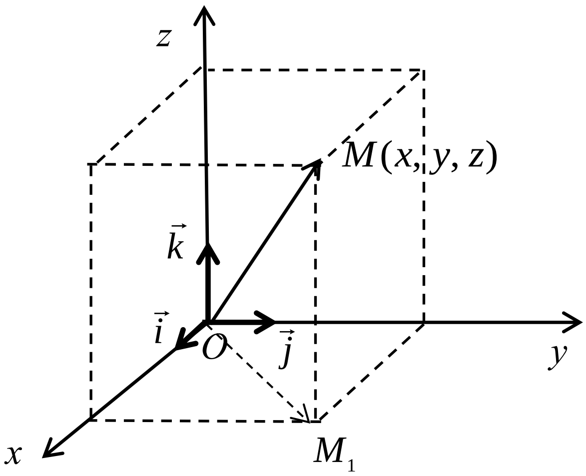


Рис. 2.2

Приклад. У прямокутній системі координат *Oxyz* побудувати точки $M(1, 2, 3)$, $M_1(-2, -3, -3)$.

Розв'язання. Побудову точок показано на рис. 2.3.

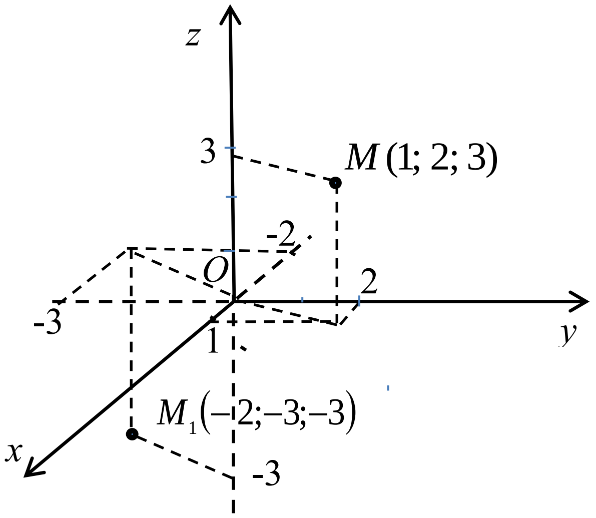


Рис. 2.3

Циліндрична система координат

Для побудови циліндричної системи координат потрібно в прямокутній системі координат *Oxyz* замість перших двох координат *x*, *y* взяти полярні координати ρ, φ, а третю координату *z* залишити без зміни (рис. 2.4).

Координати точки *M* простору в цій системі записують так: $M(\rho, \varphi, z)$.

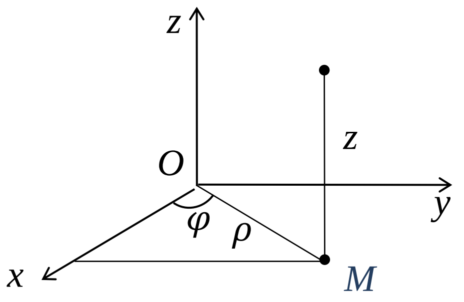


Рис. 2.4

Зв'язок між прямокутними координатами точки $M(x, y, z)$ і її циліндричними координатами $M(\rho, \varphi, z)$ виражаються формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi, \;\; z = z, \quad (2.2)$$

де $0 \le \rho < +\infty, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \;\; -\infty < z < +\infty$.

Сферична система координат

У прямокутній декартовій системі координат *Oxyz* візьмемо точку *M* і через цю точку і вісь *Oz* проведемо площину (рис. 2.5). Позначимо через *r* відстань від початку координат до точки *M*; φ - двогранний кут між координатною площиною *Oxz* і площиною, що проходить через вісь *Oz* і вектор *OM*; θ - кут між віссю *Oz* і вектором *OM*. Упорядкована трійка чисел

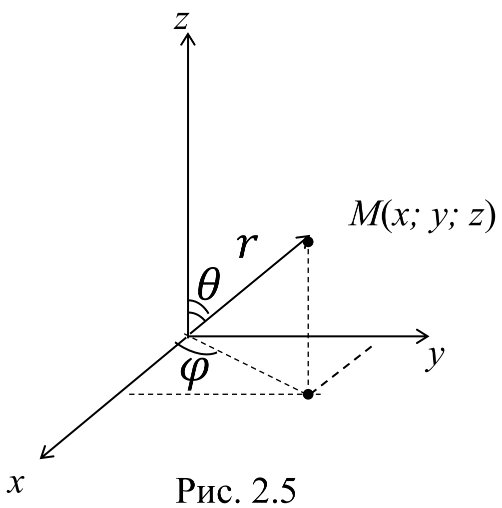


Рис. 2.5

(r, φ, θ) однозначно визначає положення точки *M* у просторі. Ці числа називаються *сферичними координатами точки M*.

З прямокутних трикутників *ONM* і *OPN* маємо:

$$z = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді зв'язок між прямокутними і сферичними координатами точки *M* виражається формулами:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \qquad (2.3)$$

де $0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi$.

З формул (2.3) маємо, що

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (2.4)$$

Приклад. Знайти сферичні координати точки за її прямокутними координатами $(1, 1, -\sqrt{2})$.

Розв'язання. За формулами (2.4) маємо:
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4} = 2$; $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, звідси $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Оскільки $tg\varphi = 1$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Отже, $r = 2, \quad \theta = \dfrac{3\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Поняття поверхні

Розглянемо співвідношення

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2.5)$$

між трьома змінними величинами x, y, z.

Упорядкована трійка чисел (x_0, y_0, z_0) у заданій прямокутній системі координат визначає точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

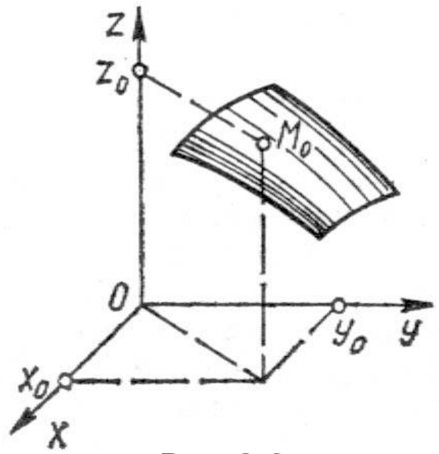


Рис. 2.6

Сукупність всіх розв'язків рівняння (2.5), які відповідають певним значенням x, y та z, визначає в просторі деяке геометричне місце точок $M(x, y, z)$, яке називається *поверхнею* (рис. 2.6), а рівняння (2.5) *рівнянням* цієї *поверхні*.

Отже, рівняння (2.5) називається *рівнянням поверхні* відносно заданої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати x, y, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

Якщо вираз $F(x, y, z)$ в рівнянні (2.5) є многочленом від x, y, z, тобто сумою скінченого числа одночленів виду $ax^k y^m z^p$ із сталими коефіцієнтами і невід'ємними цілими показниками k, m, p, то поверхня, яка задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною.* Степінь многочлена називається *порядком алгебраїчної поверхні.*

Поверхні, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними.*

Ми розглядатимемо лише алгебраїчні поверхні першого порядку та деякі другого порядку.

3. Площина. Різні види її рівняння

Площина в просторі геометрично може бути задана різними способами:

1) точкою та вектором, перпендикулярним до даної площини;

2) двома прямими, що перетинаються;

3) трьома точками, які не лежать на одній прямій.

Різним способам задання площини у прямокутній системі координат відповідають різні види її рівняння.

1) Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задана площина α (рис. 2.7) точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярним до цієї площини. Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ називається *нормальним вектором площини.* Візьмемо на площині точку $M(x, y, z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M}$. На площині α вектори $\vec{n} = (A, B, C)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

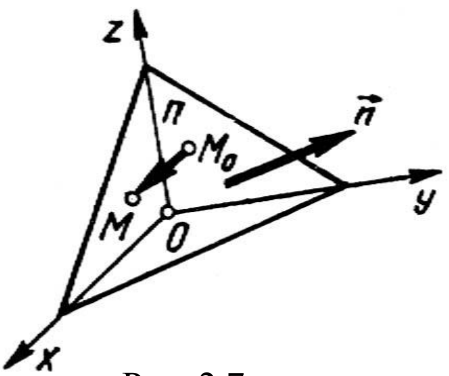


Рис. 2.7

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.6)$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.7)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Рівняння (2.6) називається *рівнянням площини,* яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, а рівняння (2.7) – *загальним рівнянням площини.*

Справедливе твердження: *будь-яка площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого степеня. Будь-яке рівняння першого степеня виду $Ax + By + Cz + D = 0$ з трьома змінними x, y, z задає в прямокутній системі координат $Oxyz$ площину.*

Дослідимо загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, тобто розглянемо окремі випадки розміщення площини в системі координат $Oxyz$ залежно від значень коефіцієнтів A, B, C і D.

1. Якщо коефіцієнти $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то маємо площину загального положення (рис. 2.8), тобто площину, яка перетинає всі три координатні осі.

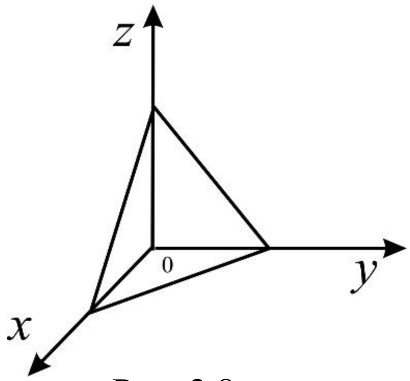


Рис. 2.8

2. Якщо в рівнянні (2.7) $D=0$, то воно має вигляд $Ax+By+Cz=0$. Це рівняння задовольняє точка $O(0,0,0)$. Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.

3. Якщо $A=0$, то рівняння (2.7) має вигляд $By+Cz+D=0$ і визначає площину, нормальний вектор $\vec{n}=(0,B,C)$ якої є перпендикулярним до осі Ox . Отже, якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, то таке рівняння визначає площину, що паралельна осі Ox (рис. 2.9, а).

Аналогічно, рівняння $Ax+By+C=0$ визначає площину, паралельну осі Oz (рис. 2.9, б), а рівняння $Ax+Cz+D=0$ – паралельну осі Oy (рис. 2.9, в).

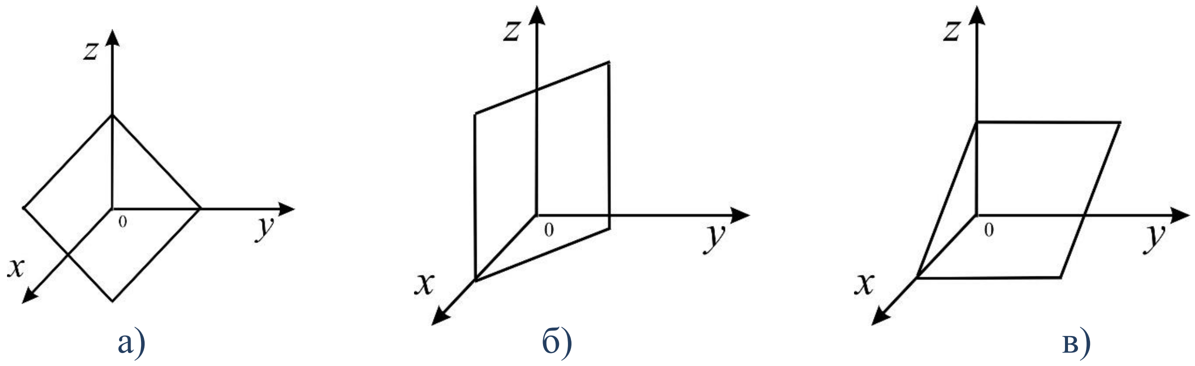


Рис. 2.9

4. Якщо $A=0, B=0, C\neq 0, D\neq 0$, то рівняння (2.7) має вигляд $Cz+D=0$ або $z=-\dfrac{D}{C}$. З випадку 3 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна осям Ox та Oy, тобто площину, паралельну площині Oxy (рис. 2.10). Аналогічно, площина $By+D=0$ паралельна площині Oxz, а площина $Ax+D=0$ паралельна площині Oyz.

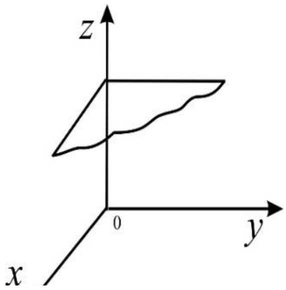


Рис. 2.10

5. Якщо в рівнянні (2.7) $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox. Справді, при $D = 0$ площина проходить через початок координат, а при $A = 0$ є паралельною осі Ox, отже, проходить через саму вісь Ox (рис. 2.11, а).

Аналогічно, площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy (рис. 2.11, б), а площина $Ax + By = 0$ - через вісь Oz (рис. 2.11, в).

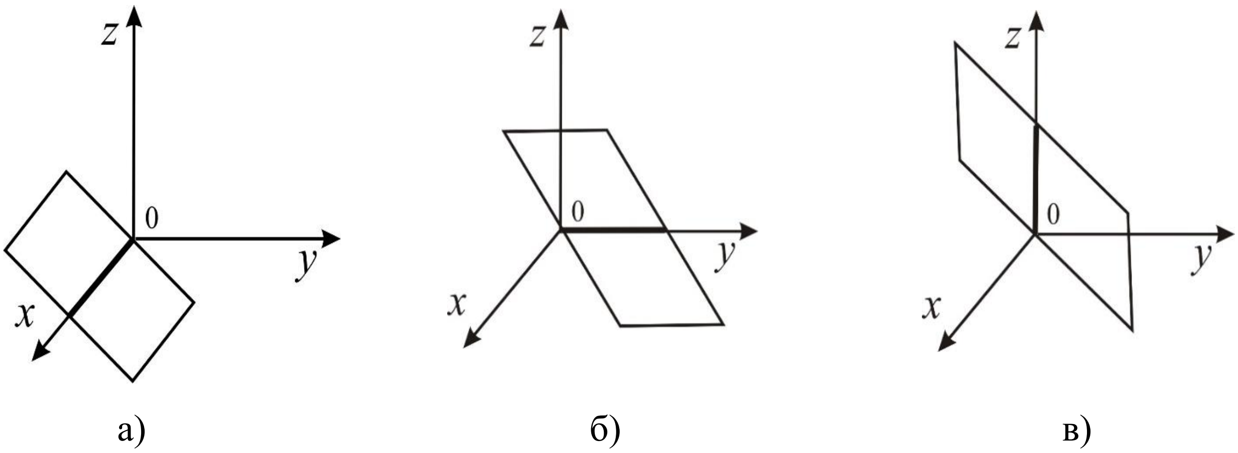


Рис. 2.11

6. Якщо в рівнянні (2.7) коефіцієнти $A = B = D = 0$, то площина $z = 0$

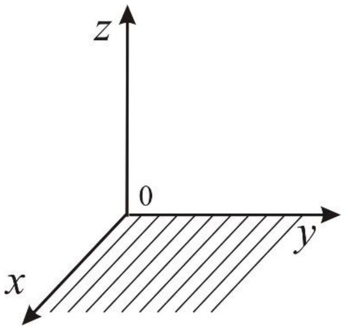


Рис. 2.12

збігається з площиною Oxy (рис. 2.12).

Відповідно, площина $x = 0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y = 0 -$ з площиною Oxz.

2) Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, і однозначно визначають цю площину. Складемо її рівняння. Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і знайдемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Ці вектори лежать в одній площині α, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) визначає *рівняння площини, що проходить через три задані точки*.

3) Розглянемо частинний випадок, коли площина перетинає координатні осі Ox, Oy, Oz відповідно в точках $A_1(a, 0,0)$, $A_2(0, b, 0)$, $A_3(0,0, c)$ (рис. 2.13). Підставимо координати цих точок у формулу (2,8), дістанемо

$$xbc + yac + zab - abc = 0$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.9)$$

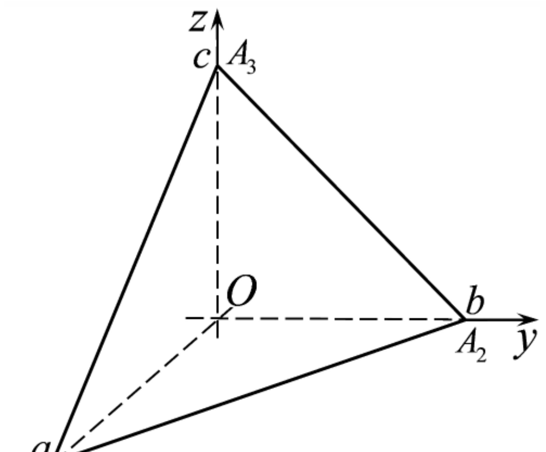


Рис. 2.13

Рівняння (2.9) називається рівнянням *площини у відрізках на осях*. Це рівняння зручно використовувати при побудові площини.

4) Нехай точка M є основою перпендикуляра, довжиною p, який опущено з точки $O(0; 0; 0)$ на площину (рис. 2.14). Тоді одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$

вектора $\overrightarrow{OM}$ має координати $\overrightarrow{p_0} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta\ ;\ \cos\gamma\}$, де $\cos\alpha;\ \cos\beta\ ;\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{p_0}$.

Розглянемо довільну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на площині і складемо вектор $\overrightarrow{OM_0} = \{x_0;\ y_0;\ z_0\}$. Помітимо, що вектор $\overrightarrow{MM_0}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OM}$. Тоді з прямокутного трикутника OMM_0 маємо:

$$p = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM_0}\right| \cos\angle MOM_0 = \left|\overrightarrow{OM_0}\right| \cdot \left|\overrightarrow{p_0}\right| \cdot \cos\angle MOM_0,$$

що є скалярним добутком векторів $\overrightarrow{p_0}$ та $\overrightarrow{OM_0}$. Тоді

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = p.$$

Оскільки точка M_0 є довільною точкою площини, то рівняння площини, яке має вигляд

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

називається *нормальним рівнянням* площини.

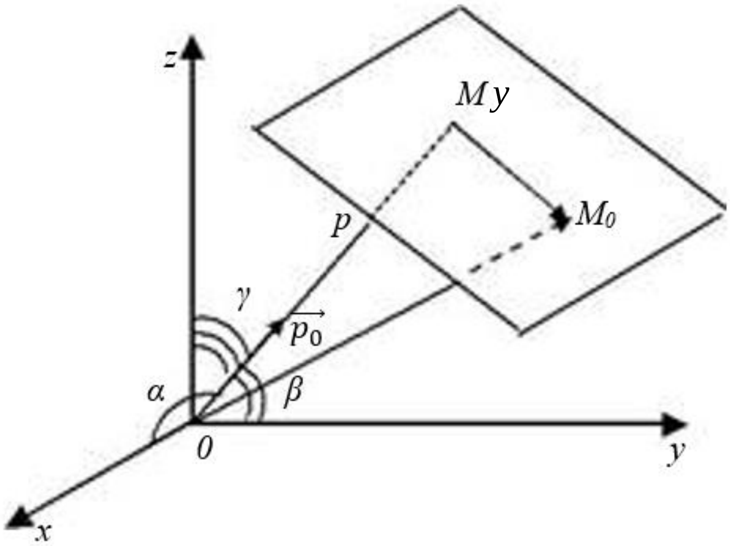


Рис. 2.14

Звернемо увагу, що для нормального рівняння мають виконуватися дві умови:

1) $p > 0$;
2) $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$

Щоб перейти від загального рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ до нормального рівняння, знайдемо нормуючий множник M. Якщо розглянути загальне рівняння площини, то нормальний вектор площини має координати $\vec{n} = (A; B; C)$. З нормального рівняння маємо такі координати нормального вектора площини $\overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta\ ;\ \cos\gamma\}$. Ці вектори є колінеарні, тоді

$$|\overrightarrow{n_0}| = \pm M \cdot |\vec{n}|,$$

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \pm M\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак множника M буде протилежним до знаку коефіцієнта D.

Узагальнимо відомості про різні види рівнянь площини у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Види рівнянь площини

№	Назва рівняння	Задання	Рівняння
1.	Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до вектора	точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
2.	Загальне рівняння площини	нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$	$Ax + By + Cz + D = 0$
3.	Рівняння площини, що проходить через три задані точки	трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
4.	Рівняння площини у відрізках на осях	точками перетину площини з координатними осями $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(0, b, 0)$, $A_3(0, 0, c)$.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
5.	Нормальне рівняння площини	кутами α, β, γ, який утворює перпендикуляр довжиною p, опущений з початку координат на площину	$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$

Приклад. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2, -1, 3)$ і перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1, 4)$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу (2.6). Одержимо шукане рівняння площини $3(x - 2) - (y + 1) + 4(z - 3) = 0$ або

$$3x - y + 4z - 19 = 0.$$

Приклад. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2,-1,1)$, $M_2(3,5,6)$, $M_3(-1,2,-1)$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу (3) одержуємо шукане рівняння площини

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3-2 & 5+1 & 6-1 \\ -1-2 & 2+1 & -1-1 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваємо визначник і одержуємо

$$-30x-13y+21z+16=0.$$

Приклад. Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у відрізках на осях: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1$, звідки $a=4, b=-6, c=3$ (рис. 2.15).

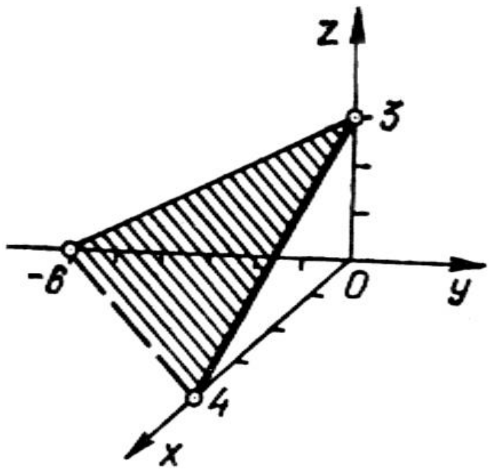


Рис. 2.15

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 (3; 4; –5) паралельно до двох векторів $\vec{a}_1\ (3;\ 1;-1)$ та $\vec{a}_2\ (1;\ -2;1)$.

Розв'язання. У шуканій площині розглянемо точку M (x; y; z). Тоді вектор $\overrightarrow{MM_1}=\{x-3; y-4; z+5\}$. Вектори $\overrightarrow{MM_1}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ є компланарними, тому їх мішаний добуток дорівнює 0. Таким чином, складемо рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Тоді загальне рівняння цієї площини $x+4y+7z+16=0$.

Приклад. Записати нормальне рівняння площини $2x+3y-z+12=0$.

Розв'язання. Запишемо нормуючий множник M:

$$M=-\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Помножимо загальне рівняння на нього і отримаємо нормальне рівняння площини:

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{12}{\sqrt{14}}=0.$$

Взаємне розташування площин у просторі

Площини в просторі можуть:

1) перетинатися під довільним кутом;
2) бути паралельними;
3) бути перпендикулярними.

Нехай дві площини α і β задано відповідними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

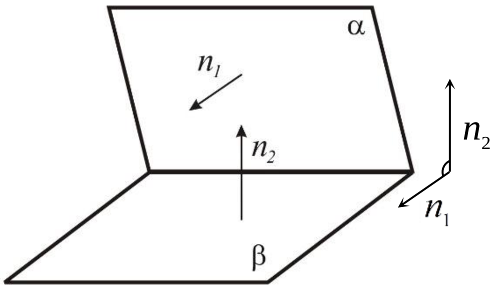


Рис. 2.16

1) Кут між двома площинами. Нехай $\varphi = (\alpha, \hat{\ } \beta)$– кут між площинами, $0 < \varphi < \pi$. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ цих площин (рис. 2.16). Отже, за формулою косинуса кута між векторами маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.10)$$

2) Умова паралельності площин. Якщо площини α і β паралельні, то координати їх нормальних векторів пропорційні, тобто *умовою паралельності площин* є рівність відношень відповідних коефіцієнтів:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.11)$$

3) Умови перпендикулярності площин. Якщо площини α і β перпендикулярні, то скалярний добуток їх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (2.12)$$

є умовою перпендикулярності площин.

Приклад. Знайти кут між площинами $2x + 2y + 1 = 0$ і $2x + y - 2z + 5 = 0$.

Розв'язання. За формулою (2.10) маємо

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $2x - y + 3z - 1 = 0$ і $x + 2y + z = 0$.

Розв'язання. Нехай нормальний вектор шуканої площини

$$\vec{n} = (A, B, C).$$

Нормальні вектори двох перпендикулярних площин за умовою

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 3) \text{ та } \vec{n}_2 = (1, 2, 1).$$

Тоді за формулою (2.12) маємо:

$$\begin{cases} 2A - B + 3C = 0, \\ A + 2B + C = 0. \end{cases}$$

Домножимо друге рівняння системи на (–2) і додамо обидва рівняння:

$$\begin{cases} C = 5B, \\ A = -7B. \end{cases}$$

Тоді нормальний вектор шуканої площини

$$\vec{n} = (-7B, B, 5B) \text{ або } \vec{n}' = (-7, 1, 5).$$

Оскільки площина проходить через точку O (0; 0; 0), то її рівняння

$$-7x + y + 5z = 0.$$

4. Різні види рівняння прямої в просторі

Пряма в просторі геометрично може бути задана різними способами:

1) *точкою і вектором, паралельним даній прямій (напрямним);*
2) *двома точками;*
3) *як перетин двох площин.*

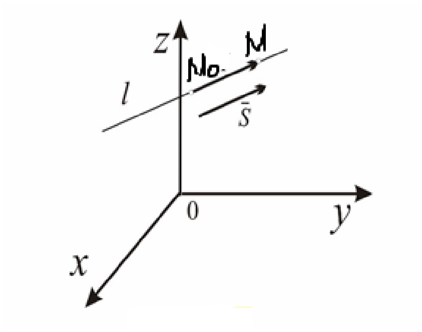


Рис. 2.17

1) Нехай у просторі в прямокутній системі координат пряму задано точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ цієї прямої (рис. 2.17) і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. З умови колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ запишемо *канонічне рівняння прямої в просторі:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2.13)$$

Параметричне рівняння прямої отримаємо з рівняння (2.13):

$$x = x_0 + mt, \; y = y_0 + nt, \; z = z_0 + pt. \qquad (2.14)$$

Зауважимо, що в цих рівняннях одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю.

Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння визначає пряму, перпендикулярну до цієї осі Ox. Аналогічно, рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осей Oy або Oz відповідно.

Якщо $m = 0, n = 0, p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox і осі Oy, тому таке рівняння визначає пряму, перпендикулярну до площини Oxy. Аналогічно, рівняння, в яких $n = p = 0$ або $m = p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до площин Oyz або Oxz відповідно.

2) Нехай у просторі в прямокутній системі координат задано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через які проведена пряма. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ цієї прямої. Очевидно, що вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ є колінеарними. Отже, *рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.15)$$

Зауваження. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ по суті є напрямним вектором для заданої прямої.

3) Нехай пряма у просторі задана перетином двох площин, визначених загальними рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.16)$$

де $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори цих площин, які є неколінеарними між собою. Рівняння (2.16) називається *загальним рівнянням прямої* в просторі.

Слід відмітити, що для переходу від загального рівняння прямої (2.16) до параметричного або канонічного рівнянь, потрібно знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$.

Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад, $x = x_0$ вважають відомою, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0 \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0. \end{cases}$$

Ця система матиме розв'язок за умови, що $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

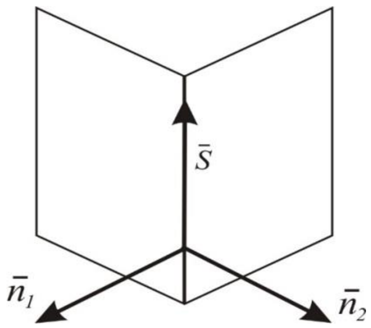


Рис. 2.18

Якщо ця умова порушується, то в системі (2.16) довільне значення надають змінній y або змінній z.

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ слід врахувати, що нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ даних площин є перпендикулярними до прямої їх перетину (рис. 2.18). Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їх векторний добуток

$$\vec{s} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

Узагальнимо відомості про різні види рівнянь площини у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Види рівнянь прямої у просторі

№	Назва рівняння	Задання	Рівняння
1.	Канонічне рівняння прямої	точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$
2.	Параметричне рівняння прямої	точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$	$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt$
3.	Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки	двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
4.	Пряма задана перетином двох площин	$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори цих площин	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$

Приклад. Записати рівняння прямої $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ у канонічному вигляді.

Розв'язання. Для знаходження точки M_0 на даній прямій покладемо $x = 0$. Тоді розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ -y + 3z = -5, \end{cases}$$

є $z = -2$, $y = -1$ і точка $M_0(0, -1, -2)$ належить даній прямій.

Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходимо за формулою (5):

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої має вигляд

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z+2}{-4} \quad \text{або} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+2}{-2}.$$

Відстань від точки до площини

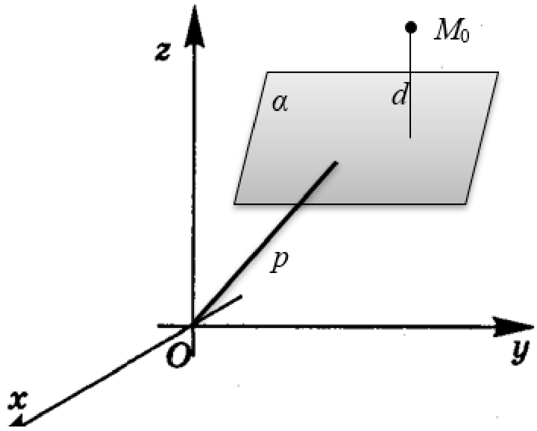


Рис. 2.19

Відхиленням δ точки M_0 (x_0; y_0; z_0) *від площини α* називається дійсне число, яке за абсолютною величиною дорівнює віддалі d від точки M_0 від площини α і взяте зі знаком «+», якщо точка M_0 і початок координат лежать по різні боки від площини α, і взяте зі знаком «–», якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від площини α (рис. 2.19).

Якщо маємо нормальне рівняння площини α, то відстань і відхилення точки M_0 (x_0; y_0; z_0) від площини α можна знайти за формулою

$$d = |\delta| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

Приклад. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z - 1 = 0$ та $2x - 2y + z + 5 = 0$. Обчислити об'єм цього куба.

Розв'язання. За умовою паралельності площин (6) маємо рівність відповідних коефіцієнтів у рівняннях площин, тому у заданих площинах лежать паралельні грані куба. Знайдемо відстань між ними.

Спочатку нормуємо задані загальні рівняння площин.

$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{3}$ – нормуючий множник для першої площини, тоді її нормальне рівняння $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0$.

$M_2 = -\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = -\frac{1}{3}$ – нормуючий множник для першої площини, тоді її нормальне рівняння $-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{5}{3} = 0$.

Знайдемо відстань від початку координат до цих площин:

$$d_1 = \left|\frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3},$$
$$d_2 = \left|-\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}.$$

Оскільки площини лежать по різні боки від початку координат, то відстань між ними $d = d_1 + d_2 = 2$. Отже, довжина ребра куба 2 лін.од., тоді об'єм куба $V = 8$ куб.од.

Відстань від точки до прямої

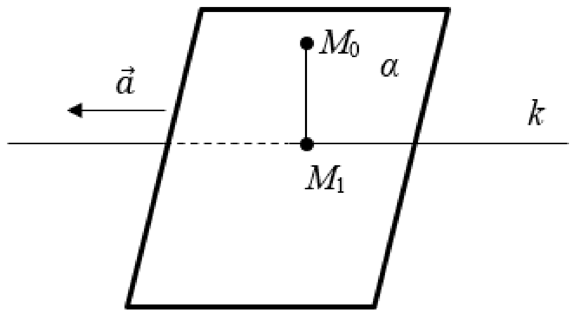


Рис. 2.20

Знайдемо відстань від точки M_0 (x_0; y_0; z_0) до прямої k. Для цього знайдемо точку перетину прямої k з перпендикулярною прямою M_0M_1. Тому слід записати рівняння площини α, яка визначатиметься точкою M_0 (x_0; y_0; z_0) та напрямним вектором $\vec{a}$ прямої k (рис. 2.20).

Приклад. Обчислити відстань від точки P (1; –1; –2) до прямої

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{a}\,(3; 2; -2)$. Цей же вектор є нормальним вектором площини, яка перпендикулярна до прямої і проходить через точку P. Запишемо рівняння цієї площини:

$$3(x-1) + 2(y+1) - 2(z+2) = 0,$$
$$3x + 2y - 2z - 5 = 0.$$

Надалі знайдемо координати точки перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z - 5 = 0, \\ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}. \end{cases}$$

Перейдемо від канонічного рівняння прямої до параметричного і розв'яжемо цю систему способом підстановки:

$$3(3t-3) + 2(2t-2) - 2(-2t+8) - 5 = 0,$$
$$17t = 34,$$
$$t = 2.$$

Тоді координати точки перетину прямої та площини P_1 (3; 2; 4).

Відстань від точки до прямої

$$PP_1 = \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+9+36} = 7 \text{ лін.од.}$$

5. Поверхні другого порядку

За типом перетворень простору (паралельне перенесення, гомотетія і поворот навколо фіксованої осі) розрізняють три класи поверхонь: циліндричні, конічні і поверхні обертання. Також окремо розрізняють такі поверхні: гіперболічний параболоїд (утворений рухом однієї параболи вздовж іншої), еліпсоїд, однопорожнинний гіперболоїд, двопорожниний гіперболоїд, еліптичний параболоїд.

Циліндричні поверхні

Циліндричною називається поверхня, що утворена переміщенням прямої (*твірної*) вздовж деякої заданої лінії (*напрямної*) паралельно заданому напряму.

Будемо розглядати циліндричні поверхні, напрямні яких є лініями другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола) та знаходяться в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, що перпендикулярна цій площині.

Нехай у площині Oxy міститься деяка лінія K, рівняння якої має вигляд:

$$F(x, y) = 0. \qquad (2.18)$$

Побудуємо циліндр з напрямною K і твірними, паралельними осі Oz.

Справедливе твердження: *рівняння циліндра з твірними, паралельними осі Oz, має вигляд* (2.18*), тобто не містить координати z.*

Аналогічно, рівняння $F(x,z)=0$ є рівнянням циліндра з твірними, паралельними осі Oy, а $F(y,z)=0$ є рівнянням циліндра з твірними, паралельними осі Ox.

Назва циліндра визначається назвою його напрямної. Так, якщо напрямною є еліпс у площині Oxy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2.19)$$

то відповідна йому циліндрична поверхня називається *еліптичним циліндром* (рис. 2.21). Рівняння цього еліптичного циліндра співпадає з рівнянням еліпса (2.19).

Частинним випадком еліптичного циліндра є *круговий циліндр*, заданий рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$.

Рівняння $y^2 = 2px$ визначає *параболічний циліндр* (рис 2.22), а рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *гіперболічний циліндр* (рис 2.23).

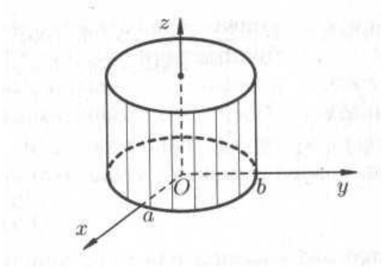


Рис. 2.21

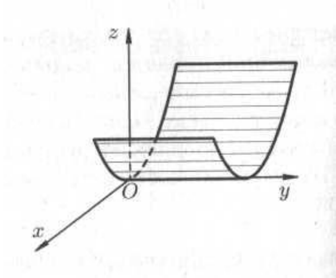


Рис. 2.22

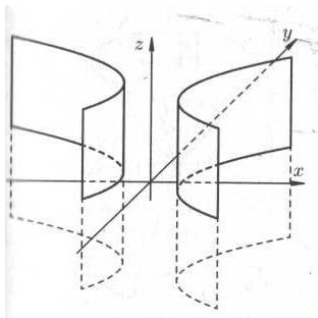


Рис. 2.23

Теорема. Будь-яке рівняння другого порядку з двома змінними в просторі задає циліндричну поверхню, якщо дане рівняння не можна розкласти на лінійні множники.

Приклад. Встановити вид поверхні та побудувати поверхню:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; 2) $y^2 = 2x$; 3) $\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=1$.

Розв'язання. 1) За видом рівняння встановлюємо, що це рівняння другого порядку з двома змінними в просторі та задає циліндричну поверхню – еліптичний циліндр. Оскільки це рівняння виду $F(x,z)=0$, то твірні цього циліндра є паралельними осі Oy. Тому для побудови цього еліптичного циліндра у координатній площині XOZ зображуємо еліпс (рис. 2.24, а), після цього через точки перетину еліпса з осями координат паралельно до осі Oy проводимо твірні (рис. 2.24, б). Для завершення побудови еліптичного циліндра зображуємо ще два еліпси, що знаходяться у площинах, паралельних до площини XOZ (рис. 2.24, в). Невидимі лінії зображуємо пунктиром.

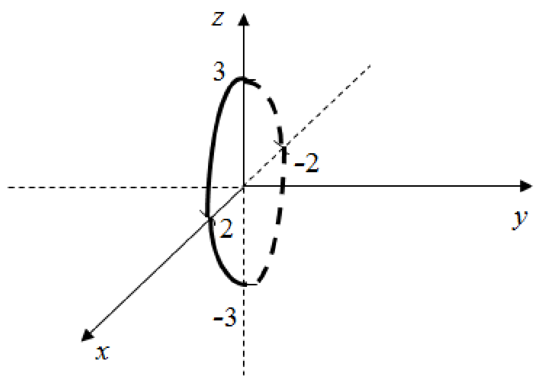


Рис. 2.24, а

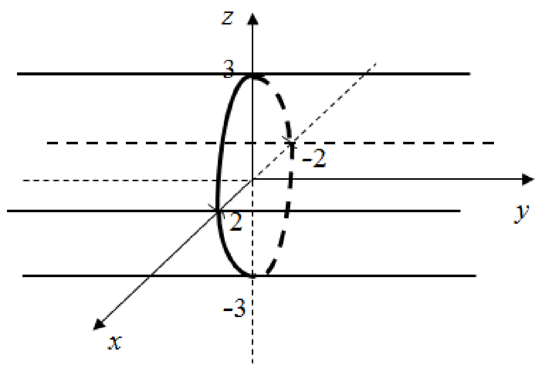


Рис. .2.24, б

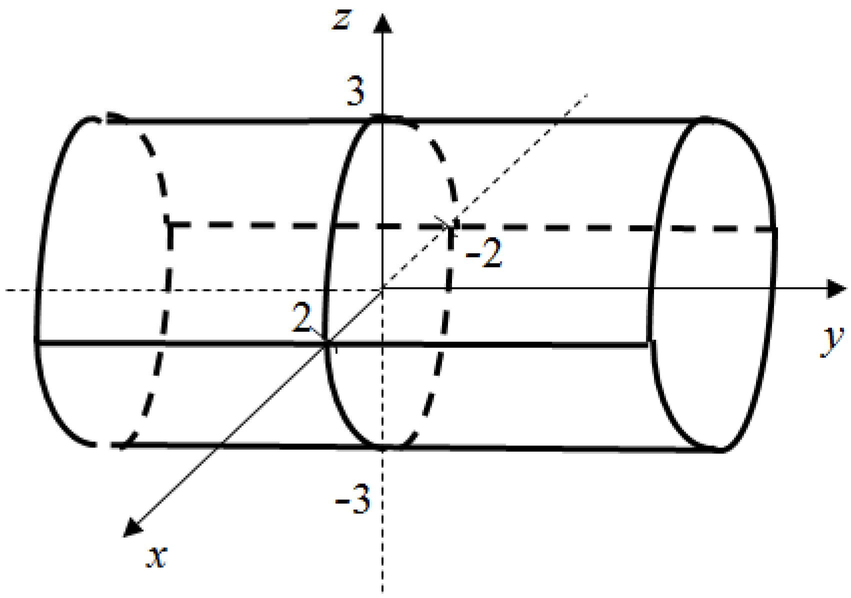


Рис. 2.24, в

У програмі GeoGebra побудова цього еліптичного циліндра виглядає так (рис. 2.25):

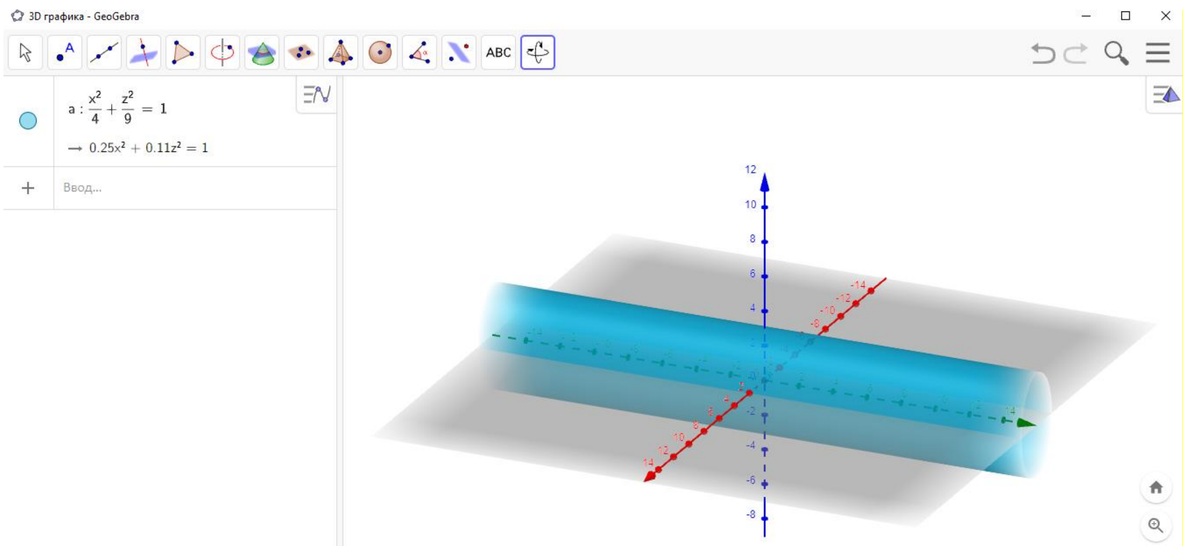


Рис. 2.25

2) За видом рівняння встановлюємо, що це рівняння другого порядку з двома змінними в просторі та задає циліндричну поверхню – параболічний циліндр. Оскільки це рівняння виду $F(x, y) = 0$, то твірні цього циліндра є паралельними осі Oz. Тому для побудови цього параболічного циліндра у координатній площині XOY зображуємо параболу з $p = 1$ (рис. 2.26, а), після цього через точки на вітках параболи та вершину параболи паралельно до осі

Oz проводимо твірні (рис. 2.26, б). Для завершення побудови параболічного циліндра зображуємо параболу, що знаходиться у площині, паралельній до площини *XOУ* (рис. 2.26, в). Невидимі лінії зображуємо пунктиром.

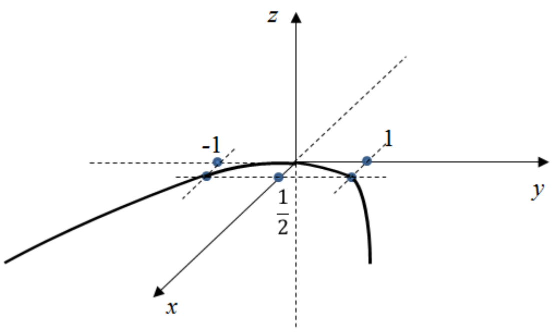


Рис. 2.26, а

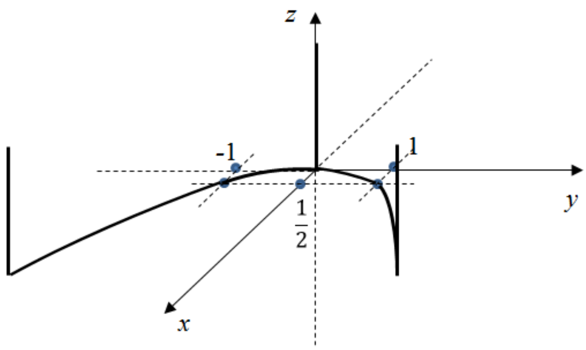


Рис.2.26, б

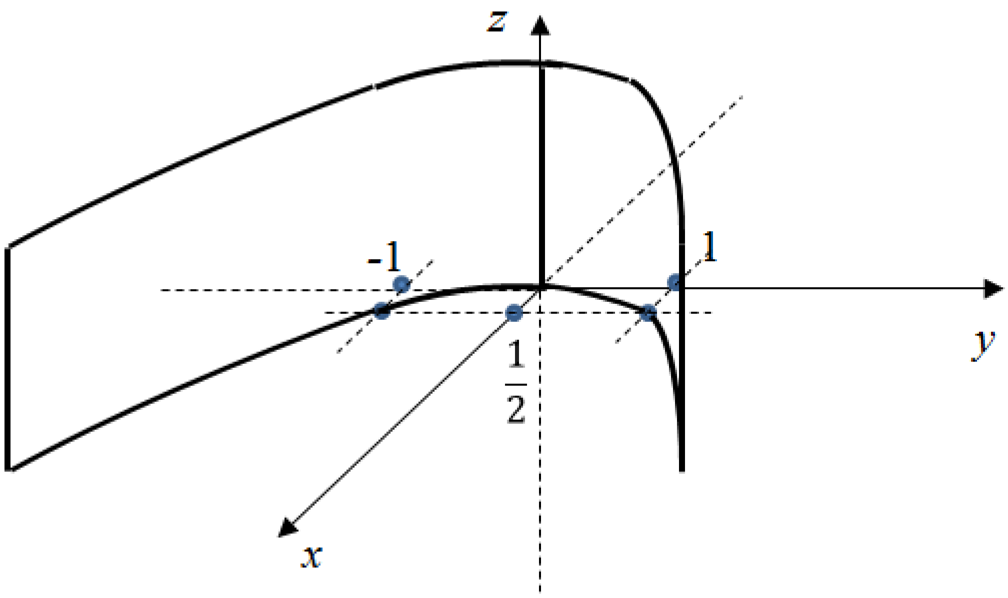


Рис. 2.26, в

У програмі GeoGebra побудова цього еліптичного циліндра виглядає так (рис. 2.27):

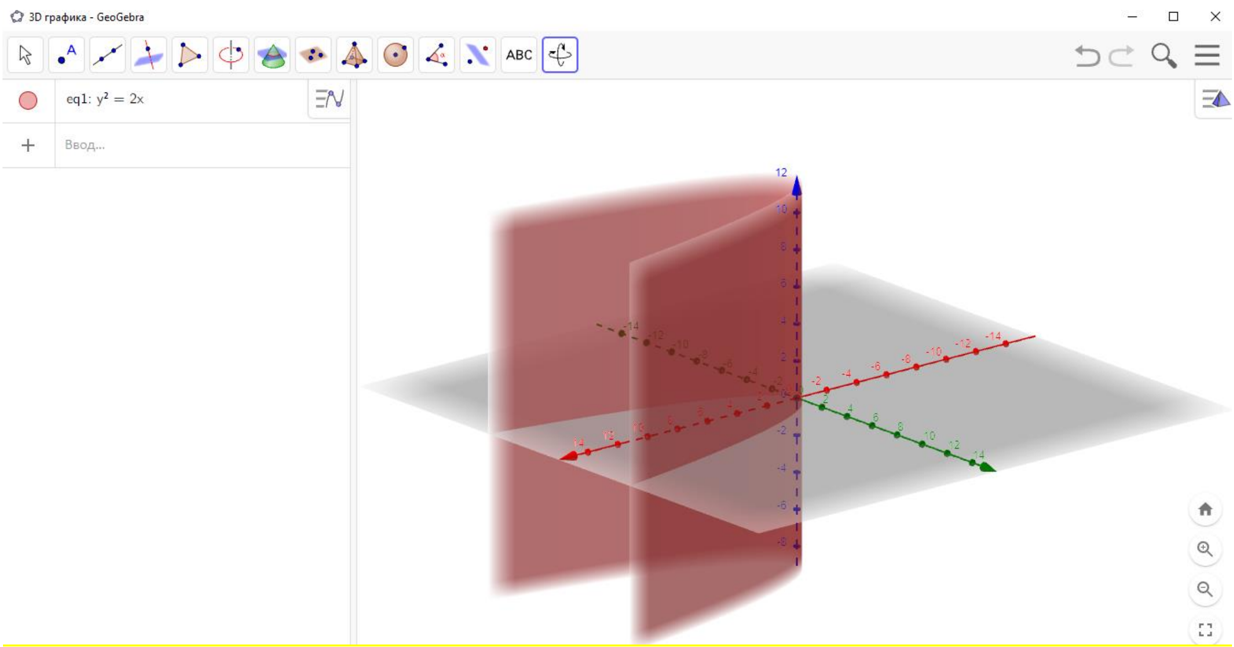


Рис. 2.27

3) За видом рівняння встановлюємо, що це рівняння другого порядку з двома змінними в просторі та задає циліндричну поверхню – гіперболічний циліндр. Оскільки це рівняння виду $F(y, z) = 0$, то твірні цього циліндра є паралельними осі Ox. Тому для побудови цього гіперболічного циліндра у координатній площині YOZ зображуємо гіперболу, при цьому для зручності побудови змінимо орієнтацію осей координат (рис. 2.28, а). Після цього через точки на вітках гіперболи та вершини гіперболи паралельно до осі Ox проводимо твірні (рис. 2.28, б). Для завершення побудови гіперболічного циліндра зображуємо гіперболу, що знаходиться у площині, паралельній до площини YOZ (рис. 2.28, в). Невидимі лінії зображуємо пунктиром.

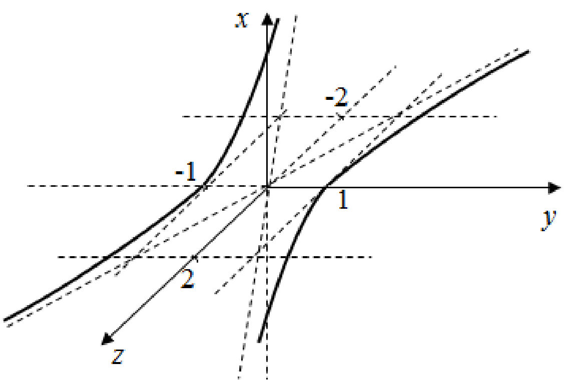


Рис. 2.28, а

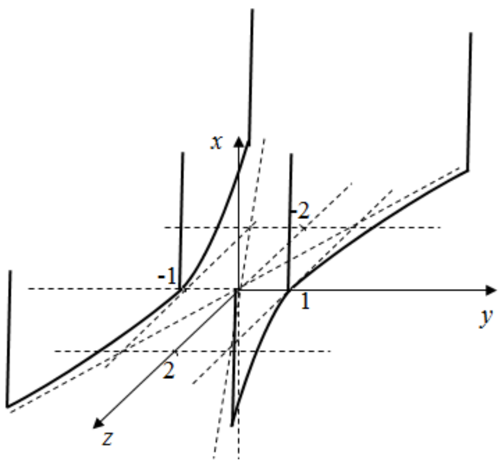


Рис. 2.28, б

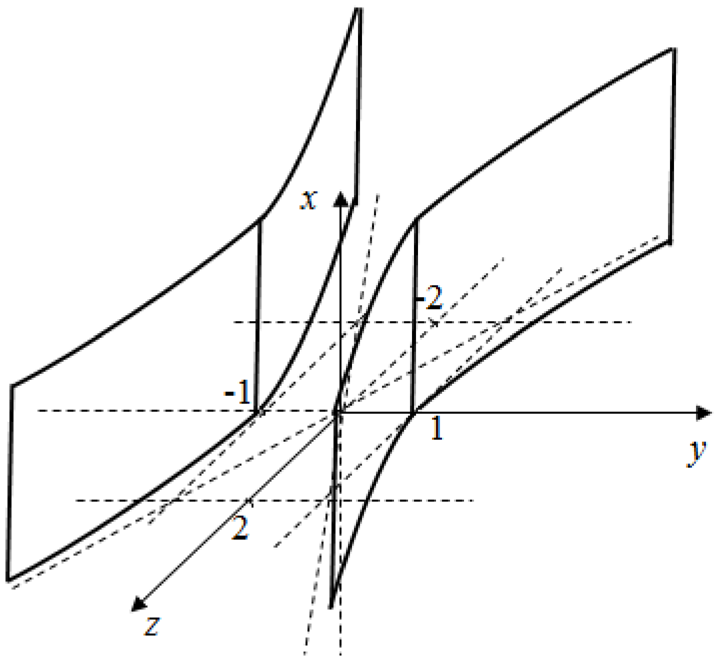


Рис. 2.28, в

Конічні поверхні

Поверхня, яка утворена прямими лініями, що проходять через задану точку P і перетинають задану плоску лінію L (яка не проходить через точку P), називається ***конічною поверхнею*** або ***конусом***. Лінія L називається ***напрямною конуса***, точка P – її ***вершиною***, а пряма, що описує поверхню – ***твірною***.

Нехай напрямна L задана рівняннями

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \qquad (2.20)$$

а точка P є вершиною конуса (рис. 2.29).

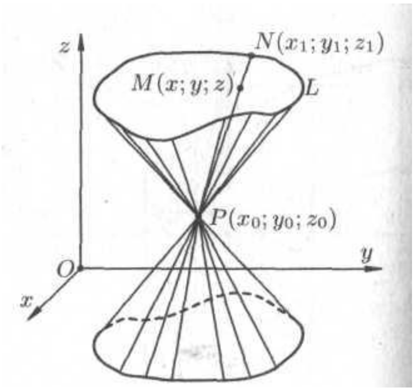


Рис. 2.29

Візьмемо на поверхні конуса будь-яку точку $M(x;y;z)$. Твірна, яка проходить через точки P і M перетинає напрямну L у деякій точці $N(x_1,y_1,z_1)$. Координати точки N задовольняють рівнянням (2.20) напрямної, тобто

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0, \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Канонічні рівняння твірних, що проходять через точки P і $\boldsymbol{N}$ мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{2.22}$$

Рівняння конічної поверхні отримаємо після виключення x_1,y_1 і z_1 з рівнянь (2.21) і (2.22). Наприклад, якщо вершина конуса розташована в точці $P(0,0,0)$, а напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який лежить у площині $z=c$, то рівняння напрямної і твірної відповідно мають вигляд $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$ та $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$. Виключаючи з них x_1,y_1 і z_1 з урахуванням того, що $z_1=c$, отримаємо рівняння конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Поверхні, що утворені рухом прямої, отримали назву ***лінійчатих***, а прямі, що їх складають, називаються ***прямолінійними твірними***. Серед поверхонь другого порядку лінійчатими є *циліндричні* і *конічні* поверхні, а також *однопорожнинний гіперболоїд* і *гіперболічний параболоїд*.

Поверхні обертання

Поверхня, яка утворена обертанням деякої плоскої кривої навколо фіксованої осі, що розташована в одній площині з кривою, називається ***поверхнею обертання***.

Нехай в площині *yOz* рівнянням

$$F(y,z)=0 \tag{2.23}$$

задано криву *L*, яка обертається навколо осі *Oz* (рис. 2.30).

Візьмемо на поверхні довільну точку *M*(*x*, *y*, *z*) . Проведемо через цю точку площину, перпендикулярну осі *Oz*, і позначимо точки перетину її з віссю *Oz* і кривою *L* відповідно через $O_1(0,0,z)$ і $N(0,y_1,z_1)$. Очевидно, що $z_1=z$.

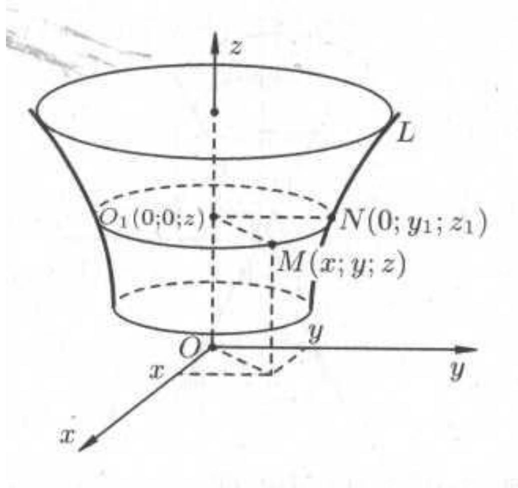


Рис. 2.30

Відрізки O_1M і O_1N є радіусами одного й того ж самого кола, тому $O_1M = O_1N$. Маємо, що $O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}$, $O_1N = |y_1|$, отже, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ або $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Точка N належить кривій L, тому її координати задовольняють рівняння (2.26). Виключаючи з нього координати y_1 і z_1 точки N, дістаємо шукане рівняння поверхні обертання

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \qquad (2.24)$$

Зрозуміло, що рівняння (2.24) можна отримати простою заміною y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, координата z при цьому не змінюється.

Аналогічно, якщо крива $F(x, y) = 0$ обертається навколо осі Oy, то рівняння поверхні обертання набуває вигляду:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0, \qquad (2.25)$$

а якщо крива розташована в площині xOy, то рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox, є

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0. \qquad (2.26)$$

Ці й інші можливі випадки наведені у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Рівняння кривої	***Вісь обертання***	***Рівняння поверхні обертання***
$F(x,y)=0$	Ox	$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
	Oy	$F\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y\right)=0$
$F(x,z)=0$	Ox	$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
	Oz	$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$
$F(y,z)=0$	Oy	$F\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$
	Oz	$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$

Так, наприклад, обертаючи пряму $y=z$ навколо осі Oz, отримаємо поверхню обертання $\pm\sqrt{x^2+y^2}=z$ або

$$x^2+y^2-z^2=0. \tag{2.27}$$

Ця поверхня називається ***круговим конусом другого порядку*** (рис. 2.31).

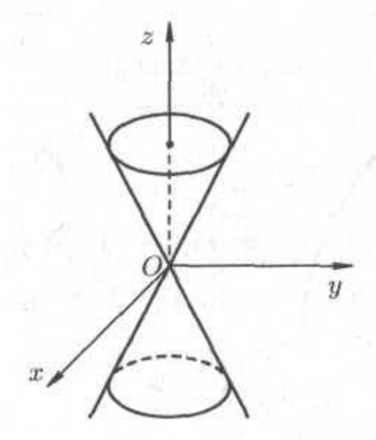


Рис. 2.31

Еліпсоїд

Еліпсоїдом (рис. 2.32) називається поверхня, яка в деякій системі декартових прямокутних координат задається рівнянням виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2.28}$$

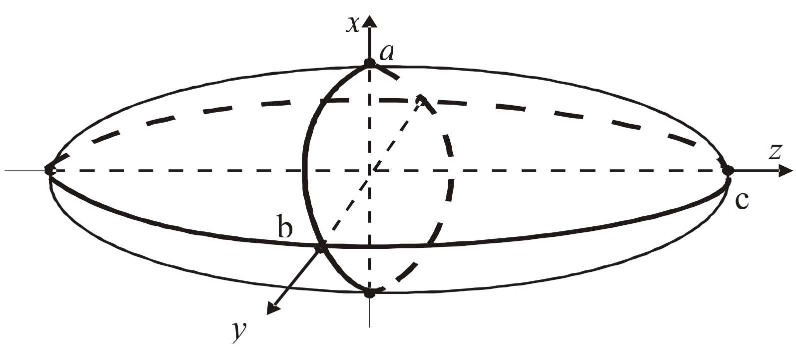


Рис. 2.32

Величини $2a$, $2b$, $2c$ (a, b, c) називаються *осями* (*напівосями*) еліпсоїда. Якщо $a = b = c$, то рівняння (2.28) перетворюється в рівняння *сфери*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \qquad (2.29)$$

Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожниним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі декартових прямокутних координат задається рівняннями виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (рис. 2.29, а)}, \qquad (2.30)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.31)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{(рис. 2.29, б)} \qquad (2.32)$$

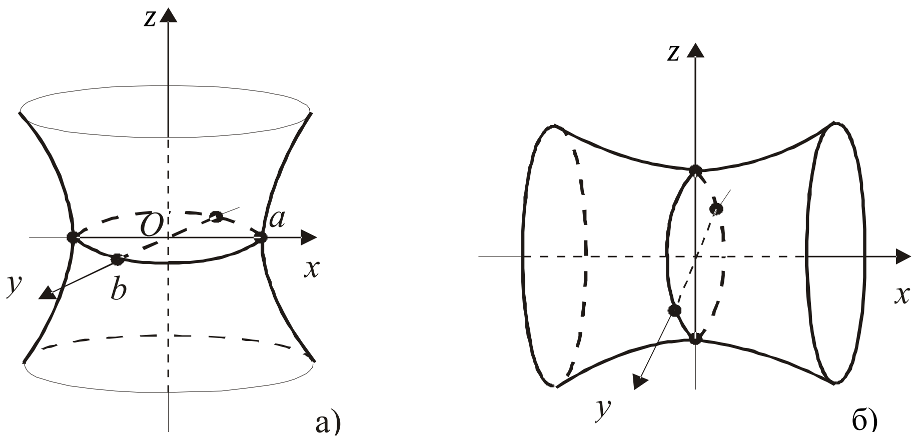


Рис. 2.33

Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожниним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі декартових прямокутних координат задається рівняннями виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.33)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (рис. 2.34, б)}, \qquad (2.34)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ (рис. 2.34, а)} \qquad (2.35)$$

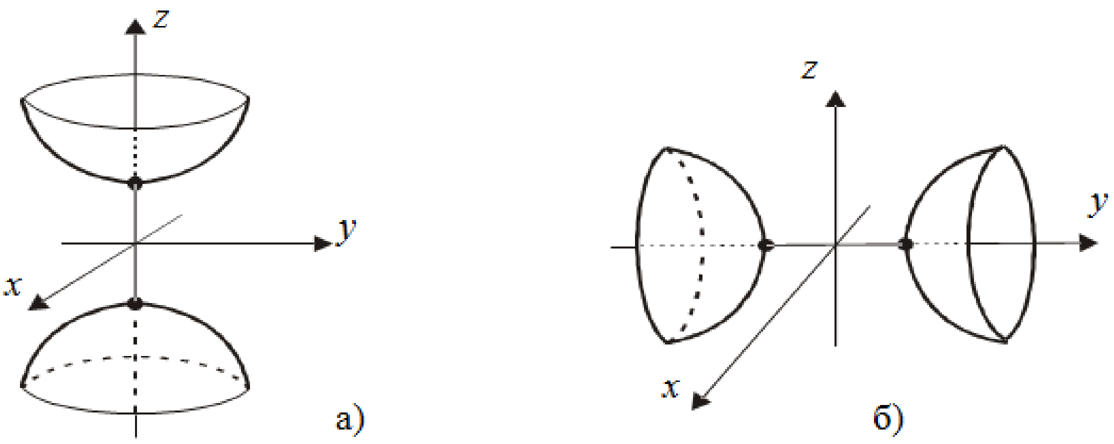


Рис. 2.34

Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі декартових прямокутних координат задається рівняннями виду

$$z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \quad pq > 0; \text{ (рис. 2.35, а)} \tag{2.36}$$

$$y = \frac{z^2}{p} + \frac{x^2}{q}, \quad pq > 0; \text{(рис. 2.35, б)} \tag{2.37}$$

$$x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}, \quad pq > 0. \tag{2.38}$$

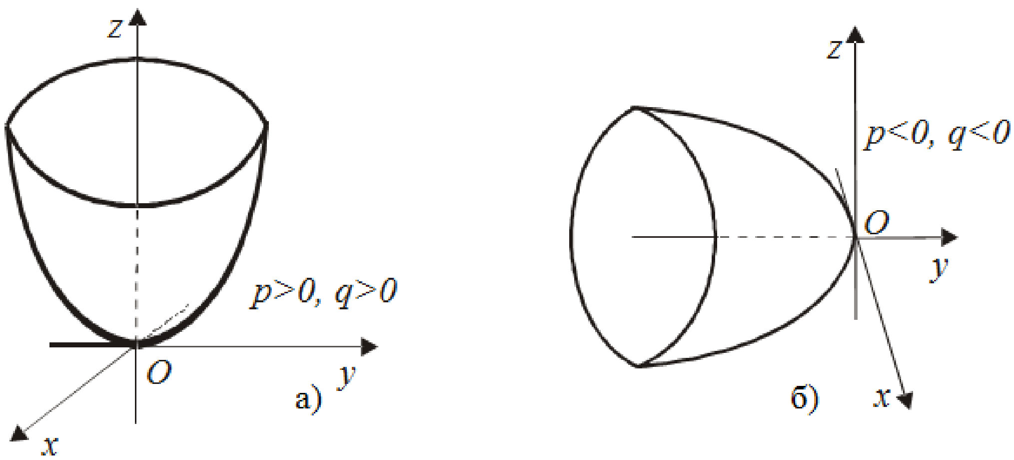


Рис. 2.35

Нерівність $pq > 0$ обумовлює те, що в кожному з рівнянь $p > 0$ $і$ $q > 0$ або $p < 0$ $і$ $q < 0$.

Гіперболічний параболоїд

Гіперболічний параболоїд може бути утворений в результаті руху параболи так, щоб її вершина «ковзала» по параболі, яка лежить у перпендикулярній координатній площині.

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням

$$z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \quad pq > 0; \text{ (рис.2.36)} \tag{2.39}$$

$$y = \frac{z^2}{p} - \frac{x^2}{q}, \quad pq > 0; \tag{2.40}$$

$$x = \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q}, \quad pq > 0. \tag{2.41}$$

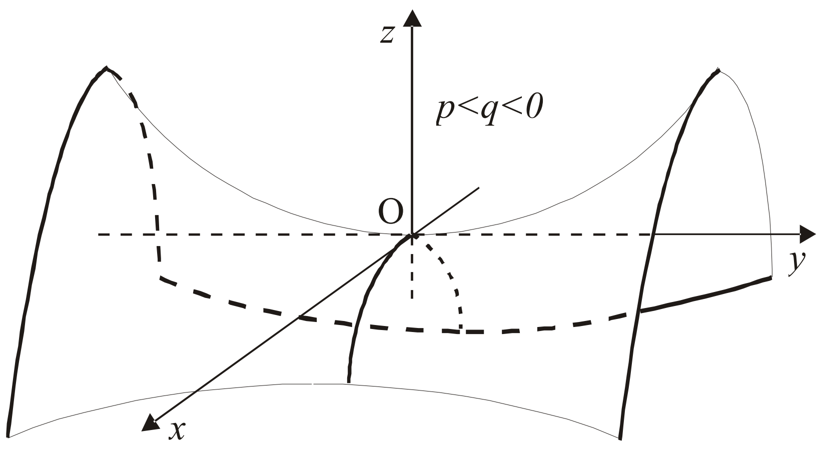


Рис. 2.36

Загальне рівняння алгебраїчної поверхні другого порядку

Алгебраїчною поверхнею другого порядку називається геометричне місце тих і тільки тих точок простору, координати яких у обраній прямокутній системі задовольняють загальному невиродженому алгебраїчному рівнянню другого степеня відносно змінних *x, y, z*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0\,, \tag{2.42}$$

де $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$.

Рівняння (2.42) називається *загальним рівнянням* алгебраїчної *поверхні другого порядку* (у подальшому просто поверхні другого порядку).

Зауважимо, що загальне рівняння поверхні другого порядку можна звести до канонічого вигляду, якщо виконати геометричні перетворення (поворот, рівномірний стиск, паралельне перенесення) та перейти до нової системи прямокутних декартових координат. Наприклад, рівняння виду $z = xy$ в новій системі прямокутних декартових координат визначає гіперболічний параболоїд, а рівняння виду $z^2 = xy$ визначає конус. Щоб переконатися в цьому, слід повернути вісі Ox та Oy на кут 45^0 проти годинникової стрілки, у новій системі прямокутних декартових координат отримаємо такі рівняння цих поверхонь $2z = x^2 - y^2$ та $2z^2 = x^2 - y^2$ відповідно.

Рівняння (2.42) може визначати так звану *вироджену поверхню* (порожню множину, точку, площину або пару площин). Зокрема, якщо його ліва частина може бути подана як добуток двох лінійних множників, тобто

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

то це рівняння визначає *пару площин*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{ та } \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Якщо ж поверхня другого порядку є *невиродженою*, то її рівняння можна привести до одного з найпростіших або *канонічних* виглядів.

Приклад. Визначити вигляд поверхні

$$4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 16x + 18y - 18z + 34 = 0.$$

Розв'язання. Доповнюючи члени з x, y, z до повних квадратів, приведемо це рівняння до вигляду

$$4(x - 2)^2 - 9(y - 1)^2 - 9(z + 1)^2 = -36.$$

Поділивши це рівняння на вільний член, отримаємо:

$$-\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{4} = 1.$$

А це і буде рівнянням однопорожнинного гіперболоїда обертання, центр якого знаходиться в точці O (2; 1; –1), а вісь обертання паралельна осі OX.

Приклад. Визначити вигляд поверхні

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння зведемо до вигляду

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 = 30.$$

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{15} = 1.$$

Маємо двопорожнинний гіперболоїд (триосний), вісь якої напрямлена вздовж осі OX.

Приклад. Визначити вигляд поверхні при всіх можливих значеннях параметра λ :

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda; \qquad 2)\ x^2 - y^2 - z^2 = \lambda.$$

Розв'язання. 1) Залежно від значень параметра λ маємо звести задане рівняння до канонічного вигляду рівняння однієї з поверхонь другого порядку.

Нехай $\lambda < 0$. Маємо, що сума квадратів змінних дорівнює від'ємному числу. Отже, отримуємо рівняння уявного еліпсоїда $\frac{x^2}{|\lambda|} + \frac{y^2}{|\lambda|} + \frac{z^2}{|\lambda|} = -1.$

Нехай $\lambda = 0$. Маємо $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, тобто сума квадратів змінних дорівнює нулю, що можливо, коли $x = y = z = 0$. Отримали рівняння початку координат O (0; 0; 0).

Нехай $\lambda > 0$. Маємо, що сума квадратів змінних дорівнює додатному числу. Отже, отримуємо рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1$.

2) Залежно від значень параметра λ маємо звести задане рівняння до канонічного вигляду рівняння однієї з поверхонь другого порядку.

Нехай $\lambda < 0$. Маємо рівняння однопорожниного гіперболоїда $-\frac{x^2}{|\lambda|} + \frac{y^2}{|\lambda|} + \frac{z^2}{|\lambda|} = 1$ з віссю Ox.

Нехай $\lambda = 0$. Маємо $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, або $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Це рівняння кругового конуса з віссю Ox.

Нехай $\lambda > 0$. Маємо рівняння двопорожниного гіперболоїда $\frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{\lambda} = 1$ з віссю Ox.

Дослідження поверхонь другого порядку методом паралельних перерізів

Одним з методів вивчення основних геометричних властивостей невироджених поверхонь другого порядку, тобто встановлення форми і розташування поверхні за її рівнянням, є ***метод паралельних перерізів***. Суть методу полягає в тому, що поверхні перетинаються площинами, паралельними координатним площинам, а потім за виглядом і властивостями отриманих у перерізах ліній другого можна зробити висновок про форму і властивості самої поверхні. Проілюструємо застосування цього метода на прикладі.

Приклад. Дослідити поверхню, що задана рівнянням $9x^2 + 4y^2 - 72z = 0$.

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у канонічному вигляді

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = z. \qquad (2.43)$$

За видом рівняння встановлюємо, що ця поверхня еліптичний параболоїд, віссю якого є вісь Oz.

Перетнемо цю поверхню площинами $z = h$, паралельними координатній площині xOy. В кожному перерізі отримаємо лінію, рівняння якої є

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

а) Якщо $h < 0$, то площини $z = h$ поверхню не перетинають.

б) Якщо $h = 0$, то площина $z = 0$ дотикається даної поверхні у точці (0,0,0).

в) Якщо $h > 0$, то в перерізі маємо еліпс, рівняння якого можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8h} + \dfrac{y^2}{18h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Очевидно, що його напіввісі зростають із зростанням h.

При перерізі поверхні (2.43) координатними площинами xOz і yOz отримаємо відповідно параболи $z = \dfrac{x^2}{8}$ і $z = \dfrac{y^2}{18}$.

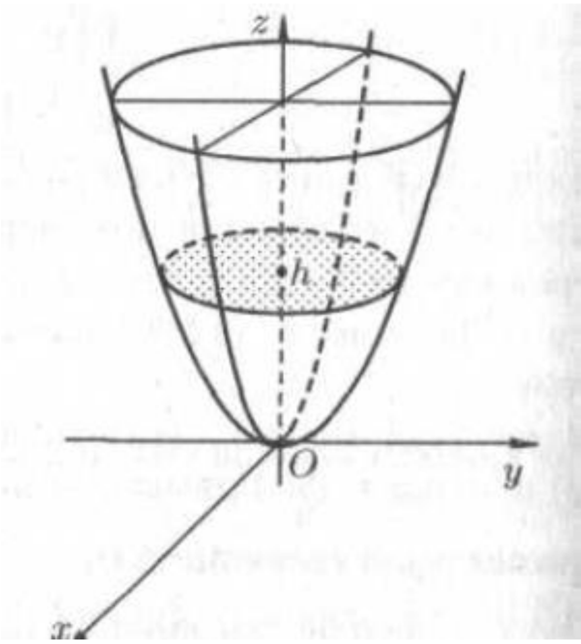


Рис. 2.37

Отже, поверхня, що визначається рівнянням (2.43), є *еліптичним параболоїдом* і має вигляд опуклої нескінченної чаші, що розширюється (рис. 2.37).

Приклад. Побудувати поверхню $x^2 + y^2 = 8 - z$.

Розв'язання. Аналізуємо структуру рівняння: у лівій частині рівності маємо суму квадратів двох змінних, а у правій частині рівності маємо змінну у першому степені. Тому це рівняння задає еліптичний параболоїд з віссю Oz. Знак «–» перед змінною z та вільний доданок означають, що вершина еліптичного параболоїда знаходиться не у початку координат, а зміщена у точку (0; 0; 8), поверхня розташована уздовж від'ємної піввісі Oz (рис.2.38).

Виконаємо дослідження та побудову поверхні за допомогою методу перерізів.

1) Перетинаємо поверхню координатною площиною XOY: $z = 0$.

У цій площині маємо коло $x^2 + y^2 = 8$, або $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} = 1$.

2) Перетинаємо поверхню координатною площиною XOZ: $y = 0$.

У цій площині маємо параболу $x^2 = 8 - z$, або $x^2 = -(z - 8)$ з параметром $p = \frac{1}{2}$.

3) Перетинаємо поверхню координатною площиною YOZ: $x = 0$.

У цій площині маємо параболу $y^2 = 8 - z$, або $y^2 = -(z - 8)$ з параметром $p = \frac{1}{2}$.

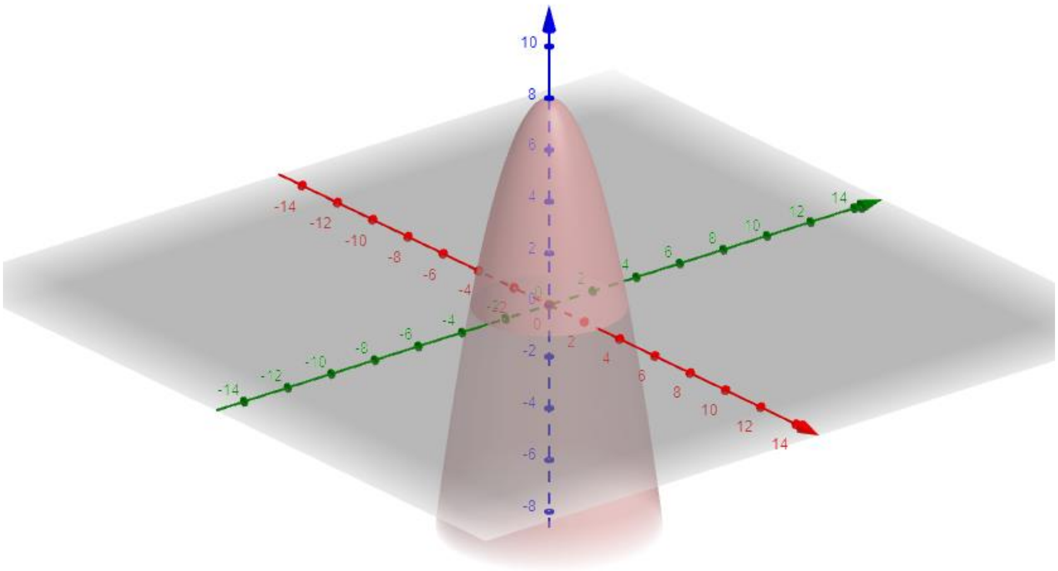


Рис. 2.38

6. Застосування аналітичної геометрії в просторі до задач математичного аналізу

Побудова множин у просторі

Приклад. Знайти область визначення функції $u = u(x, y, z)$ та побудувати її, якщо $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$.

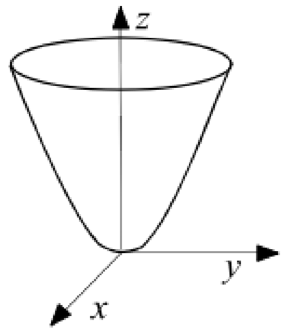


Рис. 2.39

Розв'язання. Заданий аналітичний вираз існує в усіх точках $(x, y, z) \in R^3$, в яких $-x^2 - y^2 + 2z > 0$, або $x^2 + y^2 < 2z$. Цю нерівність задовольняють точки (x, y, z), що містяться всередині параболоїда обертання $x^2 + y^2 = 2z$ (рис. 2.39), не включаючи його поверхню.

Приклад. Побудувати поверхні рівня функції $u = \dfrac{x + y + z}{3}$.

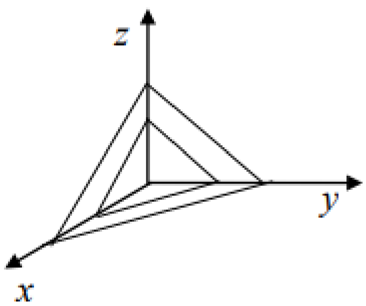


Рис. 2.40

Розв'язання. Лінії рівня заданої функції визначаються рівняннями $\dfrac{x + y + z}{3} = C$, де $C = const$. Покладемо, наприклад, сталу $C = 1; 2$ і очевидно отримаємо рівняння паралельних між собою площин (рис. 2.40).

Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ (або $z = f(x, y)$) і дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній.

Означення. *Дотичною до поверхні* в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називають дотичну до довільної кривої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і повністю лежить на поверхні.

Нехай функція $F(x, y, z) = 0$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а крива L задана в параметричному вигляді: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, де $x(t), y(t), z(t)$ визначені та диференційовні на проміжку $(\alpha; \beta)$ функції.

Рівняння дотичної до кривої L в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y(t_0)} = \frac{z - z_0}{z(t_0)},\ t_0 \in (\alpha; \beta). \qquad (2.44)$$

Оскільки крива L лежить на поверхні, то координати точок цієї кривої задовольняють рівняння поверхні, тобто $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Продиференціювавши цю тотожність по змінній t, маємо при $t = t_0$:

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(M_0)z'(t_0) = 0. \qquad (2.45)$$

Розглянемо пряму

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (2.46)$$

З (2.45) маємо, що пряма (2.46) є перпендикулярною до дотичної (2.44), оскільки їх напрямні вектори взаємно перпендикулярні.

Пряма (2.46) цілком визначається поверхнею $F(x, y, z) = 0$ та точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, вона не залежить від кривої L, що цілком лежить на цій поверхні і проходить через точку M_0. Отже, всі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на цій поверхні і проходять через точку M_0, є перпендикулярними до прямої (2.46).

Означення. Площину, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що належать поверхні і проходять через точку M_0, називають *дотичною площиною* до поверхні у цій точці.

Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \qquad (2.47)$$

Пряму, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і є перпендикулярною до дотичної до поверхні в цій точці площини, називають *нормаллю до поверхні* в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рівняння (2.46) є рівнянням нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Якщо поверхня задається в явному вигляді, тобто $z = f(x, y)$, то (2.46) і (2.47) набувають відповідно вигляду:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

та

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Приклад. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z = 7$ у точці $(0,0,6)$.

Розв'язання. Маємо $F(x, y, z) = e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z - 7$,

$F'_x(x, y, z) = ye^{xy} + 3z^2 - 4xy + 5$,

$F'_y(x, y, z) = xe^{xy} - 2x^2 - 1$,

$F'_x(x, y, z) = 6xz + 1$,

$F'_x(0,0,6) = 113, \quad F'_y(0,0,6) = -1, \quad F'_z(0,0,6) = 1.$

Отже, рівняння нормалі буде - $\frac{x}{113}=\frac{y}{-1}=\frac{z-6}{1}$, а $113x-y+z-6=0$ - рівняння дотичної площини.

Приклад. Показати, що рівняння $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ є рівнянням сфери, знайти її центр, радіус, точки перетину сфери з прямою $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ і дотичну площину до однієї з точок перетину.

Розв'язання. В лівій частині рівняння виділимо повні квадрати:

$$\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+4y+4\right)+\left(z^2+6z+9\right)-14-2=0$$

або

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16.$$

Отже, отримали рівняння сфери з центром у точці $C(1;-2;3)$ і радіусом $R=4$.

Перетворимо рівняння прямої до параметричного вигляду, підставимо отримані параметричні рівняння до рівняння сфери і визначимо параметр t:

$$x=t+1,\quad y=-t,\quad z=2t+1,$$

$$t^2+t^2-4t+4+4\left(t^2+4t+4\right)=16,$$

$$3t^2+6t+2=0,\ t_1=\frac{-3+\sqrt{3}}{3},\ t_2=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}.$$

Підставимо знайдені значення параметрів до параметричних рівнянь прямої і отримаємо дві точки перетину сфери і прямої:

$$M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right),\ M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{3+\sqrt{3}}{3};\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Складемо рівняння дотичної площини в точці M_1 і після перетворень отримаємо:

$$\frac{\sqrt{3}-3}{3}x+\frac{9-\sqrt{3}}{3}y+\frac{6+2\sqrt{3}}{3}z-9+9\sqrt{3}=0.$$

Приклад. Знайти дотичні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$, які були б паралельні площині $2x+2y-3z=0$.

Розв'язання. Легко показати, що рівняння дотичної площини до поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$. Використовуючи умову паралельності дотичної площини і заданої площини, отримаємо

$$\frac{xx_0}{21}+\frac{yy_0}{6}+\frac{zz_0}{4}=1,\quad \frac{x_0/21}{2}=\frac{y_0/6}{2}=\frac{z_0/4}{-3},$$

звідки

$$x_0 = 42t,\ \ y_0 = 12t,\ \ z_0 = -12t.$$

Оскільки $x_0,\ y_0,\ z_0$ задовольняють рівняння еліпсоїда, то підставляючи їх до цього рівняння, знайдемо значення параметра t:

$$\frac{42^2t^2}{21} + \frac{12^2t^2}{6} + \frac{12^2t^2}{4} = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{12},\ \ t_2 = -\frac{1}{12}.$$

Підставимо знайдені значення t_1 і t_2 до виразів для $x_0,\ y_0,\ z_0$ та отримаємо координати точок дотику $M_1\left(\frac{7}{2};1;-1\right)$, $M_2\left(-\frac{7}{2};-1;1\right)$. Складемо рівняння шуканих дотичних площин:

$$M_1\left(\frac{7}{2};1;-1\right),\quad 2x + 2y - 3z - 12 = 0,$$

$$M_2\left(-\frac{7}{2};-1;1\right),\quad 2x + 2y - 3z + 12 = 0.$$

Обчислення інтегралів

Приклад. Знайти об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Розв'язання. Для знаходження об'єму тіла скористаємося формулою через площі його перерізів площинами, паралельних до площини yOz (рис. 2.41):

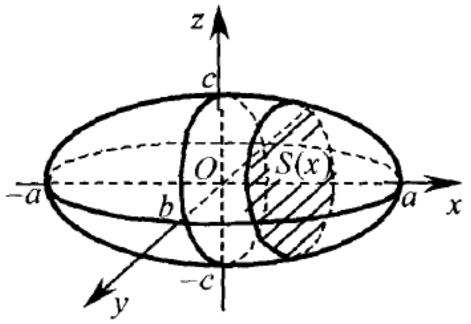


Рис. 2.41

$$V = \int_a^b f(x)dx.$$

У таких перерізах ($x = const$) заданого еліпсоїда утворюватимуться еліпси $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ або $\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$ з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ і $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Площа кожного з них $S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Отже, $V = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi bc\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc$.

Зокрема, якщо $a = b = c = R$, то маємо формулу для обчислення об'єму сфери радіуса R у вигляді $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і площинами $z = 0$, $x + z = 6$.

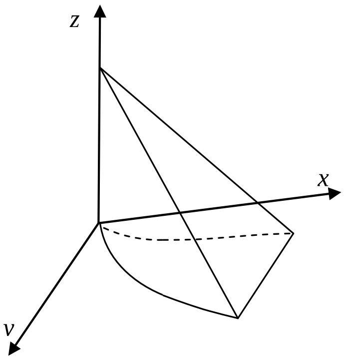


Рис. 2.42

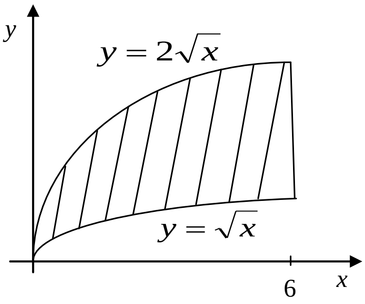


Рис.2.43

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху площиною $x + z = 6$, знизу – площиною xOy $(z = 0)$, спереду - поверхнею циліндра $y = \sqrt{x}$, ззаду – поверхнею циліндра $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 2.42).

Областю інтегрування є область (P), обмежена прямою $x = 6$ і параболами $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 2.43).

Оскільки геометричним зображенням функції $x + z = 6$ є площина, що покриває зверху дане тіло, то ця функція і буде підінтегральною функцією. Отже, шуканий об'єм виразимо наступним подвійним інтегралом:

$$V = \iint\limits_{(P)} (6 - x)\,dxdy.$$

Перейдемо до повторного інтегралу:

$$V = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x)dy = \int_0^6 \left(6y - xy\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^6 \left(6\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= 4x^{3/2}\Big|_0^6 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^6 = \frac{48\sqrt{6}}{5}\text{(куб. од.)}$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ і площиною $z = 0$.

Розв'язання. Для з'ясування виду і розташування поверхні $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ застосуємо метод перерізів.

1. Перерізом площиною xOy $(z = 0)$ є еліпс з осями $a' = a,\ b' = \frac{a}{2}$.

2. Перерізами площинами, паралельними площині xOy, є еліпси $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a(a-h)} + \dfrac{y^2}{4a(a-h)} = 1 \\ z = h \end{cases}$.

3. Переріз площиною xOz – парабола $z = a - \dfrac{x^2}{a}$ з віссю симетрії Oz і вершиною $A(0{,}0, a)$, вітки якої напрямлені вниз.

4. Переріз площиною yOz – парабола $z = a - \dfrac{4y^2}{a}$ з віссю симетрії Oz і вершиною $A(0{,}0, a)$, вітки якої напрямлені вниз.

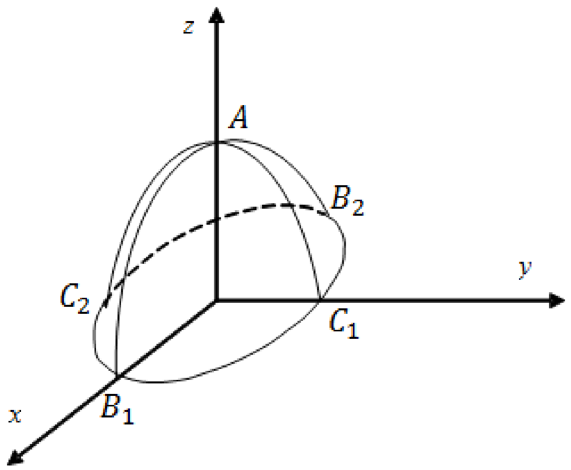


Рис. 2.44

Точки $B_1(a, 0{,}0)$ і $B_2(-a, 0{,}0)$ є точками перетину поверхні з віссю Ox; точки $C_1\left(0, \dfrac{a}{2}, 0\right)$ і $C_2\left(0, -\dfrac{a}{2}, 0\right)$ - точки перетину з віссю Oy; точка $A(0{,}0, a)$ - точка перетину з віссю Oz.

Отже, шукане тіло обмежене зверху параболоїдом $z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$, знизу – площиною xOy (рис. 2.44).

В силу симетрії даного тіла відносно координатних площин досить обмежитись обчисленням об'єму його четвертої частини, розташованій в першому октанті.

Маємо, що підінтегральною функцією є $z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$, областю інтегрування – частина еліпсу з осями $a' = a, b' = \dfrac{a}{2}$, яка розташована в першій чверті площини xOy ($0 \le x \le a$, $0 \le y \le \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$). Тоді

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_{(P)} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} dxdy =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} dy = \int_0^a \left(ay - \frac{x^2 y}{a} - \frac{4y^3}{3a} \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{a}{3}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx - \frac{1}{3a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \end{matrix} \right| = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt -$$

$$-\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt - \frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^3}{6}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{\pi a^3}{12} - \frac{a^3}{24}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{12}-\frac{\pi a^3}{48}=\frac{\pi a^3}{16}.$$

Отже, $V=\frac{\pi a^3}{4}$ куб. од.

Приклад. Знайти площу частини поверхні $x^2+y^2=a^2$, вирізану площинами $x+z=0$, $x-z=0$ ($x>0,\ y>0$).

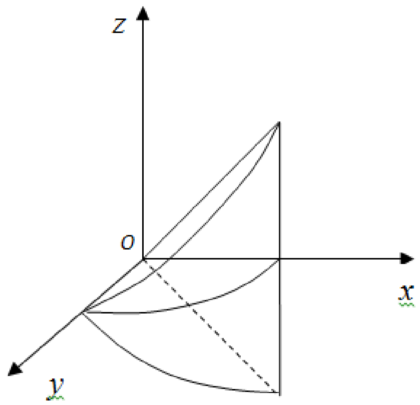


Рис. 2.45

Розв'язання. Дана поверхня $x^2+y^2=a^2$ є круговим циліндром. Оскільки $x>0,\ y>0$, то досить побудувати тільки ту його частину, що відповідає цій умові, і перетнути циліндр двома заданими площинами (рис. 2.45).

Область інтегрування (D) при проектуванні на площину xOz описується нерівностями $-x\le z\le x,\ 0\le x\le a$, а потрібна частина поверхні визначається рівнянням $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Для знаходження підінтегральної функції обчислимо частинні похідні функції $y=\sqrt{a^2-x^2}$: $y'_z=0$, $y'_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Отже, $S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dzdx=\iint\limits_{(D)}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dzdx$.

Враховуючи, що область інтегрування є симетричною відносно осі Ox, маємо:

$$S=2\int_0^a dx\int_0^x\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz=2a\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\begin{bmatrix} t=a^2-x^2 \\ dt=-2xdx \\ t_н=a^2,\ t_в=0\end{bmatrix}=2a\int_0^{a^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=2a\sqrt{t}\Big|_0^{a^2}=2a^2 \text{ (кв.од.)}$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)}xdxdydz$, де область (T) обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0, y=h,\ x+z=a$.

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху площиною $x+z=a$, знизу – площиною $z=0$, тому змінна z задовольняє нерівність $0\le z\le a-x$.

Проекцією даного тіла на площину xOy є прямокутник $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le h$ (рис.2.46). Отже,

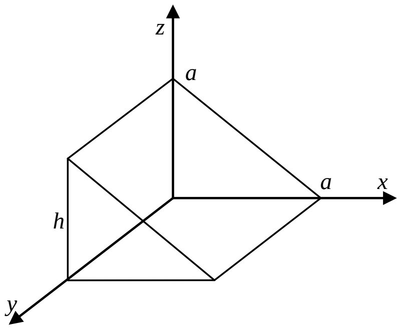


Рис. 2.46

$$\iiint\limits_{(T)} xdxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^h dy \int\limits_0^{a-x} xdz =$$

$$= \int\limits_0^a xdx \int\limits_0^h dy \cdot z\Big|_0^{a-x} = \int\limits_0^a x(a-x)dx \cdot y\Big|_0^h =$$

$$= h\int\limits_0^a \left(ax - x^2\right)dx = h\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ha^3}{6}.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz$, якщо область (T) обмежена поверхнями $x=2$, $x=3$, $y^2+z^2=1$, $z=0\ (z>0)$.

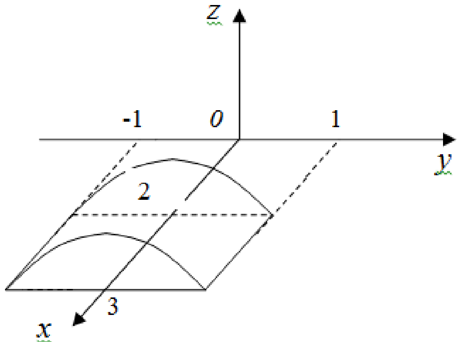


Рис. 2.47

Розв'язання. Область (T) (рис. 2.47) визначається умовами:

$$0 \le z \le \sqrt{1-y^2},\ -1 \le y \le 1,\ 2 \le x \le 3.$$

Для обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz$ перейдемо до обчислення повторних інтегралів:

$$\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz = \iint\limits_{(D)} e^{x+y}dxdy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 e^x dx \int\limits_{-1}^1 e^y\left(1-y^2\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)\int\limits_{-1}^1 e^y\left(1-y^2\right)dy = \begin{vmatrix} u = 1-y^2, & du = -2ydy, \\ dv = e^y dy, & v = e^y, \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)\left((1-y^2)e^y\Big|_{-1}^1 + 2\int\limits_{-1}^1 ye^y dy\right) = \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)\cdot 2\int\limits_{-1}^1 ye^y dy =$$

$$= \begin{vmatrix} u = y, & du = dy, \\ dv = e^y dy, & v = e^y \end{vmatrix} = e^2(e-1)\left(ye^y\Big|_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^1 e^y dy\right) = e^2(e-1)\cdot\frac{2}{e} = 2e(e-1).$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(G)} zdxdydz$, де *(G)* – область, що обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4$ та параболоїдом обертання $x^2+y^2=3z$.

Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2+z^2=4$ визначає сферу із центром у початку координат і радіусом $R=2$, друга поверхня $x^2+y^2=3z$ є параболоїдом обертання навколо осі Oz. Задане тіло (G) зображене на рисунку 2.48.

Для визначення проекції (D) заданого тіла на площину xOy розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4-z^2 \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-z^2=3z \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-3z-4=0 \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1=1, z_2=-4 (\text{не підходить}) \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$$

Маємо, що областю (D) є круг радіуса $\sqrt{3}$, центр якого співпадає з початком координат, тобто $x^2+y^2\le 3$ (рис.2.49).

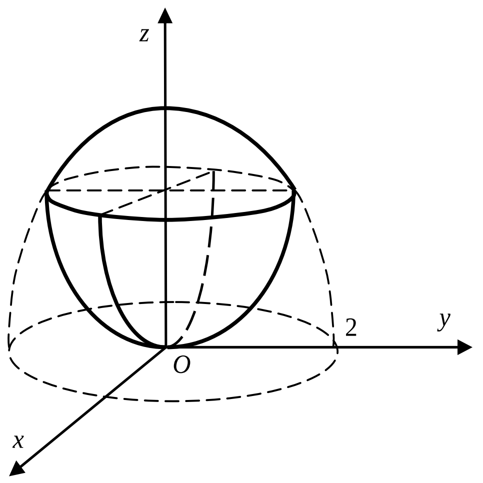


Рис. 2.48

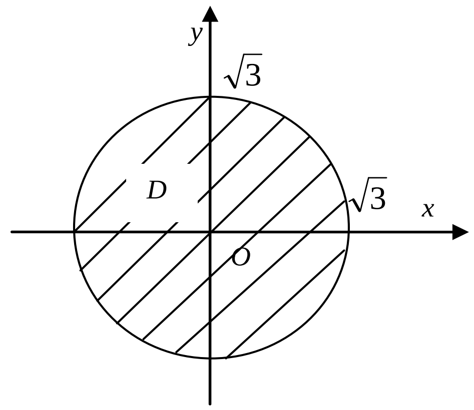


Рис. 2.49

У потрійному інтегралі перейдемо до циліндричних координат: рівняння сфери набуде вигляду $\rho^2+z^2=4$ або $z^2=4-\rho^2$; рівняння параболоїда обертання – $\rho^2=3z$ або $z=\dfrac{\rho^2}{3}$; рівняння кола $-\rho^2=3$. Отже, в циліндричних координатах задане тіло буде описуватись такими умовами:

$$(G`): 0\le\rho\le\sqrt{3}, 0\le\varphi\le 2\pi, \frac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}\ .$$

Маємо:

$$\iiint\limits_{(G)} zdxdydz = \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi,\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz \\ y=\rho\sin\varphi, \qquad (G)\to(G`) \\ z=z \end{matrix} \right| = \iiint\limits_{(G`)} z\rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{9} \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{4\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{54} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(6 - \frac{9}{4} - \frac{27}{54} \right) = \frac{13}{4}\pi.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(G)} \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+R^2}$, де (G) – верхня півкуля радіуса R із центром у початку координат: $x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$.

Розв'язання. У потрійному інтегралі перейдемо до сферичних координат, в яких рівняння сфери $r=R$. Проекцією півкулі на площину xOy є круг $x^2+y^2 \le R^2$. Отже, маємо

$$\iiint\limits_{(G)} \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+R^2} = \left| \begin{matrix} x=r\cos\varphi\sin\theta, dxdydz=r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, (G)\to(G`) \\ z=r\cos\theta, G`: 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \iiint\limits_{(G`)} \frac{r^2\sin\theta}{r^2+R^2} dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^R \frac{r^2 dr}{r^2+R^2} = \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\int_0^R \frac{r^2+R^2-R^2}{r^2+R^2} dr \right) = 2\pi \left(\int_0^R dr - R^2 \int_0^R \frac{dr}{r^2+R^2} \right) =$$

$$= 2\pi \left(R - \frac{R^2}{R} arctg \frac{2}{R} \Bigg|_0^R \right) = 2\pi \left(R - R\frac{\pi}{4} \right) = 2\pi R \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z=4-y^2$, $z=y^2+2$ і площинами. $x=-1, x=2$

Розв'язання. Поверхні $z=4-y^2$, $z=y^2+2$ є параболічними циліндрами з твірними, паралельними осі Ox, і напрямними, що є параболами $z=4-y^2$ і $z=y^2+2$ в площині yOz відповідно (рис.2.50). Площини $x=-1, x=2$ паралельні площині yOz.

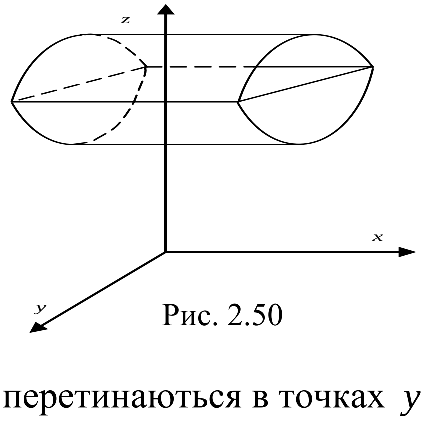


Рис. 2.50

Проекцією цього тіла на площину Oyz, тобто областю інтегрування, є область (P), обмежена параболами $z=4-y^2$ і $z=y^2+2$, які перетинаються в точках $y=1$ та $y=-1$.

Отже, об'єм даного тіла знайдемо з інтеграла

$$V=\int_{-1}^{2}dx\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2+2}^{4-y^2}dz=\int_{-1}^{2}dx\int_{-1}^{1}\left(2-2y^2\right)dy=2\int_{-1}^{2}\left(2y-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 dx=\frac{8}{3}\cdot 3=8 \text{ (куб.од.)}$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x$.

Розв'язання. Для знаходження об'єму заданого тіла доцільно перейти до сферичних координат, в яких рівняння поверхні $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x$ набуває вигляду $\rho=a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$. Тому область інтегрування по змінній ρ визначається нерівністю $0\le\rho\le a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$.

Для знаходження меж інтегрування по змінним θ і φ покладемо $\rho=0$, тобто $a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}=0$. Звідси $\sin\theta\cos\varphi=0$, що можливо у випадку, коли $\sin\theta=0$ або $\cos\varphi=0$ ($\theta=\pi+\pi n,\ n\in Z,\ \varphi=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$). Отже, $0\le\theta\le\pi$ і $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Тоді шуканий об'єм дорівнює:

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}}\rho^2\sin\theta d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}}d\theta=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\varphi d\theta=\frac{\pi a^3}{3}\text{(куб. од.)}$$

Приклад. Знайти площу поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=4$, вирізану циліндрами $x^2+y^2=\pm 2x$.

Розв'язання. Для знаходження області інтегрування спроектуємо частини заданої поверхні у площину xOy (рис.2.51).

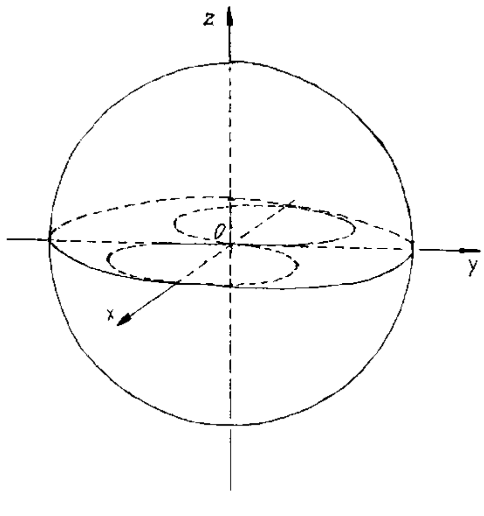


Рис.2.51

Вона являє собою два рівновеликих круга одиничних радіусів з центрами в точках $(1;0)$ і $(-1;0)$. Очевидно, що шукана поверхня складається з чотирьох рівновеликих частин, тому достатньо розглянути один з кругів $E=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le 1\}$.

Для обчислення площі шуканої поверхні знайдемо частинні похідні функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ та їх квадрати відповідно:

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\ ,\ \ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,;$$

$$(z'_x)^2=\frac{x^2}{4-x^2-y^2}\,,\ \ (z'_y)^2=\frac{y^2}{4-x^2-y^2}\,.$$

Маємо, що

$$S=4\iint\limits_E\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-\left(x^2+y^2\right)}}dxdy\,.$$

Оскільки підінтегральна функція містить многочлен (x^2+y^2), то доцільно перейти до полярної системи координат за формулами: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Тоді область інтегрування у полярних координатах визначається умовами $E'=\left\{(\rho,\varphi):0\le\rho\le 2\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

Обчислимо площу поверхні:

$$S=4\iint\limits_{E'}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{4-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=16\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=$$

$$=16(\varphi+\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=16\pi.$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює 16π (кв. од.).

Приклад. Знайти площу поверхні частини конуса $x^2+y^2=z^2$, вирізану циліндром $x^2+y^2=1$ та площинами $z=0,\ \ y=0$.

Розв’язання. З’ясуємо вигляд заданих поверхонь у декартовій системі координат. Застосуємо метод перерізів.

1. Даний конус є симетричним відносно всіх координатних площин.

2. З координатними осями поверхня перетинається в точці $O(0,0,0)$.

3. а) $\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$

Перерізом конуса і циліндра у площині xOy є точка $O(0, 0, 0)$.

б) $\begin{cases} y=0, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$

Перерізом конуса і циліндра і площині xOz є дві прямі $z=\pm x$, що перетинаються у початку координат.

в) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 = z^2. \end{cases}$

Перерізом конуса і циліндра у площині yOz є дві прямі $z = \pm y$, що перетинаються у початку координат.

4. $\begin{cases} z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$

Перерізом конуса і циліндра є кола $x^2 + y^2 = 1$, що знаходяться у площинах $z = 1$ та $z = -1$ (рис. 2.52).

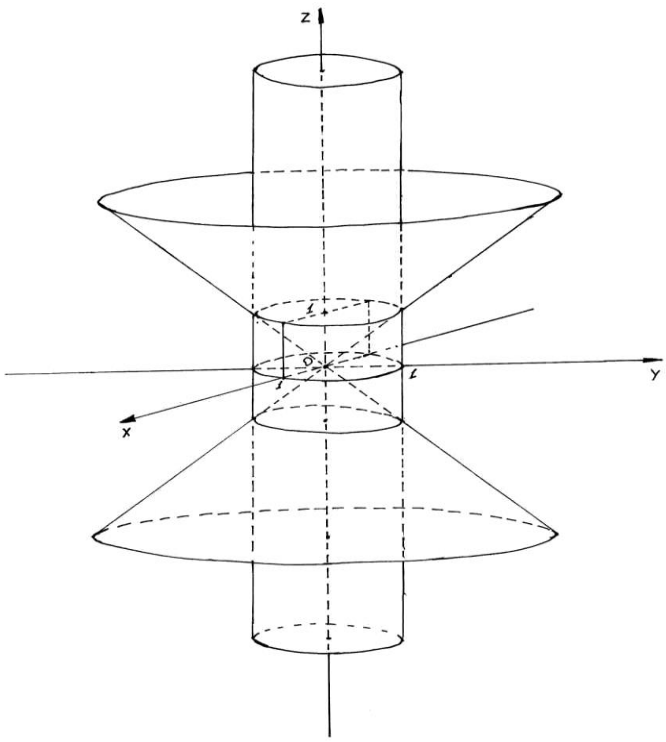


Рис. 2.52

Розглянемо детальніше частину конуса, поверхню якої будемо знаходити (рис.2.53).

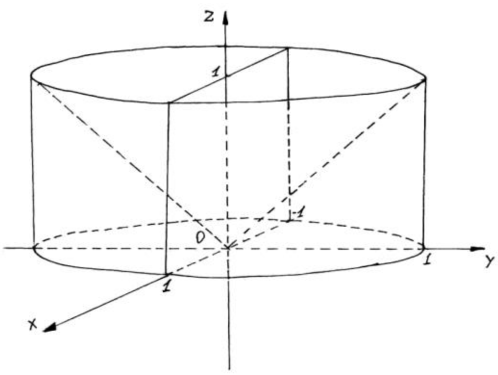


Рис.2.53

Область інтегрування E визначається умовами $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Для обчислення площі шуканої поверхні знайдемо частинні похідні функції

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та їх квадрати відповідно:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(z'_x)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \; (z'_y)^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

За формулою для обчислення площі поверхні маємо:

$$S = \iint_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} \iint_E dxdy.$$

У випадку даної задачі доцільно перейти до полярної системи координат. Тоді область інтегрування має вигляд $E' = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, а площа поверхні дорівнює

$$S = \sqrt{2} \iint_{E'} \rho d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \sqrt{2}\pi.$$

Отже, в силу симетрії відносно площини xOy заданої поверхні шукана площа дорівнює $2\sqrt{2}\pi$ кв. од.

Приклад. Знайти площу поверхні *P*, якщо *P* – частина поверхні $x^2 + y^2 = z^2, \; z \ge 0$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Розв'язання. Очевидно, що областю інтегрування *E* є область, обмежена контуром $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. Перейдемо до полярної системи координат, тоді областю інтегрування є

$$E' = \left\{(\rho, \varphi) : \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}, \; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \; \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Побудуємо її, враховуючи симетрію відносно початку координат. Встановимо відповідність між ρ та φ для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0

Крива зображена на рис 2.54.

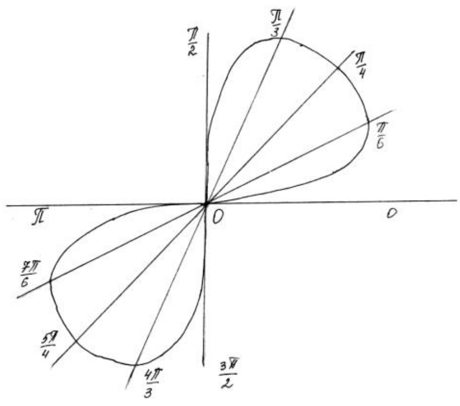


Рис. 2.54

Для обчислення площі шуканої поверхні знайдемо частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та їх квадрати відповідно:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , \ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ ,$$

$$(z'_x)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \ , \ (z'_y)^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

Отже, $S = 2\iint\limits_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = 2\sqrt{2}\iint\limits_E dxdy$.

Перейдемо до полярної системи координат, отримаємо:

$$S = 2\sqrt{2}\iint\limits_{E'} \rho d\rho d\varphi = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \sqrt{2}\,.$$

Шукана площа поверхні дорівнює $\sqrt{2}$ (кв. од.).

Приклад. Знайти площу поверхні $(x+y)^2 + 2z = 1$, якщо $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Розв'язання. Задана поверхня розташована у першому октанті. Вид поверхні встановимо, використовуючи метод перерізів.

1. Знайдемо точки перетину з координатними осями:

а) точкою перетину поверхні з віссю *Oz* є точка $C(0,\ 0,\ \frac{1}{2})$;

б) точкою перетину поверхні з віссю *Oy* є точка $D(0,1,0)$;

в) точкою перетину поверхні з віссю *Ox* є точка $D(1,0,0)$.

2. Знайдемо лінії перетину з координатними площинами:

а) $\begin{cases} z = 0, \\ (x+y)^2 + 2z = 1. \end{cases}$

Перетином поверхні з площиною xOy є пряма $y = 1 - x$.

б) $\begin{cases} y = 0, \\ (x+y)^2 + 2z = 1. \end{cases}$

Перетином поверхні з площиною xOz є парабола $z = \dfrac{1 - x^2}{2}$.

в) $\begin{cases} x = 0, \\ (x+y)^2 + 2z = 1. \end{cases}$

Перетином поверхні з площиною yOz є парабола $z = \dfrac{1-y^2}{2}$.

Задану поверхню зображено на рис.2.55.

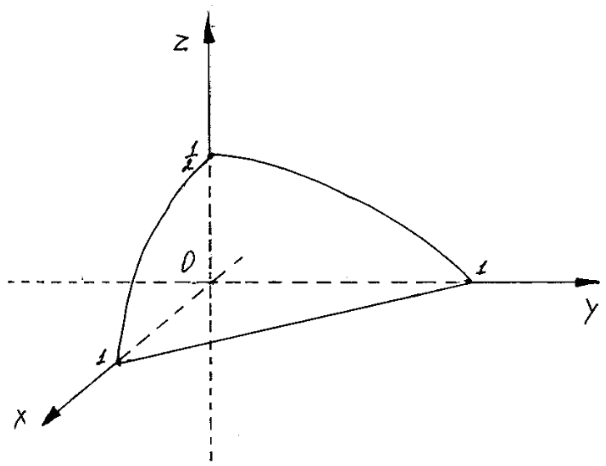


Рис.2.55

Область інтегрування у декартових координатах визначається умовами $E = \{(x, y) : y \le 1 - x, \ \ x \ge 0, \ \ y \ge 0\}$.

Для знаходження площі поверхні обчислимо частинні похідні функції $z = \dfrac{1-(x+y)^2}{2}$ та їх квадрати відповідно:

$$z'_x = -(x+y) \ , \ \ z'_y = -(x+y),$$

$$z'^2_x = (x+y)^2, \ z'^2_y = (x+y)^2.$$

Маємо, що $S = \iint\limits_E \sqrt{1+2(x+y)^2}\,dxdy$.

Перейдемо до узагальнених полярних координат за формулами $x = \rho\cos^2\varphi, \ \ y = \rho\sin^2\varphi$. Тоді областю інтегрування буде область $E' = \left\{(\rho, \varphi) : \ 0 \le \rho \le 1, \ \ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Обчислимо Якобіан:

$$I(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -2\rho\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2\rho\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 2\rho\sin\varphi\cos^3\varphi + 2\rho\cos\varphi\sin^3\varphi = \rho\sin 2\varphi.$$

Тоді

$$S = \iint\limits_{E'} \sqrt{1+2\rho^2}\,\rho\sin 2\varphi d\rho d\kappa = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1+2\rho^2}\,d\rho = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}$ кв. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=x^2$, $y=-x^2+2$, $y=-x^2+3$, $z=0$ та $z=5$.

Розв'язання. Поверхні $y=x^2$, $y=-x^2+2$ та $y=-x^2+3$ є циліндрами, твірні яких паралельні осі *OZ*. Тіло, об'єм якого потрібно обчислити, зображено на рис. 2.56. Очевидно, що воно є симетричним відносно площини yOz, тому досить розглянути його лише в першому октанті.

Спроектуємо відповідну частину заданого циліндричного тіла на площину xOy і знайдемо точки перетину парабол, які є його напрямними: $x=1$, $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Тоді отримана область інтегрування є об'єднанням двох областей, які визначається відповідно умовами:

$$E_1=\left\{(x,y):0\le x\le 1,\ -x^2+2\le y\le -x^2+3\right\}$$

$$E_2=\left\{(x,y):1\le x\le \sqrt{\frac{3}{2}},\ x^2\le y\le -x^2+3\right\},$$

при цьому $0\le z\le 5$.

Об'єм циліндричного тіла знайдемо як

$$V=\int_0^1 dx\int_{-x^2+2}^{-x^2+3}dy\int_0^5 dz+\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}dx\int_{x^2}^{-x^2+3}dy\int_0^5 dz=5\left(\int_0^1\left(y\Big|_{-x^2+2}^{-x^2+3}\right)dx+\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(y\Big|_{x^2}^{-x^2+3}\right)dx\right)=$$

$$=5\left(\int_0^1 dx+\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(-2x^2+3\right)dx\right)=5\left(1+\left(-\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)=10\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\right).$$

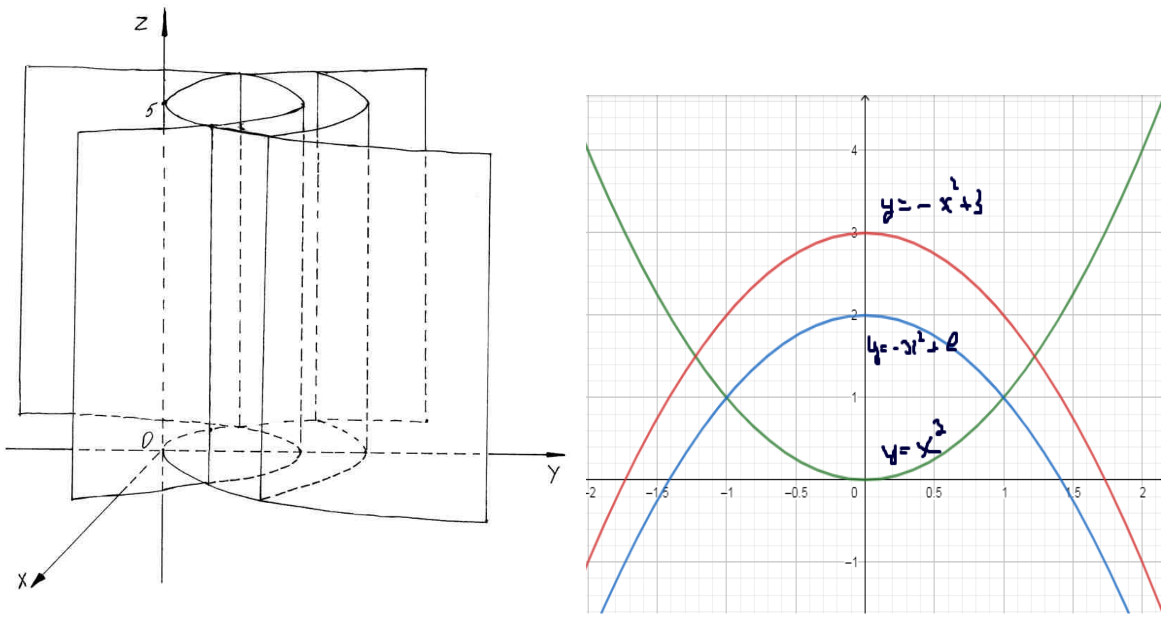


Рис.2.56

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $20\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\right)=\frac{30\sqrt{6}-40}{3}$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об'єм тіла, що визначається умовами: $x^2+y^2+z^2\le 4$, $x^2+y^2\le 2x$.

Розв'язання. Задане тіло називається тілом Вівіані і його зображення подане на рис. 2.57. Областю інтегрування є область $E=\{(x,y): x^2+y^2\le 2x\}$.

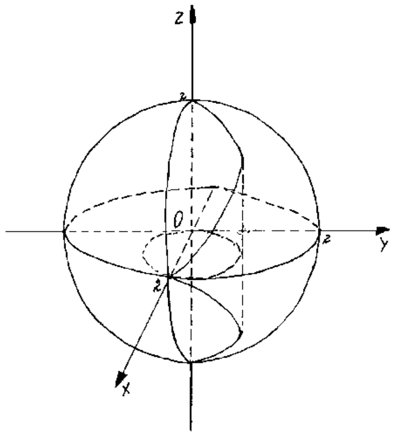


Рис. 2.57

Об'єм тіла обчислюється за формулою $V=2\iint\limits_E\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$.

Перейдемо до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, де областю інтегрування буде $E'=\left\{(\rho,\varphi): 0\le\rho\le 2\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$. Тоді

$$V=2\iint\limits_{E'}\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\varphi d\rho=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho=\frac{16}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)d\varphi=\frac{16\pi}{3}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{16\pi}{3}$ куб. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ та $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Розв'язання. Дослідимо поверхню $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ методом перерізів та побудуємо її у першому октанті.

1. З координатними осями *Oy, Oz* та *Ox* поверхня перетинається в точках $A_1(0,1,0)$, $A_2(0,0,1)$, $A_3(1,0,0)$.

2. Знайдемо лінії перетину поверхні з координатними площинами:

а) $\begin{cases} z=0, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1. \end{cases}$

Перетином поверхні з площиною xOy є лінія $y=(1-\sqrt{x})^2$.

б) $\begin{cases} y=0, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1. \end{cases}$

Перетином поверхні з площиною xOz є лінія $z=(1-\sqrt{x})^2$

в) $\begin{cases} x=0, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1. \end{cases}$

Перетином поверхні з площиною yOz є лінія $z=(1-\sqrt{y})^2$.

Циліндричне тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображено на рис. 2.58.

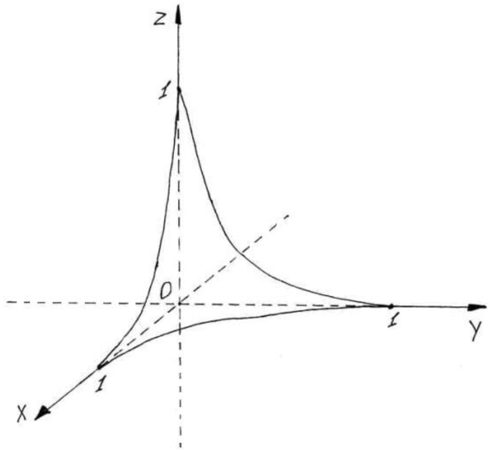


Рис. 2.58

Об'єм даного тіла у декартових координатах знаходиться за формулою: $V=\iint\limits_E (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 dxdy$, де областю інтегрування є множина $E=\left\{(x,y):\ 0\le y\le(1-\sqrt{x})^2,\ 0\le x\le 1\right\}$. Але у цьому випадку доцільно перейти до узагальнених полярних координат за формулами: $x=\rho\cos^4\varphi,\ y=\rho\sin^4\varphi$. Область інтегрування E при цьому перейде у область

$$E'=\left\{(\rho,\varphi):0\le\rho\le 1,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Обчислимо Якобіан заданого перетворення:

$$I(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^4\varphi & -4\rho\cos^3\varphi\sin\varphi \\ \sin^4\varphi & 4\rho\sin^3\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=4\rho\sin^3\varphi\cos^5\varphi+4\rho\cos^3\varphi\sin^5\varphi=\frac{1}{2}\rho\sin^3 2\varphi.$$

Знайдемо об'єм заданого тіла:

$$V=\frac{1}{2}\iint\limits_{E'}(1-\sqrt{\rho})^2\rho\sin^3 2\varphi d\rho d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho(1-2\sqrt{\rho}+\rho)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{60}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\varphi d\varphi=\frac{1}{90}.$$

Отже, шуканий об'єм дорівнює $\frac{1}{90}$ куб. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $x^2 + y^2 + z^4 = 1$.

Розв'язання. Дослідимо поверхню $x^2 + y^2 + z^4 = 1$ методом перерізів та побудуємо її.

1. Поверхня є симетричною відносно всіх координатних площин.
2. З координатними осями *Oy, Oz* та *Ox* поверхня перетинається в точках $A_1(0,1,0)$, $A_2(0,-1,0)$, $B_1(0,0,1)$, $B_2(0,0,-1)$ та $C_1(1,0,0)$, $C_2(-1,0,0)$ відповідно.
3. Знайдемо лінії перетину поверхні з координатними площинами:

а) $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^4 = 1. \end{cases}$

Лінією перетину поверхні з площиною xOy є коло $x^2 + y^2 = 1$.

б) $\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 + z^4 = 1. \end{cases}$

Лінією перетину поверхні з площиною xOz є $x = \pm\sqrt{1 - z^4}$.

в) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^4 = 1. \end{cases}$

Лінією перетину поверхні з площиною yOz є $y = \pm\sqrt{1 - z^4}$.

Поверхню $x^2 + y^2 + z^4 = 1$ зображено на рис. 2.59.

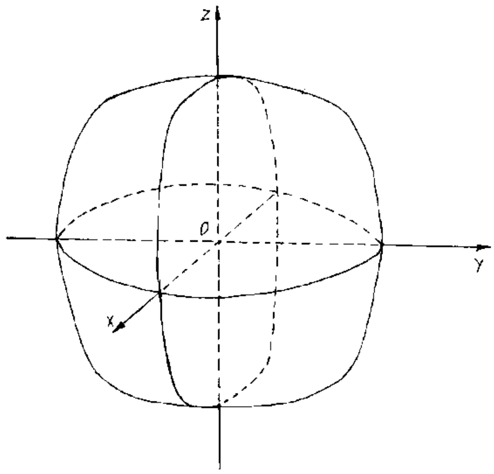


Рис.2.59

Спроектуємо задане циліндричне тіло в площину xOy. Тоді областю інтегрування E у декартових координатах є круг $x^2 + y^2 \le 1$, а об'єм заданого тіла виражається формулою $V = 2\iint\limits_E \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$ (при цьому врахована симетрія заданого тіла відносно площини xOy).

При переході до полярних координат область інтегрування має вигляд:

$E' = \{(\rho, \varphi):\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Тоді

$$V = 2\iint\limits_{E'} \rho \sqrt[4]{1-\rho^2}\, d\varphi\, d\rho = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt[4]{1-\rho^2}\, d\rho = \frac{4}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\pi}{5}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{8\pi}{5}$ куб. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, що обмежене поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $z - 6 = -x^2 - y^2$.

Розв'язання. Перша поверхня являє собою частину конуса, що розміщена над площиною $z = 0$. Її дослідження подане у задачі на с. (рис. 2.21).

Друга поверхня є параболоїдом обертання, що перетинається з конусом по колу $x^2 + y^2 = 4$ у площині $z = 2$. Дослідимо її методом перерізів.

Знайдемо лінії перетину з координатними площинами:

1. Дане тіло є симетричним відносно координатних площин yOz та xOz.
2. З віссю Oz поверхня перетинається у точці $A(0,0,6)$, з осями Ox та Oy – у точках $A_1(\sqrt{6},0,0)$, $A_2(-\sqrt{6},0,0)$ та $B_1(0,\sqrt{6},0)$, $B_2(0,-\sqrt{6},0)$ відповідно.
3. Знайдемо лінії перетину поверхні з координатними площинами:

а) $\begin{cases} z = 0, \\ z - 6 = -x^2 - y^2. \end{cases}$

Лінією перетину поверхні з площиною xOy є коло $x^2 + y^2 = 6$.

б) $\begin{cases} y = 0, \\ z - 6 = -x^2 - y^2. \end{cases}$

Лінією перетину поверхні з площиною xOz є парабола $z = -x^2 + 6$.

в) $\begin{cases} x = 0, \\ z - 6 = -x^2 - y^2. \end{cases}$

Лінією перетину поверхні з площиною yOz є парабола $z = -y^2 + 6$.

Тіло, об'єм якого треба знайти, зображено на рис. 2.60.

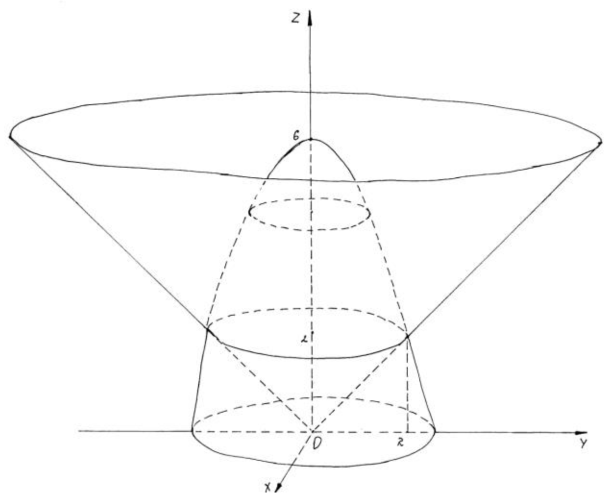


Рис. 2.60

Отже, областю інтегрування у декартових координатах є область $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$. А об'єм тіла виражається інтегралом $V = \iint\limits_E (6 - x^2 - y^2)dxdy - \iint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$.

Перейдемо до полярних координат, в яких область інтегрування має вигляд: $E' = \{(\rho, \varphi) : \ 0 \le \rho \le 2, \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, а об'єм тіла обчислюється так:

$$V = \iint\limits_{E'} \rho(6 - \rho^2)d\varphi d\rho - \iint\limits_{E'} \rho^2 d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(6 - \rho^2)d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} 8d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}d\varphi = \frac{32\pi}{3}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{32\pi}{3}$ куб. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z$ та $x^2 + 4 = z$.

Розв'язання. Перша поверхня є параболоїдом обертання з вершиною в початку координат, а друга – параболічним циліндром. Дані поверхні та тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображені на рис. 2.61.

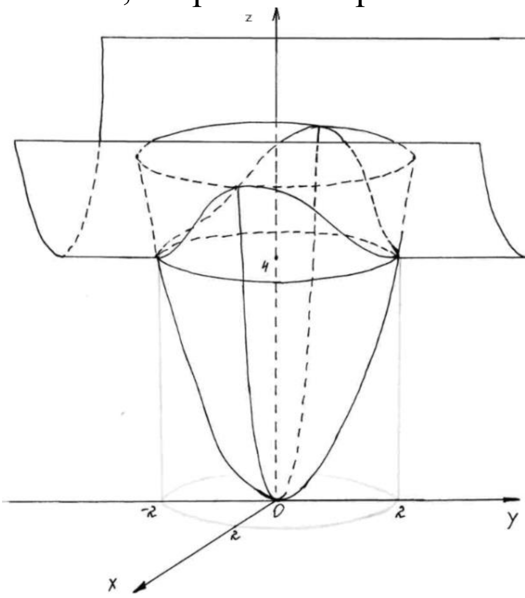


Рис. 2.61

Задане тіло є симетричним відносно координатних площин yOz та xOz тому достатньо обчислити об'єм лише тієї його частини, що лежить у першому октанті, і помножити його на 4. Маємо:

$$V = 4\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+4} dz = 4\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y^2)dy.$$

Для обчислення цього інтеграла перейдемо до полярної системи координат. Областю інтегрування у декартових координатах є частина круга $x^2 + y^2 \le 4$ першої чверті, яка у полярних координатах перейде у область $E' = \left\{(\rho, \varphi) : \ 0 \le \rho \le 2, \ 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$. Тоді

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2\rho(4-\rho^2\sin^2\varphi)d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8-4\sin^2\varphi)d\varphi=12\pi\,.$$

Отже, шуканий об’єм тіла дорівнює 12π куб. од.

Приклад. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ та $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1$.

Розв’язання. Дані поверхні є еліпсоїдами, перетином яких є еліпс $\frac{x^2}{9}+y^2=\frac{3}{4}$ у площині $z=1$. Задані поверхні та тіло зображені на рис. 2.62.

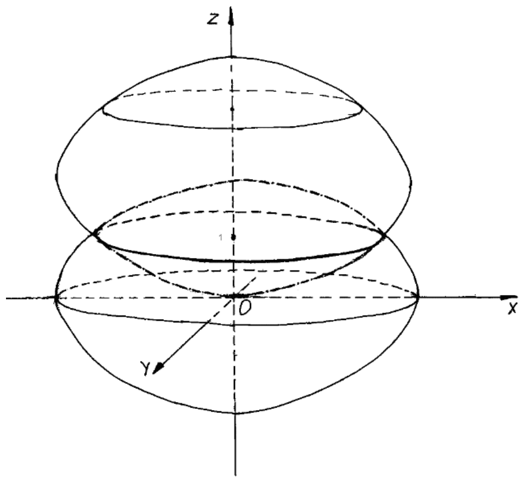


Рис. 2.62

Об’єм тіла можна знайти за формулою

$$V=\iint_E dxdy\int_{2-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}dz=\iint_E(4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}-2)dxdy\ \text{, де } E=\left\{(x,y):\frac{x^2}{9}+y^2\le\frac{3}{4}\right\}.$$

Перейдемо до узагальнених полярних координат за формулами: $x=3\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, тоді область інтегрування матиме вигляд: $E'=\left\{(\rho,\varphi):\ 0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$.

Обчислимо Якобіан даного перетворення:

$$I(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\varphi\\ y'_\rho & y'_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=3\rho\cos^2\varphi+3\rho\sin^2\varphi=3\rho\,.$$

Тоді

$$V=\iint_{E'}(4\sqrt{1-\rho^2}-2)\cdot 3\rho\,d\rho\,d\varphi=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(4\sqrt{1-\rho^2}-2)\rho d\rho=\frac{5}{2}\pi\,.$$

Отже, шуканий об’єм тіла дорівнює $\frac{5}{2}\pi$ куб. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{x}{a}$, де $a\ge 1$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат за формулами: $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$, при цьому Якобіан дорівнює $r^2\sin\theta$. Очевидно, що задане тіло є симетричним відносно площин *xOz* і *xOy*. Оскільки ліва частина рівняння завжди більша нуля, то і $x\ge 0$, тобто все тіло лежить над площиною *yOz*.

З міркувань симетрії достатньо вибрати кути φ і θ так, що $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Рівняння поверхні $(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{x}{a}$ у сферичній системі координат має вигляд $r=\sqrt[3]{\frac{\sin\theta\cos\varphi}{a}}$. Маємо:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\theta\cos\varphi}{a}}}r^2\sin\theta\,dr=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\varphi d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=\frac{\pi}{3a}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{\pi}{3a}$ куб. од.

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $((ax)^2+y^2+z^2)^3=\frac{z^2}{(ax)^2+y^2}$.

Розв'язання. Для знаходження об'єму даного тіла доцільно перейти до узагальнених сферичних координат за формулами:

$$x=\frac{1}{a}r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta.$$

Рівняння заданої поверхні $((ax)^2+y^2+z^2)^3=\frac{z^2}{(ax)^2+y^2}$ має вигляд $r=\sqrt[3]{ctg\theta}$, а якобіан використаного перетворення дорівнює $\frac{1}{a}r^2\sin\theta$.

Тіло є симетричним відносно координатних площин. Це дозволяє обмежитися обчисленням однієї восьмої частини об'єму тіла, розташованої у першому октанті. Тоді кути φ і θ задовольняють такі нерівності: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$V=\frac{8}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[3]{ctg\theta}}r^2\sin\theta dr=\frac{8}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\frac{8}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{4\pi}{3a}$$

Шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{4\pi}{3a}$ куб. од.

Приклад. Зобразити область інтегрування та розставити межі у потрійному інтегралі $\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями $y = x,\ y = -2x,\ y = 1,\ z \geq 0,\ z = x^2 + 4y^2.$

Розв'язання. Область інтегрування зображена на рисунках 2.63.

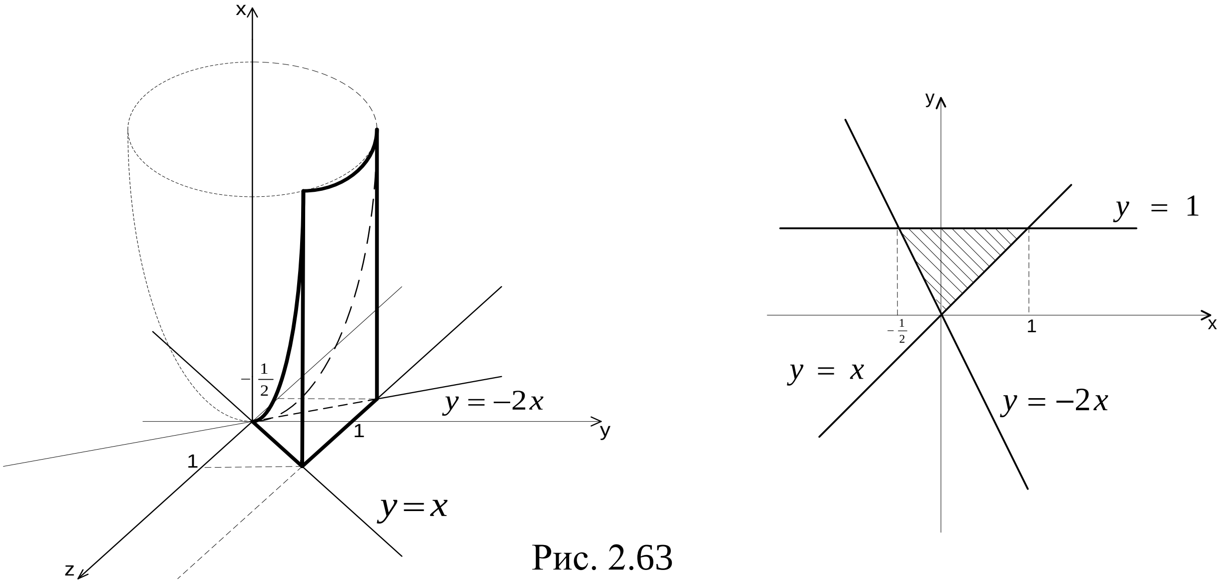


Рис. 2.63

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\frac{y}{2}}^{y} dx \int\limits_0^{x^2+4y^2} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} dx \int\limits_{-2x}^{1} dy \int\limits_0^{x^2+4y^2} f(x,y,z)dz + \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_0^{x^2+4y^2} f(x,y,z)dz.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G xy^2z^3\,dxdydz,$ де область G обмежена поверхнями $z = xy,\ x = y,\ x = 0, x = 1,\ z = 0.$

Розв'язання. Задане тіло та його проекція на площину *Oxy* зображені на рисунку 2.64.

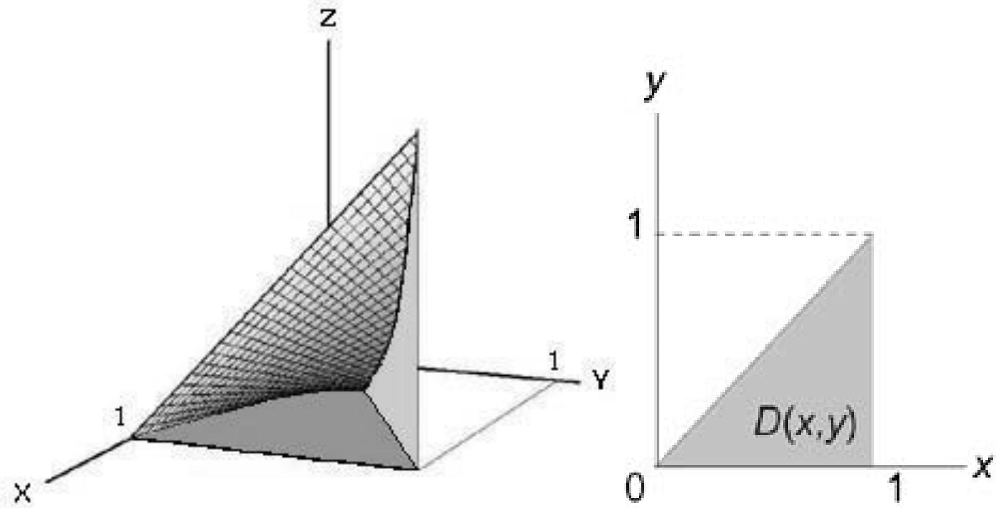


Рис. 2.64

$$\iiint\limits_G xy^2z^3\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} xy^2z^3dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(\frac{xy^2z^4}{4}\right)\Bigg|_0^{xy} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(\frac{xy^2x^4y^4}{4}\right) dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^5y^6dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(\frac{x^5y^7}{7}\right)\Bigg|_0^x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(\frac{x^5x^7}{7}\right) dx = \frac{1}{28}\int\limits_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{28}\left(\frac{x^{13}}{13}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{28}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{364}.$$

Приклад. За допомогою циліндричних координат обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо G: $x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 4y,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ z = 6$.

Розв'язання. Область G та її проекція D на площину *Oxy* зображені на рисунку 2.65.

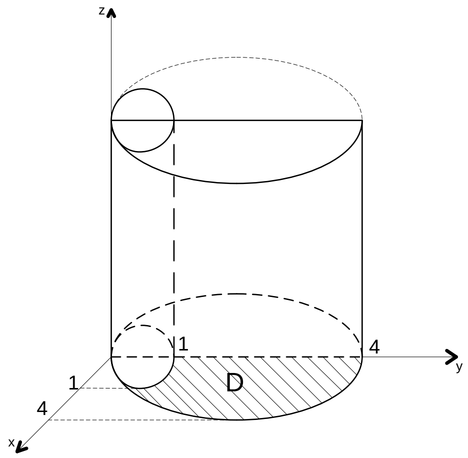


Рис. 2.65

Перейдемо до циліндричних координат (*r,φ,z*) за формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$:

$$x^2 + y^2 = 2y \to r = 2\sin\varphi;$$
$$x^2 + y^2 = 4y \to r = 4\sin\varphi.$$

Якобіан переходу при цьому дорівнює r , тому

$$\iiint\limits_G \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iiint\limits_G \frac{r\sin\varphi}{r} rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} dr \int\limits_0^6 r\sin\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} zr\sin\varphi\Bigg|_0^6 dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} 6r\sin\varphi dr =$$

$$= 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\sin\varphi}{2}\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (16\sin^3\varphi - 4\sin^3\varphi)d\varphi = 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi =$$

$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi(1 - cos^2\varphi)d\varphi = 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\varphi - cos^2\varphi sin\varphi)d\varphi = 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi +$$

$$+36\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\varphi d(cos\varphi) = -\,36cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{36cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 36 - 12 = 24.$$

Приклад. За допомогою потрійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$ (рис. 2.66).

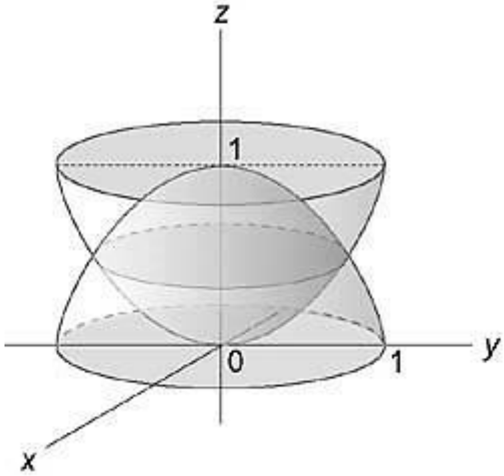


Рис. 2.66

Перейдемо до циліндричних координат (*r,φ,z*) за формулами $x = rcos\varphi$, $y = rsin\varphi$, $z = z$:

$$z = x^2 + y^2 \rightarrow z = r^2;$$
$$z = 1 - x^2 - y^2 \rightarrow z = 1 - r^2.$$

Область інтегрування G' має вигляд

$$\left\{(r, \varphi, z): 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}, r^2 \le z \le 1 - r^2\right\},$$

тоді

$$\text{V} = \iiint\limits_{G'} rdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} rdr \int_{r^2}^{1-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} rdr \cdot z\Big|_{r^2}^{1-r^2} =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r(1 - 2r^2)dr = 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (r - 2r^3)dr =$$

$$= 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{2r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$ куб. од.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

якщо область G – верхня половина сфери $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичної системи координат (r,φ,θ), отримаємо:

$$G' = \{(r,\varphi,\theta): 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi/2\},$$

$$x^2+y^2 = r^2 sin^2\theta, \quad dxdydz = r^2 sin\theta\, drd\varphi d\theta.$$

Отже,

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} r^2 sin^2\theta \cdot r^2 sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^4 dr = \frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\theta d\theta = \frac{64\pi}{5}\left(\frac{cos^3\theta}{3} - cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{15}.$$

Приклад. Знайти площу поверхні, заданої параметричними рівняннями $x = rcos\varphi,\ \ y = rsin\varphi,\ \ z = b\varphi,\ \ 0 < r \le a,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (рис. 2.67).

Розв'язання. Для обчислення площі поверхні, заданої параметрично рівняннями $x = x(u,v), y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ застосуємо формулу

$$S = \iint\limits_G \sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

де E, G, F - так звані гаусові коефіцієнти поверхні:

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \quad F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v.$$

Знайдемо

$$x'_r = cos\varphi, \quad x'_\varphi = -rsin\varphi, \ \ y'_r = sin\varphi, \quad y'_\varphi = rcos\varphi, \quad z'_r = 0, \quad z'_\varphi = b.$$

$$E = cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1,$$

$$G = r^2 sin^2\varphi + r^2 cos^2\varphi + b^2 = r^2 + b^2,$$

$$F = -rcos\varphi sin\varphi + rsin\varphi cos\varphi + 0 \cdot b = 0.$$

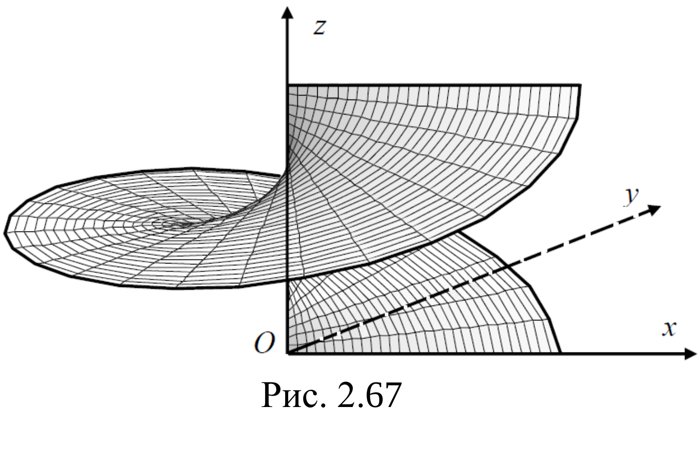


Рис. 2.67

Тоді площа поверхні S

$$|S| = \iint\limits_G \sqrt{r^2+b^2}\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2+b^2}\,dr =$$

$$= \pi \left(a\sqrt{a^2 + b^2} + b^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right).$$

Приклад. Знайдіть об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 16xy + 200$, $z = 0$, $y = 8 - x^2$, $y = x^2$.

Розв’язання. Зображення ескізу заданого тіла та його проекції на площину *xOy* подано на рис. 2.68 і 2.69 відповідно.

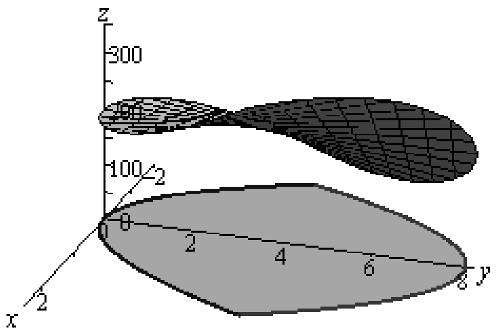


Рис. 2.68

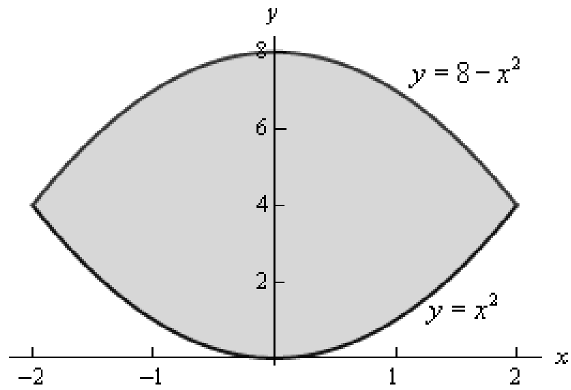


Рис. 2.69

Знайдемо точки перетину парабол $y = 8 - x^2$ і $y = x^2$: $x = 2,\ x = -2$. Отже, $D = \{(x, y): -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 8 - x^2\}$.

Знайдемо об’єм:

$$V = \iint\limits_D (16xy + 200)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} (8xy^2 + 200y) \Big|_{x^2}^{8-x^2} dx = \int_{-2}^{2} (-128x^3 - 400x^2 + 512x + 1600)dx =$$

$$= \left(-32x^4 - \frac{400}{3}x^3 + 256x^2 + 1600x \right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{12800}{3}.$$

Отже, шуканий об’єм дорівнює $\frac{12800}{3}$ куб. од.

Приклад. Знайти об’єм області, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, площиною $z = 0$ і циліндром $x^2 + y^2 = 5$.

Розв’язання. Маємо циліндричне тіло (циліндр з «шапкою» (рис. 2.70)), обмежене зверху графіком функції $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, знизу – площиною $z = 0$, з боків – циліндром $x^2 + y^2 = 5$, який вирізає в площині *xOy* область $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 5\}$.

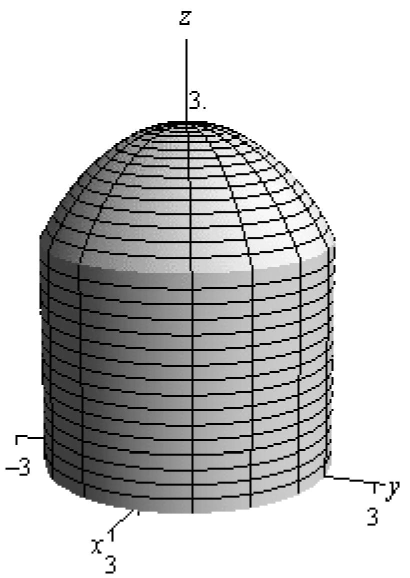


Рис. 2.70

Перейдемо до полярних координат (r,φ), в яких $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{5}$,

$$z = \sqrt{9-(x^2+y^2)} = \sqrt{9-r^2}.$$

Тоді

$$V = \iint_D \sqrt{9-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} r\sqrt{9-r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (9-r^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{\sqrt{5}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{19}{3} d\varphi = \frac{38\pi}{3}.$$

Отже, шуканий об'єм дорівнює $\frac{38\pi}{3}$ куб. од.

Приклад. Обчислити координати центра мас однорідного тіла, обмежену заданими поверхнями $x = 2\sqrt{y^2+z^2}$, $y^2+z^2=4$, $x=0$.

Розв'язання. Дане тіло V (рис. 2.71) симетричне відносно осі Ox, тому $y_c = z_c = 0$,

$$x_c = \frac{\iiint_V x dxdydz}{\iiint_V dxdydz}.$$

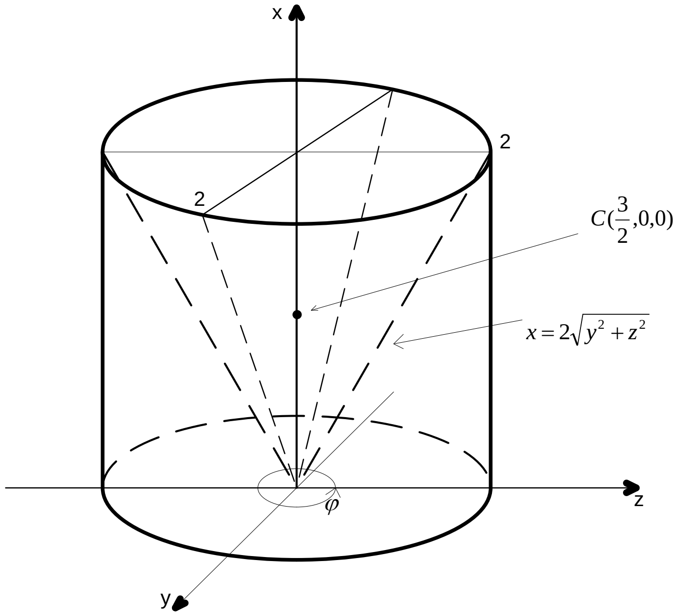


Рис. 2.71

Перейдемо до циліндричних координат за формулами:

$$x = x, \qquad y = \rho cos\varphi, \quad z = \rho sin\varphi.$$

Знайдемо рівняння поверхні і область інтегрування:

$$x = 2\sqrt{\rho^2 cos^2\varphi + \rho^2 sin^2\varphi} = 2\rho,$$

$$0 \le \rho \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le x \le 2\rho.$$

Тоді

$$\iiint\limits_V xdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\rho} xdx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\rho} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 2\rho^3 d\rho =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 d\varphi = 8\int_0^{2\pi} d\varphi = 8\varphi\Big|_0^{2\pi} = 16\pi,$$

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\rho} dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho x\Big|_0^{2\rho} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 2\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 d\varphi = \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{32\pi}{3}.$$

Отже, $x_c = \frac{3}{2}$, а центр маси має координати $C(\frac{3}{2}, 0,0)$.

Список використаних джерел

1. Зайцев, Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навчальний посібник / Євгеній Павлович Зайцев. – Кременчук : Вид-во „Кременчук”, 2011. 573 с.

2. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія: навчальний посібник для університетів. Харків, Основа, 1993. 192 с.

3. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини. [Текст] / В.Н.Боровик, І.В.Зайченко, М.М.Мурач, В.П.Яковець, Суми: Університ. книга, 2003.

4. Томусяк А. А. Геометрія. Ч. 1: Аналітична геометрія. [Текст] / А. А. Томусяк, В. С. Трохименко, Н. М. Шунда, – Вінниця: ВДПУ, 2002.

5. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. . [Текст] / Ю.К.Рудавський. Л.: Бескид Біт, 2002.

6. Кравчук, О. М. Практикум з аналітичної геометрії : навч. посіб. для студ. ВНЗ. Ч. 1 / О. М. Кравчук ; М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки. - Луцьк : ВНУ ім. Лесі Українки, 2012. 228 с.

7. Тевяшев А. Д. Алгебра і геометрія: Лінійна алгебра. Аналітична геометрія : Навч. посіб. для студ. / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин; Ін-т змісту і методів навчання. Х., 2000. 386 с.

8. Математичний аналіз у задачах і прикладах [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл.: У 2 ч. / Л. І. Дюженкова [та ін.]. - К. : Вища школа, 2002 . Ч. 1. 2002. 463 с.

9. Математичний аналіз у задачах і прикладах [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл.: У 2 ч. / Л. І. Дюженкова [та ін.]. - К. : Вища школа, 2002 . Ч. 2. 2003. 470 с.

10. Григоренко В.К. Математичний аналіз в поняттях, прикладах і контрприкладах, або ідеї і методи математичного аналізу [Текст] / Григоренко В. К., Григоренко К. В. ; Черкас. нац. ун-т ім. Богдана Хмельницького. Черкаси : ЧНУ, 2013. 264 с.

11. Полозюк О.Є. Курс лекцій і практикум з вищої математики [Текст] : навч. посібник для студ. вищих навч. закл.: У 3 ч. / О. Є. Полозюк. Донецьк : Юго-Восток, 2001 Ч. 3 : Функції багатьох змінних ; Інтеграл ; Диференціальні рівняння, 2002. 392 с

12. Заболоцький М.В. Математичний аналіз [Текст] : підруч. / М. В. Заболоцький [и др.] ; Львівський національний ун-т ім. Івана Франка. К. : Знання, 2008. 421 с.

13. Практикум з математичного аналізу [Текст] : навч. посіб. / М. В. Заболоцький [и др.]. - Л. : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. - 312 с.