Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Погребний В. Деякі метричні функції, що задають топологію // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2015. – № 1 (4). – С. 15-19.

УДК 517.6

Валерій Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ДЕЯКІ МЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЩО ЗАДАЮТЬ ТОПОЛОГІЮ

Метою даної статті є огляд деяких класів топологічних просторів, топологія яких задається різноманітними метричними функціями.

Топологічні простори є однією з найважливіших структур не лише аналізу, але і всієї сучасної математики. Як відомо, топологічну структуру можна задати різними способами: через околи, відкриті чи замкнені множини, оператори замикання чи ядра і т.д. Одним з найважливіших способів, і, мабуть, найпростішим є задання топології через метрику – це метричні простори, найважливіший тип топологічних просторів. Нагадаємо, що метрикою ρ на множині $X \neq \varnothing$ називається функція ρ: $X^2 \to R$ така, що виконуються аксіоми:

М1. Невід'ємність.

$$\forall x, y \in X\,[\rho(x,y) \geq 0]$$

М2. Віддільність.

$$\forall x, y \in X\,[\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$$

М3. Симетричність.

$$\forall x, y \in X\,[\rho(y,x) = \rho(x,y)]$$

М4. Нерівність трикутника.

$$\forall x, y, z \in X\,[\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)]$$

Упорядкована пара (X, ρ) називається метричним простором. Найважливішим і найвідомішим прикладом метричних просторів є евклідовий простір

$$E^n = \left(R^n, \rho_E\right),\;\; \rho_E(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,,$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

Якщо функція ρ задовольняє лише умови М1, М3, М4, то вона називається півметрикою. В цьому випадку може бути, що «відстань» між різними точками рівна нулю – точки «злипаються», ρ не може розділити всі різні попарно точки. Це пов'язане з аксіомами віддільності.

Також розглядаються простори з симетрикою – це функція ρ, яка задовольняє умови М1, М2, М3. Ці простори цікаві тим, що вони є секвенціальними просторами [6, 94], тобто їх топологічна структура може бути характеризованою за допомогою збіжності послідовностей. Звичайно, можна розглядати і півсиметрики. Не всі простори з симетрикою є просторами Фреше–Урисона, в яких замикання кожної множини співпадає з секвенціальним замиканням [1, 74].

В метричних просторах локальну базу в кожній точці $x_0 \in X$ утворюють кулі $K\left(x_0, \frac{1}{n}\right), n \in N$ (кулі можна брати відкриті чи замкнені), виконується перша аксіома зчисленості і топологія повністю характеризується збіжністю послідовностей по даній метриці. В силу цього протягом 20 століття проблема метризації топологічних просторів була, мабуть, центральною проблемою загальної топології. Найпростіший, і, можливо, історично перший результат у цьому напрямку дає теорема П.С.Урисона [4, 115]: топологічний простір з другою аксіомою зчисленості метризуємий тоді і тільки тоді, коли він регулярний – виконані аксіоми віддільності Т1 та Т3. Метризуємість топологічного простору означає, що в кожній точці $x_0 \in X$ локальну базу утворює сімейство відкритих куль $\left(K\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in N}$. Тепер відомо багато метризаційних теорем (наприклад, [6, 487-499]). Можна будувати різні ланцюги цих теорем, де наступна ґрунтується на попередніх, але перша теорема ланцюга повинна давати доведення існування метрики, яка дає вихідну топологію.

Метризаційні теореми не дуже прості. Ситуація різко спрощується для топологічних лінійних просторів (ТЛП): ТЛП метризуємий тоді і тільки тоді, коли в ньому виконується перша аксіома зчисленості [3, 26]. Оскільки ТЛП має рівномірну структуру, то це, фактично, означає існування зчисленої локальної бази в т. $x = \theta$ – нульового елементу простору. В метризуємому ТЛП завжди можна ввести метрику, яка породжує вихідну топологію, що є інваріантною відносно паралельних переносів: $\forall x, y, z \in X\ [\rho\ (x, y) = \rho\ (x + z, y + z)]$.

Найважливішим класом метричних лінійних просторів є нормовані лінійні простори. Норма на дійсному або комплексному лінійному просторі X – це функція $x \in X \to \|x\| \in R$, що задовольняє аксіоми:

N1. Невід'ємність.

$$\forall x \in X[\|x\| \geq 0]$$

N2. Віддільність.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

N3. Абсолютна однорідність.

$$\forall \lambda \in R(C) \forall x \in X\ [\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|]$$

N4. Субаддитивність.

$$\forall x, y \in X[\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|]$$

Функція $\rho\ (x, y) = \|x - y\|$ є метрика, що породжує топологію $\tau(X)$. Простір E^n – нормований, з евклідовою нормою

$$\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}.$$

Аналогічно півметрикам є і півнорми – не вимагається виконання аксіоми віддільності. Півнорми, як правило, позначають $p(x)$. Півнорми і норми пов'язані з опуклістю множин. Це і забезпечує виконання аксіоми N3. Не всі, навіть метризуємі, ТЛП мають локальну базу в т. $x=\theta$ з опуклих множин. Також важливі і обмежені множини в ТЛП. Відомий критерій нормуємості ТЛП (А.М. Колмогоров) [2, 25]: ТЛП нормуємий тоді і тільки тоді, коли він одночасно локально опуклий і локально обмежений, тобто в ньому існує локальна база в т. $x=\theta$ з опуклих обмежених множин.

В метричних лінійних просторах можна працювати з інваріантною метрикою $\rho(x,y)$, але, все ж, норма зручніша в аналітичних дослідженнях за рахунок аксіоми N3. Хоча не всі метричні лінійні простори нормуємі, та все ж в них можна розглядати не просто інваріантну метрику, а деяке узагальнення норми. Цей результат менш відомий, ніж критерій метризуємості ТЛП. З відомих нам широкорозповсюджених монографій з функціонального аналізу, ця теорема є лише у монографії Г. Шефера [5, 42-44]: Гаусдорфовий ТЛП метризуємий тоді і тільки тоді, коли має зчислений базис околів нульового елемента. В цьому випадку існує функція-псевдонорма $x\in X\to |||x|||\in R$ така що:

PN1. $\forall x\in X[|||x|||\geq 0]$
PN2. $|||x|||=0 \Leftrightarrow x=\theta$
PN3. $\forall x,y\in X\ [|||x+y|||\leq |||x|||+|||y|||]$
PN4. $\forall x\in X\ \forall\lambda\in R(C): |\lambda| \ \leq 1\ [|||\lambda x|||\leq |||x|||]$
PN5. $\rho\ (x,y)=|||x-y|||$ є метрика, яка породжує топологію $\tau(X)$.

Наявність аксіоми PN4 створює деякі зручності в аналітичних дослідженнях, хоча це і не є абсолютною однорідністю.

Топологія в ТЛП може задаватись не тільки однією метричною функцією (метрика, півметрика, симметрика, норма, півнорма, псевдонорма), але і системами таких функцій. Зокрема, топологія локально опуклих ТЛП (ЛВП) задається сімейством півнорм $(p_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ [2, 21]. Фундаментальна система околів нульового елемента задається умовами:

$$V(\theta)=\left\{x\in X\colon \max_{1\leq i\leq n} p_{\alpha_i}(x)<\varepsilon, \forall\varepsilon>0, \forall n\in N, \forall\, p_{\alpha_i}\in (p_\alpha(x))_{\alpha\in A}\right\}.$$

ЛВП метризуємо тоді і тільки тоді, коли існує визначальне зчислене сімейство півнорм [2, 23].

Наступна метрична функція, яка описує топологічні структури, пов'язана з модифікацією умови субаддитивності норми (інші аксіоми залишаються без змін):

$$\|x+y\|_c\leq c(\|x\|_c+\|y\|_c), c=const, c\geq 1.$$

Це квазінормовані простори. Вони узагальнюють нормовані і дають їх при $c=1$. Зокрема, можна розглядати квазібанахові простори. Особливо виділяються квазібанахові алгебри.

Як відмічалось вище, нормуємість ТЛП має місце тоді і тільки тоді, коли він одночасно локально опуклий і локально обмежений. Якщо ТЛП лише локально обмежений, то гарантувати його нормуємість не можна. Але його топологія все ж може бути задана за допомогою метричної функції. А саме: ТЛП є локально обмеженим тоді і тільки тоді, коли його топологія задається *p*-однорідною нормою $\|x\|_p, 0<p\leq 1$ [7]. $\|x\|_p$ має властивості норми NA1, NA2, NA4, а NA3 модифікується таким чином:

$$\forall\lambda\ \forall x\in X\ \left[\|\lambda x\|_p=|\lambda|^p\|x\|_p\right], \lambda\in R \text{ або } \lambda\in C\,.$$

Зокрема, *p*-банаховий простір є частинним випадком *F*-простору [7].

Нехай X – p-банахова комутативна алгебра. Означимо множину $K_s = \left\{ x \in X\colon \lim_{n\to+\infty} \|x^n\|_p = 0 \right\}$. На основі множини K_s можна ввести s-норму елемента: $\|x\|_s = (\sup|\lambda| : \lambda x \in K_s)^{-p}$. При цьому, $x \in K_s$ тоді і тільки тоді, коли $\exists n_0 \in N\colon \|x^{n_0}\|_p < 1$. s-норма має властивості [7]:

$1^0. \|x\|_s \le \|x\|_p \ \ \forall x \in X$

$2^0. \|\lambda x\|_s = |\lambda|^p \|x\|_s$

$3^0. \|x+y\|_s \le \|x\|_s + \|y\|_s$

$4^0. \|xy\|_s \le \|x\|_s \|y\|_s$

$5^0. \|x^n\|_s = \|x\|_s^{\,n}, n \in N$

$6^0. \|x\|_s < 1 \Leftrightarrow x \in K_s$

$7^0. \exists x^{-1} \Leftrightarrow \|x\|_s > 0$

$8^0. \|x\|_s = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_p}$

Якщо X – *F*-простір (повний метризуємий ТЛП), то його топологію можна задати вказаною вище псевдонормою [5]. Також $\tau(X)$ можна задати *F*-нормою, яка має властивості норми NA1, NA2, NA4, а також властивості [7]:

$1^0. |\lambda| = 1 \Rightarrow \|\lambda x\|_F = \|x\|_F$

$2^0. \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|\lambda_n x\|_F = 0, \forall x \in X, \lambda \in R(C)$

$3^0. \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_F = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|\lambda x_n\|_F = 0, \lambda \in R(C).$

Зокрема, в *F*-алгебрах множення елементів поточечно неперервне [7].

Таким чином, відомі різноманітні метричні функції, які описують топологічну структуру багатьох важливих класів топологічних просторів. Ці метричні функції є як широко відомі (метрика, норма, півнорма), так і менш розповсюджені (псевдонорма, *F*-, *p*-, *s*-норми, симетрика). Всі вони важливі тим, що задають топологічну структуру не найбільш загальним способом (через околи чи відкриті або замкнені множини, замикання), а через метричні функції, що наближає нас до найбільш звичних евклідових та нормованих просторів.

Список використаних джерел

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974. – 424 с.
2. Крейн С.Г. и др. Функциональный анализ. СМБ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 448 с.
4. Синюков Н.С., Матвеенко Т.И. Топология. – К.: Вища школа, 1984. – 264 с.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 753 с.
7. Zelasko W. Metric generalisations of Banach algebras // Rosprawy Matematycne, Warszawa, 47 (1965).

Анотація. Погребний В. Деякі метричні функції, що задають топологію.

Топологічні простори є однією з найважливіших структур сучасної математики. Найважливішими їх класами є метричні та лінійні нормовані простори. Крім цих класів є і менш відомі класи просторів, топологія яких задається *різноманітними метричними функціями, що мають спільні властивості з метрикою та нормою. У статті зроблений огляд цих класів топологічних просторів.*

Ключові слова: простір, топологія, метрика, аксіома, норма.

Аннотация. Погребной В. Некоторые метрические функции задающие топологию.

Топологические пространства являются одной из важнейших структур современной математики. Важнейшими их классами являются метрические и линейные нормированные пространства. Кроме этих классов есть и менее известные классы пространств, топология которых задается разнообразными метрическими функциями, имеющими общие свойства с метрикой и нормой. В статье сделан обзор этих классов топологических пространств.

Ключевые слова: пространство, топология, метрика, аксиома, норма.

Abstract. Pogrebnoy W. Some metric functions which define the topology.

Topological spaces is one of the most important structures of modern mathematics. The most important is their classes metric and normed linear space. In these classes are less well-known classes of spaces, topology metric defining the various functions that have common properties with metric and standard. This article provides an overview of these classes of topological spaces.

Keywords: the space, topology, metric, axiom, norm.