

УДК 372.851.2:371.3  
DOI 10.5281/zenodo.14634680

О. О. Одінцова  
Сумський державний педагогічний  
університет імені А.С.Макаренка  
ORCID ID 0000-0002-9948-3801

С. В. Красуцька  
Роменська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №7  
Роменської міської ради Сумської області

## ДО ПИТАННЯ ВИЯВЛЕННЯ ПРОБЛЕМ ПРИ НАВЧАННІ ДЕЯКИМ ТЕОРЕМАМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ПОГЛИБЛЕНОГО РІВНЯ ТА ШЛЯХІВ ЇХ ПОДОЛАННЯ (ЧАСТИНА ДРУГА: ШЛЯХИ УСУНЕННЯ ПРОБЛЕМ)

*Відповідно до результатів опитування вчителів математики щодо виключення з розгляду питань, пов'язаних з вивченням теорем Чеви та Менелая, головними причинами такого становища є: обмаль часу у вчителів для створення методично виваженої системи задач, зокрема і для контролю знань. Тобто, не дивлячись на присутність даного матеріалу в підручниках, система задач, що наявна там, не задовольняє потреб вчителів у цьому питанні. Крім того, слабо розвинена просторова уява сучасних учнів та упереджене ставлення їх до геометрії стають серйозними перешкодами на шляху опанування матеріалу та застосування його у майбутньому.*

*Ця стаття присвячена формуванню шляхів виходу із зазначеної ситуації на основі принципу виділення «ядра знань» при роботі в класі: зупинятися безпосередньо на формулюванні самих теорем Чеви, Менелая та на складних задачах щодо їх використання, зокрема до встановлення відомих фактів про лінії в трикутнику, та на задачах за готовими малюнками; решту матеріалу варто виносити на позакласні заходи для зацікавлених учнів. При чому на початку потрібно розглядати теореми Чеви і Менелая у синергії, оскільки формулювання цих теорем пов'язані за малим принципом двоїстості, а також через доволі схожі способи їх застосування. Головним при цьому є виокремлення (розгляд) потрібного трикутника, визначення напрямку його «обходу», записом відповідних співвідношень та знаходження довжин потрібних відрізків (синусів відповідних кутів) або їх відношень.*

*У статті наведено порівняльну таблицю з 8 доведень про існування та єдиність центроїду, інцентру та ортоцентру трикутника з використанням теорем Чеви та Менелая (у формулюванні як через відношення довжин відрізків, так і в тригонометричній формі). Розписано, які з доведень краще використовувати при вивченні відповідних тем, які – при вивченні інших, зокрема «Співвідношення у прямокутному трикутнику», а які – у позакласній роботі.*

*Також наведено задачу про точку Нагеля (як точку перетину відрізків, які сполучають вершини трикутника з точками дотику зовнівписаних кіл), задачу на використання теореми Менелая та для закріплення знань про різні відрізки у трикутнику, знання останніх стає у нагоді при розв'язуванні задач на математичних олімпіадах.*

*На останок, розглянуто задачу, розв'язування якої безпосередньо демонструє користь від теореми Менелая: воно скорочується, а рисунок до задачі стає менш захаращеним.*

*Наведені у статті підходи до навчання учнів теоремам Чеви і Менелая можуть бути розширені задачами на доведення, обчислення (відрізків, кутів). Паралельно можна робити ознайомлення учнів із олімпіадними задачами минулих років, розв'язування яких базувалося на розглядуваних теоремах.*

**Ключові слова:** навчання геометрії на поглибленому рівні, теорема Чеви, теорема Менелая, центроїд, інцентр, ортоцентр, позакласна робота з математики, олімпіада з математики.

**Постановка проблеми.** У статті [1], що є першою частиною даної роботи, наведено результати опитування вчителів математики, що навчають геометрії на поглибленому рівні, стосовно розгляду питань, пов'язаних із теоремами Чеви та Менелая. Зокрема там зазначено, що головними причинами проблем, які виникають при навчанні теоремам Чеви та Менелая, є: важкість розуміння учнями матеріалу через його складність (незрозумілість формулювання теорем, складність їх доведень, незвичність потрібних записів та їх формування); нестача у переважній більшості вчителів часу для створення методично виваженої системи задач, зокрема і для контролю знань; нестача часу в більшості вчителів для реалізації створеної системи завдань під час уроків; слабо розвинена просторова уява сучасних учнів та упереджене ставлення їх до геометрії.

Останнє стає серйозною перешкодою на шляху опанування матеріалу та застосування його у майбутньому, зокрема при розв'язуванні задач на різних математичних змаганнях.

Усі зазначені причини до нині є актуальним, не дивлячись на те, що питання, пов'язані з теоремами Чеви і Менелая, з'явилися в програмі та у підручниках з геометрії поглибленого рівня вивчення ще у 2008 році [2], [3], [4] як прояв прагнення авторів програм з математики долучити якомога ширше коло учнів до геометричного матеріалу, який дозволив би розв'язувати задачі на різних математичних змаганнях. Крім того, результати опитування свідчать, що система задач у підручниках з геометрії для поглибленого рівня вивчення з відповідної теми не задовольняє потреб вчителів.

**Аналіз актуальних досліджень.** Питанню розв'язування геометричних задач із використанням «некласичних» (для шкільного курсу) фактів з геометрії трикутника присвячено доволі велике число робіт: Кушніра І., Ясинського В., Жидкова С., Кадубовського О., Кобко Л. та багатьох інших. Але проблеми, які виникають у вчителів при навчанні цим темам, на жаль, раніше не розглядалися, як і пропозиції щодо їх усунення.

**Мета статті** – розглянути можливі шляхи усунення проблем, які виникають у вчителів при навчанні геометричного матеріалу, пов'язаного з теоремами Чеви та Менелая, які були виокремлені при аналізі спеціально проведеного анкетування [1].

**Виклад основного матеріалу.** Аналіз статистики розв'язування завдань з геометрії на III (обласному) етапі Всеукраїнської олімпіади з математики, зокрема тих, де потрібно застосовувати теореми Чеви та Менелая, за останні 15 років в Сумській області на жаль є невтішним: найчастіше учасники зупиняються лише на побудові рисунка, не переходячи до розв'язання.

Якщо ж підсумовувати результати анкетування вчителів математики, які навчають геометрії на поглибленому рівні в основній школі, можна стверджувати, що головною проблемою при навчанні учнів матеріалу, пов'язаного з теоремами Чеви та Менелая (так само, як й іншого «некласичного» матеріалу з геометрії трикутника) є обмаль часу у вчителів для створення методично виваженої системи задач, зокрема і для контролю знань. Тобто, не дивлячись на присутність даного матеріалу в підручниках, система задач, що наявна там, не задовольняє потреб вчителів у цьому питанні. Крім того, слабо розвинена просторова уява сучасних учнів та упереджене ставлення їх до геометрії стають серйозними перешкодами на шляху опанування матеріалу та застосування його у майбутньому.

Не дивлячись на виявлені проблеми, не варто виключати з розгляду питання, пов'язані з теоремами Чеви і Менелая, варто змінити загальні підходи до цього матеріалу. Так на уроках при розгляді зазначеного матеріалу варто застосувати принцип виділення «ядра знань»: зупинитися безпосередньо на формулюванні самих теорем Чеви, Менелая та на нескладних задачах щодо їх використання, зокрема до встановлення відомих фактів про точки перетину одноіменних ліній у трикутнику, та за готовими малюнками. При чому на початку потрібно розглядати теореми Чеви і Менелая у синергії, оскільки формулювання цих теорем пов'язані за малим принципом двоїстості, демонструючи симетричну побудову евклідової геометрії, а також через доволі схожі способи їх застосування. Головним при цьому є виокремлення (розгляд) потрібного трикутника, визначення напряму його «обходу», записом відповідних співвідношень та знаходження довжин потрібних відрізків (синусів відповідних кутів) або їх відношень.

Виходячи з власного педагогічного досвіду та думки вчителів, що навчають теоремам Чеви та Менелая [1], першою доцільно розглядати теорему Чеви через простіше застосування, а потім вже теорему Менелая для нескладних задач. Решту питань варто винести на гурток, факультатив чи підготовку до олімпіади з математики. Такий поділ дозволить ознайомити усіх учнів, що навчаються на поглибленому рівні, з незвичними теоремами та їх застосуванням, а тим, хто проявить зацікавленість, розширити знання та удосконалити навички застосування теорем на позакласних заняттях. Крім того буде реалізовано принципи побудови навчального матеріалу від простого до складного та розбиття складної проблеми (задачі) на більш простіші.

Навчання учнів різних категорій теоремам Чеви, Менелая та їх застосуванням дозволяє: по – перше, демонструвати як витончено можна доводити такі важко встановлювані геометричні факти як: перетин трьох прямих в одній точці, належність трьох точок одній прямій; по-друге, через незвичність використання розглядуваних теорем розвивати просторове мислення учнів; по-третє, використовувати широкий спектр знань про трикутники та інші геометричні фігури.

На наш погляд, знайомство із застосуванням теорем варто почати із задач за готовими рисунками, а доведення відомих фактів про існування та єдиність центроїду, інцентру та ортоцентру за допомогою теорем Чеви та Менелая слід проводити порівнюючи підходи до доведення. У таблиці 1 наведено зазначені способи і причому рисунок до всіх способів один і той самий (рис. 1).

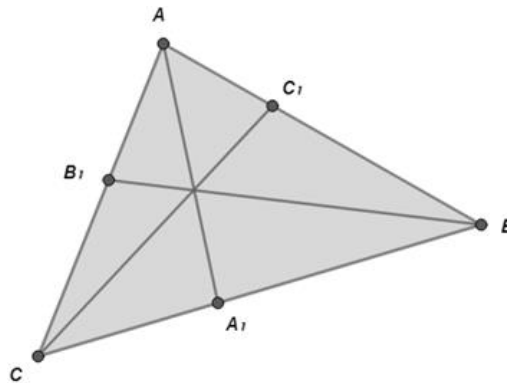


Рис.1.

Таблиця 1

**Порівняння доведень перетину одноіменних ліній в трикутнику за допомогою теорем Чеви та Менелая**

Тип точки	Застосування теореми Чеви	Застосування теореми Менелая
1. Центроїд (перетин медіан трикутника)	<p>Нехай <math>AA_1, BB_1, CC_1</math> - медіани трикутника <math>ABC</math>.</p> <p>Розглядаємо <math>\triangle ABC</math>. Обходячи трикутник <math>ABC</math> за годинниковою стрілкою та замінюючи частини сторін, будемо мати:</p> $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot AC} = 1.$ <p>Отже, за теоремою Чеви медіани <math>\triangle ABC</math> перетинаються в одній точці.</p>	<p>1.2. Нехай дві медіани <math>AA_1</math> та <math>BB_1</math> перетинаються в точці <math>O</math>. З'ясуємо чи проходить медіана <math>CC_1</math> через цю точку.</p> <p>Для <math>\triangle ABB_1</math> та січної <math>CC_1</math> (обхід за годинниковою стрілкою) співвідношення із теореми Менелая, враховуючи, що</p> $BO = 2 B_1O,$ <p>буде мати вид</p> $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{AC_1}{AC_1} \cdot \frac{B_1O}{OB_1} \cdot \frac{B_1C}{2B_1C} = 1,$ <p>що доводить перетин медіан в одній точці.</p>

Тип точки	Застосування теореми Чеви	Застосування теореми Менелая
<p>2. Інцентр (перетин бісектрис трикутника)</p>	<p>Нехай <math>AA_1, BB_1, CC_1</math> – бісектриси внутрішніх кутів <math>\triangle ABC</math>.</p> <p>2.1.1. Форма теореми Чеви із використанням відношення відрізків. За властивістю бісектриси кута для бісектриси <math>AA_1</math>: <math>\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}</math>. Аналогічно і для інших кутів трикутника. Отже, обходячи <math>\triangle ABC</math> проти годинникової стрілки замінюючи відношення частин сторін через відношення сторін, будемо мати:  <math display="block">\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1,</math> звідки випливає, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.</p>	<p>2.2.1. Форма теореми Менелая із використанням відношення відрізків. Нехай дві бісектриси <math>BB_1</math> та <math>CC_1</math> перетинаються в точці <math>O</math>. З'ясуємо чи проходить бісектриса <math>CC_1</math> через цю точку. Для <math>\triangle CB_1B</math> та січної <math>AA_1</math> (обхід проти годинникової стрілки) слід з'ясувати, чому буде дорівнювати співвідношення  <math display="block">\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC}</math> За властивостями бісектриси  <math display="block">\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}</math> У <math>\triangle CB_1B</math> відрізок <math>CO</math> – бісектриса, тому  <math display="block">\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC}{CB_1}</math> У свою чергу, виходячи з того, <math>BB_1</math> – бісектриса <math>\triangle ABC</math>  <math display="block">\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}</math> <math display="block">\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC - B_1C}{B_1C} = \frac{AC}{B_1C} - 1 = \frac{b}{B_1C} - 1 = \frac{c}{a},</math> <math display="block">B_1C = \frac{ab}{a+c}</math> І, відповідно,  <math display="block">\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC}{CB_1} = \frac{a(a+c)}{ab} = \frac{a+c}{b}</math> а <math display="block">\frac{B_1A}{AC} = \frac{AC - B_1C}{AC} = 1 - \frac{B_1C}{AC} = 1 - \frac{ab}{(a+c)b} = 1 - \frac{a}{a+c} = \frac{c}{a+c}</math> та  <math display="block">\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{c}{a+c} = 1.</math> Отже, за теоремою Менелая бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.</p>
	<p>2.1.2. Тригонометрична форма теореми Чеви. Оскільки <math>AA_1, BB_1, CC_1</math> – бісектриси внутрішніх кутів трикутника <math>ABC</math>, то <math>\angle CAA_1 = \angle BAA_1, \angle ABB_1 = \angle CBB_1, \angle ACC_1 = \angle BCC_1</math>. Обходячи <math>\triangle ABC</math> за годинниковою стрілкою та використовуючи тригонометричну формулу теореми Чеви, одержуємо:</p>	<p>2.2.2. Тригонометрична форма теореми Менелая. Розглядати не варто через складність математичних перетворень.</p>

Тип точки	Застосування теореми Чеви	Застосування теореми Менелая
	$\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle CBB_1} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle ACC_1} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$ <p>що гарантує перетин бісектрис трикутника в одній точці.</p>	
<p>3. Ортоцентр (перетин висот гострокутного трикутника)</p>	<p>Нехай <math>AA_1, BB_1, CC_1</math> – висоти гострокутного <math>\Delta ABC</math>.</p> <p>3.1.1. Форма теореми Чеви із використанням відношення відрізків. Із <math>\Delta AC_1C</math> (<math>\angle C_1 = 90^\circ</math>) <math>AC_1 = AC \cdot \cos A</math>. Аналогічно із <math>\Delta AB_1B</math>: <math>AB_1 = AB \cdot \cos A</math>, для інших відрізків будемо мати: <math>BC_1 = BC \cdot \cos B</math>, <math>BA_1 = AB \cdot \cos B</math>, <math>CA_1 = AC \cdot \cos C</math>, <math>CB_1 = BC \cdot \cos C</math>. Обходячи <math>\Delta ABC</math> за годинниковою стрілкою, будемо мати:</p> $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC \cos A}{BC \cos B} \cdot \frac{AB \cos B}{AC \cos C} \cdot \frac{BC \cos C}{AB \cos A} = 1,$ <p>що і доводить перетин висот гострокутного трикутника в одній точці.</p> <p>3.1.2. Тригонометрична форма теореми Чеви. Із <math>\Delta AC_1C</math> (<math>\angle C_1 = 90^\circ</math>) <math>\angle ACC_1 = 90^\circ - \angle A</math>. Аналогічно із <math>\Delta AB_1B</math>: <math>\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle A</math>, для інших кутів будемо мати: <math>\angle BAA_1 = 90^\circ - \angle B</math>, <math>\angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B</math>, <math>\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C</math>, <math>\angle CBB_1 = 90^\circ - \angle C</math>.</p>	<p>3.2.1. Форма теореми Менелая із використанням відношення відрізків. Нехай дві висоти <math>AA_1</math> та <math>BB_1</math> перетинаються в точці <math>O</math>. З'ясуємо чи проходить висота <math>CC_1</math> через цю точку. Для <math>\Delta ABB_1</math> та січної <math>CC_1</math> (обхід за годинниковою стрілкою) слід з'ясувати, чому буде дорівнювати співвідношення</p> $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA}.$ <p>Із <math>\Delta AC_1C</math> (<math>\angle C_1 = 90^\circ</math>) <math>AC_1 = AC \cdot \cos A</math>. Аналогічно <math>BC_1 = AB \cdot \cos B</math>, <math>CB_1 = BC \cdot \cos C</math>, <math>BA_1 = AB \cdot \cos B</math>, <math>BC_1 = BC \cdot \cos B</math>. Із <math>\Delta BA_1O</math> (<math>\angle A_1 = 90^\circ</math>): <math>BO = \frac{BA_1}{\cos(90^\circ - \angle C)} = \frac{BA \cos B}{\sin C}</math>. Із <math>\Delta CB_1O</math> (<math>\angle B_1 = 90^\circ</math>): <math>OB_1 = CB_1 \cdot \text{tg}(90^\circ - \angle A) = CB_1 \cdot \text{ctg} A</math>. Підставляючи отримані вирази у співвідношення, отримаємо</p> $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{AC \cos A}{BC \cos B} \cdot \frac{BA \cos B}{\sin C} \cdot \frac{1}{CB_1 \text{ctg} A} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{BA \sin A}{BC \sin C} = \frac{BB_1}{BB_1} = 1,$ <p>що і доводить перетин висот гострокутного трикутника в одній точці. Останні перетворення отримані із <math>\Delta AB_1B</math> та із <math>\Delta CB_1B</math>.</p> <p>3.2.2. Тригонометрична форма теореми Менелая. Розглядати не варто через складність математичних перетворень.</p>

Тип точки	Застосування теореми Чеви	Застосування теореми Менелая
	<p>Обходячи <math>\triangle ABC</math> за годинниковою стрілкою та використовуючи тригонометричну формулу теореми Чеви, одержуємо:</p> $\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle CBB_1} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle ACC_1} =$ $= \frac{\sin(90^\circ - \angle C)}{\sin(90^\circ - \angle B)} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \angle A)}{\sin(90^\circ - \angle C)} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \angle B)}{\sin(90^\circ - \angle A)} = 1.$ <p>Що і доводить перетин висот гострокутного трикутника в одній точці.</p>	

**Зауваження 1.** Доведення існування та єдиність розглянутих точок для тупокутного трикутника – аналогічні. Їх можна запропонувати як домашні завдання для сильних учнів.

2. Порівняння із наведених у таблиці доведень показує, що застосування теореми Менелая складніше порівняно із застосуванням теореми Чеви. Тому частину цих доведень можна перенести на позакласні заняття, наприклад, доведення, позначені 2.2.1 та 3.2.1.

3. Пропонувати задачі на застосування розглянутих теорем можна не тільки під час відповідних тем, а й органічно вплітати в інші теми, наприклад, доведення 3.1.2 можна використати при вивченні теми «Співвідношення у прямокутному трикутнику».

При вивченні питань, пов'язаних із властивостями зовнівписаних кіл, можна розглянути таку задачу на доведення.

**Задача 1.** Довести, що відрізки, які сполучають вершини трикутника з точками дотику зовнівписаних кіл, перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

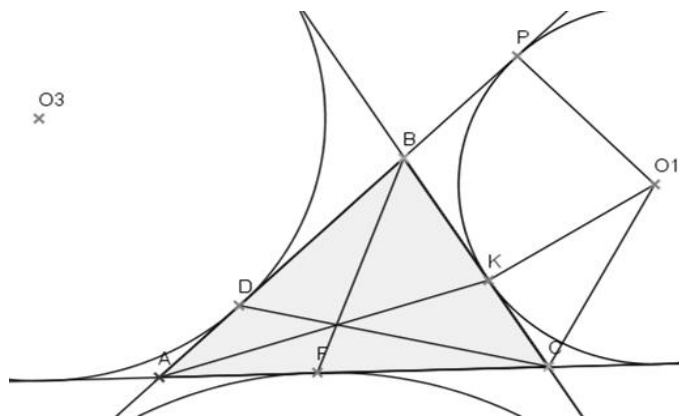


Рис. 2.

Нехай задано  $\triangle ABC$ , його зовнівписані кола з центрами  $O_1, O_2, O_3$  дотикаються сторін  $BC, AC, AB$  у точках  $K, F, D$  відповідно (рис. 2).

Для з'ясування перетину в одній точці відрізків  $AK, BF$  та  $CD$  слід застосувати теорему Чеви, обходячи  $\triangle ABC$  проти годинникової стрілки, з'ясовуючи чи буде значення виразу

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CF}{FA}$$

дорівнювати 1.

За властивостями зовнівписаних кіл маємо:  $AP = AL = p$ , де  $p$  – півпериметр  $\triangle ABC$ , а точки  $P$  і  $L$  – точки дотику зовнівписаного кола до продовження сторін  $AB$  та  $AC$  (рис. 3)

За властивостями дотичних до кола  $BK = BP, KC = CL$  та

$$BK = BP = AP - AB = p - c, \text{ а } KC = CL = AL - AC = p - b.$$

Аналогічно для інших зовнівписаних кіл (рис. 2):  $AD = p - b, BD = p - a, AF = p - c, CF = p - a$ .

Тоді:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1,$$

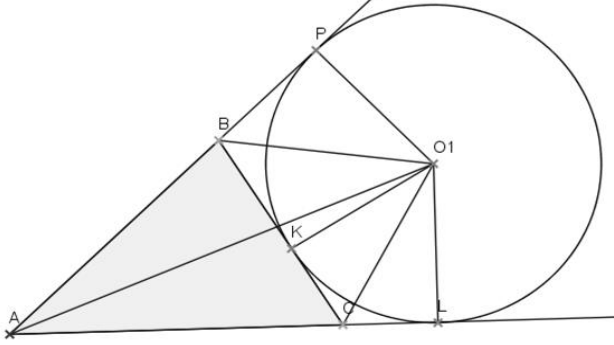


Рис. 3.

вписаного кола (так, у цьому випадку  $AD = p - a$ ,  $CF = p - c$ , аналогічно інші) та з'ясувати чи будуть відрізки, аналогічні до відрізків задачі 2, перетинатися в одній точці.

Точка перетину відрізків, які сполучають вершини трикутника з точками дотику зовнівписаних кіл, теж має свою назву – серединна точка або точка Нагеля, на честь німецького математика Христіана Генріха фон Нагеля (28.02.1803 — 27.10.1882), який досліджував її властивості. Тому можна в продовження теми запропонувати учням з'ясувати властивості точки Нагеля, зокрема чому її називають серединною, а також властивості інших цікавих точок у трикутнику (Жергона, Лемуана тощо).

Для кращого запам'ятовування учнями, що готуються до математичних змагань, виразів різних відрізків трикутника можна розглянути наступну задачу, яка хоч і є задачею на доведення, але використання теореми Менелая відбувається не прямо.

**Задача 2.** ([5, с.71]) Довести, що пряма, яка проходить через середину сторони  $AB$  трикутника  $ABC$  і його інцентр, ділить навпіл відрізок, що сполучає вершину  $C$  та точку дотику вписаного кола зі стороною  $AB$  (рис. 4).

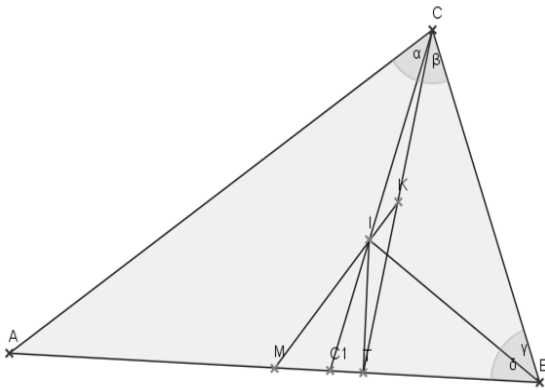


Рис. 4.

Розв'язання. Нехай  $AM = MB$ ,  $I$  – інцентр, відповідно центр вписаного кола,  $CC_1$  – бісектриса кута при вершині  $C$ ,  $T$  – точка дотику  $AB$  та вписаного кола (тоді  $IT \perp AB$ ), а  $K$  – точка перетину  $MI$  та  $CT$ .

Слід показати, що точка  $K$  – середина  $CT$ .

За теоремою Менелая для  $\Delta CC_1T$  і січної  $MK$  (обхід проти годинникової стрілки):

$$\frac{C_1I}{IC} \cdot \frac{CK}{KT} \cdot \frac{TM}{MC_1} = 1 \quad (1)$$

Оскільки  $BI$  – бісектриса  $\Delta CC_1B$ , то

$$\frac{CI}{IC_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{a}{BC_1}.$$

Міркуючи аналогічно як в доведенні 2.2.1 (таблиця 1), легко встановити, що

$$BC_1 = \frac{ac}{a+b},$$

тоді

$$\frac{CI}{IC_1} = \frac{a(a+b)}{ac} = \frac{a+b}{c},$$

Оскільки  $BT = p - b$ , де  $p$  – півпериметр, то

$$C_1M = BM - BC_1 = \frac{c}{2} - \frac{ac}{a+b} = \frac{ac + bc - 2ac}{2(a+b)} = \frac{bc - ac}{2(a+b)} = \frac{c(b-a)}{2(a+b)},$$

$$\text{а } MT = MB - BT = \frac{c}{2} - p + b = \frac{c}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{c-a-b-c+2b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Підставляючи у вираз (1) одержані вирази для відрізків, що там фігурують, одержимо:

$$\frac{CK}{KT} \cdot \frac{c}{a+b} \cdot \frac{(b-a) \cdot 2(a+b)}{2 \cdot c(b-a)} = 1$$

$$\text{і } \frac{CK}{KT} = 1,$$

тобто  $CK = KT$ , що і слід було показати.

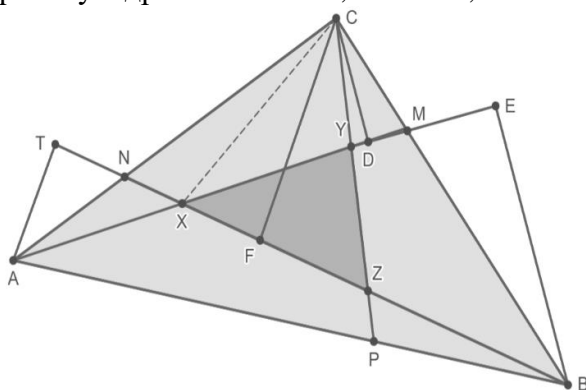
Важливість знання розглядуваних теорем Чеви, Менелая та їх застосування можна продемонструвати на прикладі розв'язування наступної задачі. Останнє скорочується, якщо в його основу покласти теорему Менелая, при цьому рисунок до задачі стає менш захарашеним. Зрозуміло, що дану задачу варто розглядати на позакласних заняттях, починаючи з другого семестру 8 класу.

**Задача 3.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  і  $AB$   $\triangle ABC$  вибрано точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  так, що

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = 4.$$

Обчислити площу трикутника, утвореного прямими  $AM$ ,  $BN$  і  $CP$ , якщо  $S_{\triangle ABC} = Q$ .

Розв'язання (без використання теореми Менелая). Позначимо через  $X$ ,  $Y$  та  $Z$  – точки перетину відрізків  $AM$  і  $BN$ ,  $AM$  і  $CP$ ,  $BN$  і  $CP$  відповідно (рис. 5).



З рисунка видно, що

$$S_{\triangle XYZ} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AXB} - S_{\triangle BZC} - S_{\triangle CYA},$$

$$\text{а } S_{\triangle AXB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BXC} - S_{\triangle AXC}.$$

Аналогічно можна знайти вирази для площ інших трикутників  $\triangle AYC$  та  $\triangle BZC$ .

Розглянемо  $\triangle AXB$  і  $\triangle BXC$ , в яких  $BX$  – спільна сторона, тому відповідно відношення їх площ

$$\frac{S_{\triangle AXB}}{S_{\triangle BXC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot XB \cdot AT}{\frac{1}{2} \cdot XB \cdot BF} = \frac{AT}{CF},$$

Рис. 5.

де  $AT$  – висота  $\triangle AXB$ , а  $CF$  – висота  $\triangle BXC$ .

Розглянемо  $\triangle ATN$  та  $\triangle CFN$ . Ці трикутники подібні, оскільки  $\angle ATN = \angle CFN = 90^\circ$  і  $\angle ANT = \angle CNF$  як вертикальні. Отже,

$$\frac{AT}{CF} = \frac{AN}{CN} = \frac{1}{4} \text{ і } \frac{S_{\triangle AXB}}{S_{\triangle BXC}} = \frac{1}{4}.$$

Розглянемо  $\triangle AXC$  та  $\triangle AXB$ . Оскільки  $AX$  – спільна, то

$$\frac{S_{\triangle AXC}}{S_{\triangle AXB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AX \cdot CD}{\frac{1}{2} \cdot AX \cdot BE} = \frac{CD}{BE},$$

де  $CD$  – висота  $\triangle AXC$ , а  $BE$  – висота  $\triangle AXB$ .

Виходячи з того, що  $\triangle CDM \sim \triangle BEM$  ( $\angle CDM = \angle BEM = 90^\circ$  і  $\angle CMD = \angle BME$  як вертикальні), маємо, що

$$\frac{CD}{BE} = \frac{CM}{MB} = \frac{1}{4} \text{ і } \frac{S_{\triangle AXC}}{S_{\triangle AXB}} = \frac{1}{4}.$$

Тепер

$$\begin{aligned} S_{\triangle AXB} &= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BXC} - S_{\triangle AXC} \quad | : S_{\triangle AXB}, \\ 1 &= \frac{S}{S_{\triangle AXB}} - \frac{S_{\triangle AXC}}{S_{\triangle AXB}} - \frac{S_{\triangle BXC}}{S_{\triangle AXB}} \text{ і} \\ \frac{Q}{S_{\triangle AXB}} &= 1 + \frac{S_{\triangle AXC}}{S_{\triangle AXB}} + \frac{S_{\triangle BXC}}{S_{\triangle AXB}} = 1 + \frac{1}{4} + 4 = \frac{21}{4}, \\ \text{Тому } S_{\triangle AXB} &= \frac{4}{21} Q. \end{aligned}$$

Аналогічно можна встановити, що

$$S_{\triangle AYC} = \frac{4}{21} Q \text{ та } S_{\triangle BZC} = \frac{4}{21} Q$$

$$\text{і, відповідно, } S_{\triangle XYZ} = Q - 3 \cdot \frac{4}{21} Q = \frac{3}{7} Q.$$

Розв'язання задачі 3 із використанням теореми Менелая ([5, с. 107]).

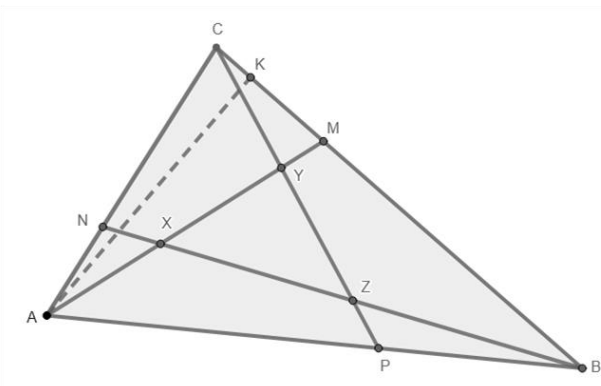


Рис. 6.

В свою чергу:

$$\frac{BC}{BM} = \frac{BM+MC}{MB} = 1 + \frac{MC}{MB} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Застосувавши теорему Менелая для  $\triangle ACM$  і січної  $BN$  (обхід – проти годинникової стрілки), будемо мати:

$$\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AX}{XM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1 \text{ та}$$

$$4 \cdot \frac{AX}{XM} \cdot \frac{4}{5} = 1, \text{ тому } \frac{AX}{XM} = \frac{5}{16}.$$

відповідно

$$\frac{AM}{AX} = \frac{AX+XM}{AX} = 1 + \frac{XM}{AX} = 1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5} \text{ і } S_{\triangle ABX} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AX}{AM} Q = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{21} Q = \frac{4}{21} Q.$$

Аналогічний вираз для площ для інших трикутників:  $S_{\triangle CAU} = S_{\triangle CBZ} = S_{\triangle ABX} = \frac{4}{21} Q$ .

Оскільки  $S_{\triangle XYZ} = Q - 3 \cdot S_{\triangle ABX} = Q - \frac{3 \cdot 4}{21} Q = \frac{3}{7} Q$ . Що збігається з попереднім.

Відповідь:  $S_{\triangle XYZ} = \frac{3}{7} Q$ .

Для закріплення обох розв'язувань можна учням запропонувати повторити їх вдома, вважаючи, що

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k.$$

При цьому відповідь буде  $S_{\triangle XYZ} = \frac{(k-1)^2}{k^2+k+1} Q$ .

**Висновки та перспективи подальших наукових розвідок.** Наведені у статті підходи до навчання учнів теоремам Чеви і Менелая звісно можуть бути розширені задачами на доведення, обчислення (відрізків, кутів). Паралельно можна робити ознайомлення учнів із олімпіадними задачами минулих років, розв'язування яких базувалося на розглядуваних теоремах.

Відкритим залишається питання про систему контролю знань учнів. Але, на наше глибоке переконання, опрацювання та застосування наведеного у статті матеріалу стане поштовхом вчителям для створення такої власної системи.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Одінцева, О. О., Красуцька, С. В. (2024). До питання виявлення проблем при навчанні деяким теоремам у шкільному курсі геометрії поглибленого рівня та шляхів їх подолання. Частина перша: проблеми. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1(23), 25–31. (Odintsova, O. O., Krasutska, S. V. (2024). On the issue of identifying problems in teaching some theorems in the school course of advanced geometry and ways to overcome them. Part one: problems. Topical issues of natural science and mathematics education, 1(23), 25–31).
2. Програма для класів з поглибленим вивченням математики, 8–9 класи. Рекомендовано МОН України (лист № 1/11 – 2151 від 30.05.2008 р.). (2008). 10(86). (Program for classes with advanced study of mathematics, grades 8–9. Recommended by the Ministry of Education and Science of Ukraine (letter No. 1/11 – 2151 dated 05/30/2008). (2008). 10(86)).

3. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2016). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2016). Geometry for general educational institutions with advanced study of mathematics: a textbook for 8th grade of general educational institutions. Kharkiv: Himnaziia).
4. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2016). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2016). Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for 9th grade general educational institutions. Kharkiv: Himnaziia).
5. Жидков, С. І. (2010). Теорема Чеви і Менелая : від теорії до практики. Харків : Видавнича група «Основа». Бібліотека журналу «Математика в школах України», 6(90). (Zhidkov, S. I. (2010). Theorems of Cheva and Menelaus: from theory to practice. Kharkiv: Publishing group "Osnova". Library of the journal "Mathematics in Schools of Ukraine", 6(90)).

**Odintsova O. O., Krasuts'ka S. V. On the issue of identifying problems in teaching some theorems in the advanced geometry's school curriculum and the ways to overcome them. Part 2: The ways to solve the problems.**

*According to the results of a survey of mathematics teachers regarding the exclusion from consideration of questions related to the study of the Cheva's and Menelaus' theorems. The main reasons for this situation are: lack of time for teachers to create a methodically balanced system of tasks, in particular, to control knowledge. That is, despite the presence of this material in textbooks, the system of tasks available there does not satisfy the needs of teachers in this matter. In addition, the poorly developed spatial imagination of modern students and their prejudiced attitude to geometry become serious obstacles on the way to mastering the material and applying it in the future.*

*This article is devoted to the formation of ways out of the specified situation based on the principle of identifying the "core of knowledge" when working in the classroom: focusing directly on the formulation of the Cheva's and Menelaus theorems and on simple tasks related to their use, in particular, to establishing known facts about lines in a triangle, and on tasks based on ready-made drawings; the rest of the material should be taken to extracurricular activities for interested students. The main thing is to select (consider) the desired triangle, determine the direction of its "rounding", write down the corresponding ratios and find the lengths of the required segments (sines of the corresponding angles) or their ratios.*

*There is provided a comparative table of 8 proofs of the existence and unity of the centroid, incenter, and orthocenter of a triangle using the Cheva's and Menelaus theorems (formulated both through the ratio of segment lengths and in trigonometric form) in the article. It is written which of the proofs are better to use when studying relevant topics, which – when studying others, in particular "Ratio in a right triangle", and which – in extracurricular work.*

*There is also consider a problem about the Nagel point (as a point of intersection of segments that connect the triangles vertices with the points of contact of external circles), a problem for using Menelaus' theorem and for consolidating knowledge about different segments in a triangle, knowledge of the latter comes in handy when solving problems on mathematical Olympiads.*

*Finally, we consider a problem whose solution directly demonstrates the benefit of Menelaus' theorem: it is shortened, and the drawing for the problem becomes less cluttered.*

*The approaches to teaching students Cheva's and Menelaus' theorems presented in this article can be extended with problems of proof and calculation (of segments and angles). At the same time, students can be introduced to the previous years' Olympiad's problems, the solution of which was based on the theorems under consideration.*

**Key words:** *teaching geometry at an advanced level, Cheva's theorem, Menelaus' theorem, centroid, incenter, orthocenter, extracurricular work in mathematics, mathematics Olympiad.*