**Друшляк М.Г.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики,
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
м. Суми, Україна

# ВІЗУАЛІЗОВАНІ ЗАВДАННЯ ЯК ЗАСОБИ ФОРМУВАННЯ ВІЗУАЛЬНО-ІНФОРМАЦІЙНОЇ КУЛЬТУРИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

**Анотація.** Постійне вдосконалення інформаційних засобів висуває якісно нові вимоги до фахової підготовки майбутнього вчителя математики. Проблема вибору таких засобів з метою формування візуально-інформаційної культури майбутніх вчителів математики є актуальною особливо при вивченні дисциплін фундаментальної предметної підготовки. Вирішення проблеми вбачаємо у використанні візуалізованих завдань з профільних дисциплін. Використання візуалізованих завдань в процесі фахової підготовки майбутніх вчителів математики дозволяє швидко засвоювати певні фрагменти теорії, формулювати і розповсюджувати узагальнений алгоритм практичних дій, акцентувати увагу на вузлових моментах процесу розв’язування задачі. Представлено авторські приклади візуалізованих завдань у вигляді візуалізованих динамічних моделей на базі програм динамічної математики з таких фахових дисциплін підготовки майбутнього вчителя математики, таких як «Математичний аналіз», «Аналітична геометрія», «Проективна геометрія», «Дискретна математика», «Теорія ймовірностей».
**Ключові слова:** візуалізація, візуалізоване завдання, візуалізоване завдання з фахової дисципліни, візуально-інформаційна культура майбутнього вчителя математики, підготовка майбутнього вчителя математики.
**Abstract.** Continuous improvement of information means puts forward qualitatively new requirements for the professional training of the future math teacher. The problem of choosing such tools for forming a visual and informational culture of future math teachers is relevant, especially in the study of the disciplines of fundamental subject preparation. We see the solution to this problem in the use of visualized tasks in specialized disciplines. The use of visualized tasks in the process of professional training of future math teachers allows you to quickly learn certain pieces of theory formulate and disseminate a generalized algorithm of practical actions, and focus on the nodal moments of the process of solving the problem. The author presents examples of visualized tasks in the form of visualized dynamic models based on dynamic mathematics software in such professional disciplines of preparation of the future math teacher, such as "Mathematical analysis", "Analytical geometry", "Projective geometry", "Discreet mathematics".
**Keywords:** visualization, visualized task, visualized task in a professional discipline, visual and informational culture of a future math teacher, preparation of a future math teacher.

**Постановка проблеми.** Класичні математичні курси є системно і фундаментально побудованими, але в той же час вони є досить гнучкими стосовно упровадження сучасної інформаційної підтримки. Така підтримка полягає, зокрема, у залученні технічних і спеціалізованих програмних засобів, використання яких покликане спростити і пришвидшити розрахунки, візуалізувати одержані моделі, досліджувати математичні об'єкти у динаміці.

Розвиток і постійні оновлення та вдосконалення таких засобів стають важливою передумовою для висунення якісно нових вимог до фахової підготовки вчителя математики, однією із професійних задач якого є демонстрація молоді шляхів використання та прийомів застосування інформаційних технологій у галузі математики під час вирішення навчальних і життєвих задач. Тому особливої гостроти набуває проблема випереджаючої підготовки вчителя математики до ефективного використання набутих графічних та візуальних умінь та навичок у власній професійній діяльності.

У навчальних планах підготовки вчителя математики особливе місце займають дисципліни фундаментальної предметної підготовки, оскільки саме вони забезпечують майбутнього вчителя науковим, фундаментом, базисом для побудови інформаційної наукової картини світу і необхідним професійним інструментарієм, розрахованим на тривале його застосування в мінливих умовах життя.

Аналізуючи результати профільної підготовки вчителів математики, можна відзначити зниження показників результатів навчання фундаментальних дисциплін предметної підготовки, таких як «Лінійна алгебра», «Теорія чисел», «Математичний аналіз», «Аналітична геометрія», «Проективна геометрія», «Дискретна математика» тощо. Тому вважаємо, що при викладанні профільних дисциплін варто використовувати візуалізовані завдання з метою формування візуально-інформаційної культури майбутніх учителів математики.

**Метою статті** є опис авторських візуалізованих завдань з фахових дисциплін підготовки майбутнього вчителя математики у вигляді візуалізованих динамічних моделей на базі програм динамічної математики та їхній методичний супровід.

**Виклад основного матеріалу.** Визначення візуалізованої задачі можна знайти у О. О. Князєвої. Дослідниця під *візуалізованою задачею* розуміє задачу, «в якій образ явно чи неявно задіяний в умові/відповіді, задає метод розв’язання задачі, створює опору кожному етапу розв’язання задачі або явно чи неявно супроводжує на певних етапах її розв’язання» [9].

Використання візуалізованих завдань в процесі фахової підготовки майбутніх вчителів математики дозволяє швидко засвоювати певні фрагменти теорії, формулювати і розповсюджувати узагальнений алгоритм практичних дій, акцентувати увагу на вузлових моментах процесу розв’язування задачі. Візуалізовані завдання дозволяють надавати інформацію про навчальні досягнення, певні особливостях розумової діяльності учнів і тим самим слугують інструментарієм для діагностики навчальних і особистісно значущих якостей.

Візуалізовані завдання є інструментом реалізації когнітивно-візуального підходу до навчання математики і є засобом формування навичок візуального пошуку. Візуальний пошук – це процес породження нових образів, нових візуальних форм, що несуть конкретне візуально-логічне навантаження і роблять видимим значення шуканого об'єкта або його властивості. Вихідною позицією такого процесу є запас готових, відомих студенту візуальних образів, структура і елементи інформації, візуально доступні для спостерігання зв'язку між ними. При розв’язуванні математичних задач образ може використовуватися або явно, або неявно, але і в тому, і в іншому випадку це призводить до пошуку шляхів розв’язання завдання [6].

Авторським колективом під керівництвом Н. А. Резник підготовлена низка візуальних конспектів-практикумів з певних розділів вищої математики, в яких основу складають саме візуалізовані завдання [13-20].

Нами розроблено авторські приклади візуалізованих завдань з фахових дисциплін підготовки майбутнього вчителя математики у вигляді візуалізовних динамічних моделей на базі програм динамічної математики.

*Математичний аналіз.*

*Візуалізоване завдання.* У сферу радіуса 4 вписано конус. Якою має бути висота конуса, щоб його об’єм був найбільшим?

Традиційно геометричні задачі на екстремум розв’язуються шляхом написання формули для залежності об’єму конуса від його висоти, з подальшою диференціацією цієї функції залежності. Для даної задачі:

$$V = \frac{1}{3}\pi(8h^2 - h^3), V^{/} = \frac{1}{3}\pi(16h - 3h^2) = 0,\ h = \frac{16}{3} \approx 5{,}33, V_{max} \approx 79{,}43.$$

Результат аналітичного розв’язання представлено на рис. 1.

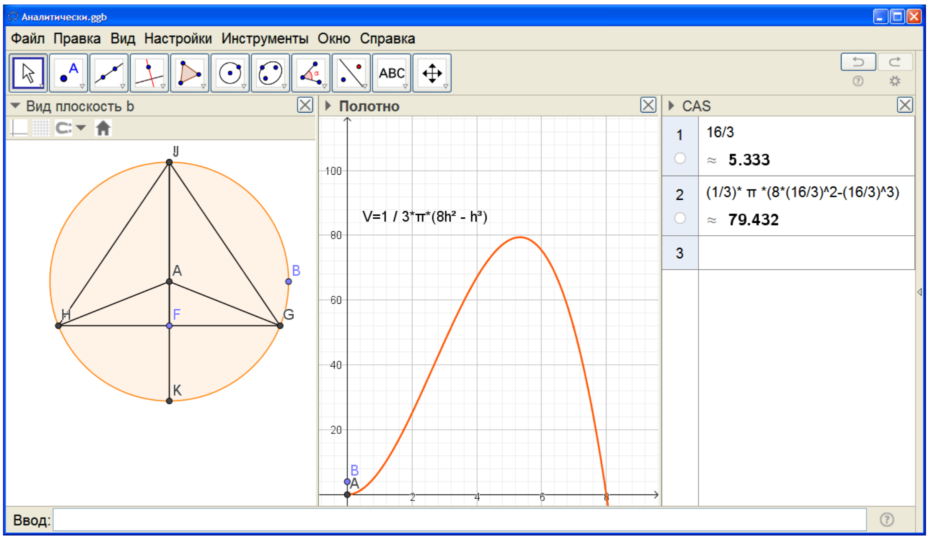



**Рис.1. Графік залежності об’єму конуса від його висоти, побудований аналітично**

У метою формування візуально-графічної культури студентів запропонуємо інший підхід до розв’язування такого типу задач – конструктивний підхід. Конструктивний підхід дозволяє не лише одержати відповідь, а і й унаочнити дані задачі 3D-інструментами, поглибити розуміння поняття екстремум, підтвердити емпіричним шляхом, що це дійсно максимум, а також продемонструвати шляхи застосування інформаційних технологій для активізації пізнавальної діяльності суб’єктів навчання.

У таблиці 1 пропонуємо алгоритм побудови конфігурації даної задачі, виконаний у програмі *GeoGebra*, проводячи паралель між конструктивними діями студента та комп’ютерними інструментами, які він повинен використовувати.

**Таблиця 1. Алгоритм побудови комбінації тіл**

| Конструктивні дії учня | | Комп’ютерний інструмент |
|---|---|---|
| 1 | Побудувати сферу радіуса 4. | *Сфера по центру и радиусу* |
| 2 | Побудувати довільну пряму, що проходить через центр сфери – точку А. | *Прямая* |
| 3 | Побудувати площину α, яка перпендикулярна даній прямій і проходить через центр сфери. | *Перпендикулярная плоскость* |
| 4 | Побудувати лінію перетину даної площини і сфери – велике коло сфери. | *Кривая пересечения* |
| 5 | Побудувати довільну точку U на колі і провести через неї та центр сфери пряму UA – вісь конуса. | *Точка, Прямая* |
| 6 | Побудувати іншу точку перетину цієї прямої та кола – точка К. | *Пересечение* |
| 7 | Побудувати відрізок UK, що сполучає ці дві точки перетину. | *Отрезок* |
| 8 | Побудувати довільну точку F на відрізку UK. | *Точка* |
| 9 | Побудувати у площині α пряму, яка перпендикулярна осі конуса і проходить через точку F. | *Перпендикулярная линия* |
| 10 | Побудувати точки перетину цієї прямої і великого кола сфери – точки H та G. | *Пересечение* |
| 11 | Побудувати трикутник UHG. Він вписаний у велике коло сфери і є осьовим перерізом вписаного в сферу конуса. | *Отрезок* |

| Конструктивні дії учня | | Комп'ютерний інструмент |
|---|---|---|
| 12 | Побудувати коло, яке проходить через точку H і вісь конуса є його віссю. Побудоване коло – основа конуса. | *Окружность по точке и оси* |
| 13 | Побудувати конус. | *Выдавить пирамиду или конус* |
| 14 | Обчислити висоту та об'єм конуса. | *Расстояние или длина, Объем* |

Розв'язування цієї задачі у *GeoGebra* реалізується через побудову динамічної конструкції та візуальне спостереження за значенням об'єму конуса, яке буде інтерактивно змінюватися при переміщенні базової точки – точки F, яка є центром основи конуса (рис.2).

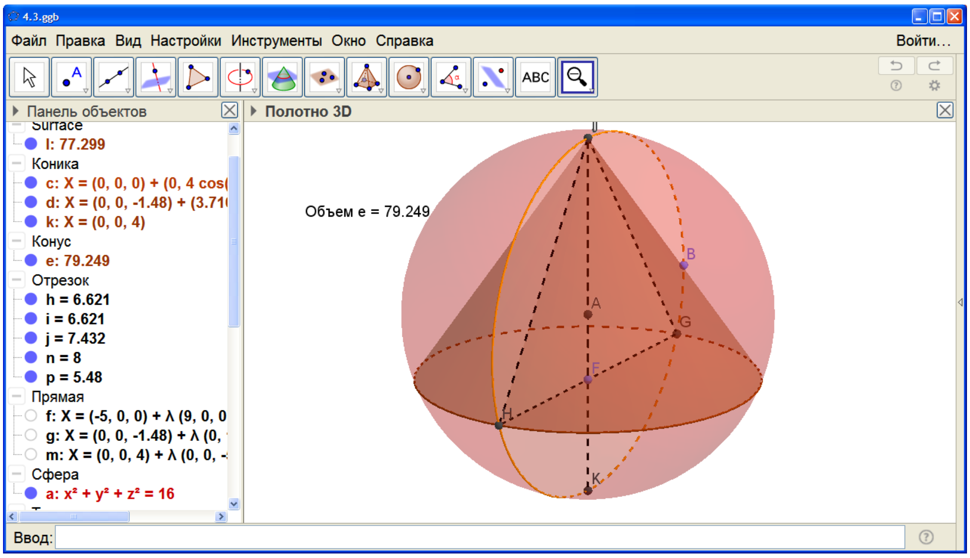



**Рис.2. Візуальна модель для спостереження за значенням об'єму конуса**

Розглянемо інші методи розв'язування цієї задачі.

1. Метод, який базується на побудові емпіричного графіка залежності між висотою конуса та його об'ємом комп'ютерним інструментом *Динамічний слід.*

Використання інструменту *Динамічний слід* передбачає побудову кривої, точкам якої притаманна певна властивість. Якщо задіяти цей інструмент, то під час динамічних змін вихідної конструкції обрана точка буде залишати слід, який і буде геометричним місцем точок з потрібною нам властивістю.

Якщо виконати дії 1-14 (табл.1), то такий слід може залишати додатково побудована точка $L$, абсциса якої дорівнює значенню висоти конуса, а ордината дорівнює значенню об’єма конуса. В параметрах точки $L$ потрібно замовити послугу залишати слід. Зміна положення точки А зумовить зміну положення точки $F$, а побудований слід точки $L$ і буде емпіричним графіком функції об’єму конуса, що нас цікавить (рис. 3).

Екстремум для цієї функції буде очевидним. При такому способі розв’язування задачі в учнів, за умови усвідомлення ними значень координат точки, не виникне сумнівів у тому, що максимум для об’ємів конусів існує і він єдиний.

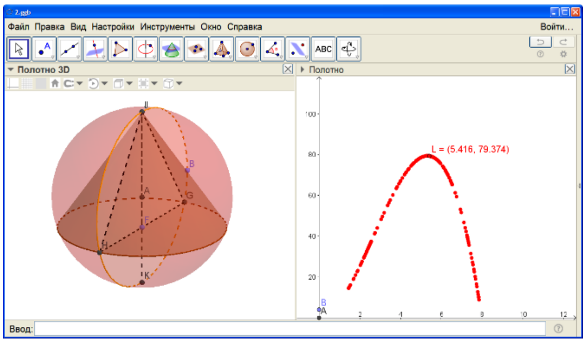



**Рис.3. Побудова емпіричного графіка залежності між висотою конуса та його об’ємом (інструмент *Динамічний слід*)**

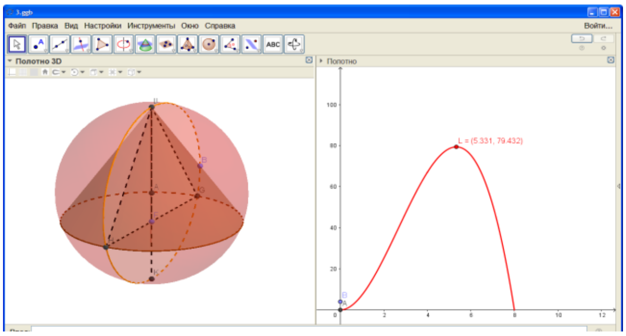



**Рис.4. Побудова емпіричного графіка залежності між висотою конуса та його об’ємом (інструмент *Локус*)**

Зауважимо, що можна також скористатися інструментом *Локус*, який автоматично побудує емпіричну функцію об’єму (рис. 4). Результат дії цього інструменту подібний до результату, одержаного інструментом *Динамічний слід*, а різниця полягає у форматі виведення результату: після *Локусу* – це неперервна крива, а після *Динамічного сліду* – точкове зображення.

2. Метод, який базується на виведенні таблиці значень емпіричної функції та їх аналізі (рис. 5).

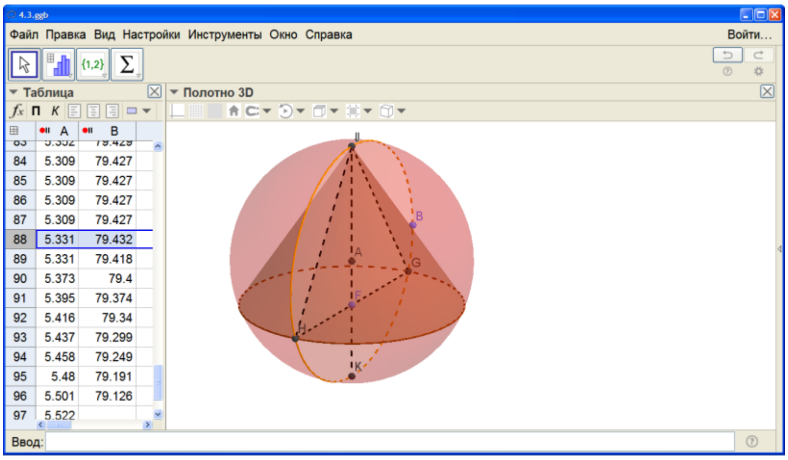



**Рис.5. Виведенні таблиці значень емпіричної функції**

Після побудови основної конструкції створюється таблиця, до якої заносяться значення висоти конуса та його об'єму. Під час зміни положення базової точки така таблиця заповнюється відповідними наборами значень. Аналіз цих значень дозволяє унаочнити функціональну залежність між висотою конуса та його об'ємом, побачити екстремальне значення об'єму і зробити висновок про відповідне йому значення висоти конуса.

При застосуванні описаного способу від учнів вимагається володіння інструментами пакету і усвідомлення моделі для пошуку відповіді: побачити зв'язок між вхідними даними і результатом без застосування похідної, знаючи лише означення конуса та його об'єму.

Алгоритми розв'язання задачі на основі описаних способів наведені у таблиці 2.

**Таблиця 2. Алгоритми розв'язання задачі на екстремум конструктивним способом**

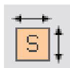
| Спосіб | Опис можливого алгоритму розв’язання |
|---|---|
| З використанням інструменту *Слід* (рис.3) | 1-14. Кроки аналогічні до попереднього способу розв’язування.<br>15. Побудуємо через рядок вводу точку L за наступними координатами: абсциса – значення висоти конуса, ордината – значення об’єму конуса.<br>16. У властивостях точки замовляємо послугу залишати слід.<br>17. За траєкторією точки L визначаємо максимум емпіричної функції – 79,374. |
| З використанням інструменту *Локус* (рис.4) | 1-15. Кроки аналогічні до попереднього способу розв’язування.<br>16. За допомогою інструменту Локус будуємо ГМТ, обравши на роль «точки-олівця» точку L, «точки-водія» – точку F.<br>17. За неперервним графіком ГМТ (точки L) визначаємо максимум емпіричної функції – 79,374. |
| З використанням таблиць значень (рис.5) | 1-14. Кроки аналогічні до попереднього способу розв’язування.<br>15. Додаємо на екран полотно таблиць і через контекстне меню замовляємо послугу *Запись в таблицу* для значень висоти конуса (на рис 4 це величина p) та його об’єму.<br>16. Змінюючи положення базової точки F, спостерігаємо появу числових значення висоти конуса і відповідного йому значення об’єму.<br>17. Аналізуємо динаміку змін значення об’єму – значення до певного моменту зростають, а потім спадають. Критичне значення 79,432 досягається при висоті конуса рівній 5,331. |

Такий підхід до розв’язування геометричних задач на екстремум не забезпечує знання математичних формул, понять чи функціональних залежностей, але є тим інструментом, який сприяє формуванню у студентів дослідницьких якостей, математичного мислення та критичного погляду на будь-які твердження.

*Візуалізоване завдання.* Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\begin{cases} x+3, x<-1 \\ x^2+1, x\geq -1 \end{cases}$ і прямими $y=0$, $x=-2$, $x=0$.

Традиційно задача зводиться до обчислення визначеного інтеграла на відрізку $[-2;0]$ від заданої функції. Ми пропонуємо візуально-когнітивний підхід до розв’язування задач такого типу.

Побудуємо графіки функцій $y=x+3$ при $x<-1$, $y=x^2+1$ при $x\geq -1$ у програмі *Математичний конструктор* (деякі версії передбачають можливість побудови кусочно-гладкої функції). Потім за допомогою кнопки  побудуємо області під графіками, причому у вкладці *Свойства объекта/ Границы отрисовки по оси x* області *F* задамо межі від $x=-2$ до $x=-1$, а для області *G* – від $x=-1$ до $x=0$. Зауважимо, що за замовчуванням будується область під графіком функції до осі $Ox$. У діалозі властивостей побудованої області можна вказати спосіб розташування області (над чи під графіком), границі побудови області по осям координат (до певного значення чи до нескінченності) та кольорові характеристики.

Знайдемо площі областей *F* і *G* за допомогою кнопки  та їх суму за допомогою кнопки . Площа області *F* дорівнює 1,5, а області *G* – 1,3. Площа криволінійної трапеції дорівнює 2,8 (рис.6).

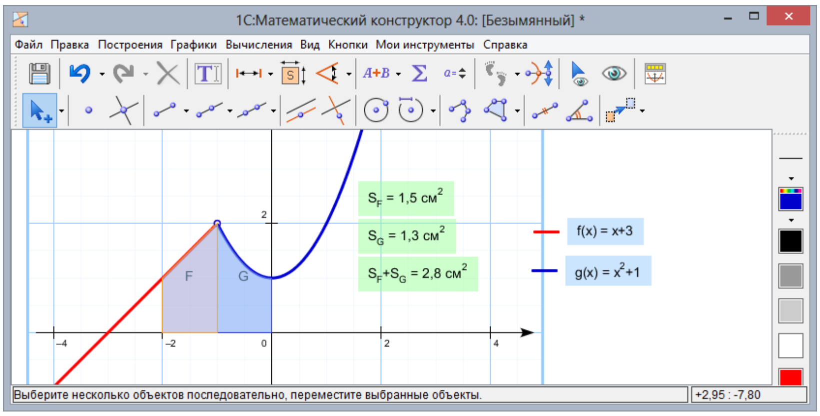



**Рис.6. Обчислення площі криволінійної трапеції на основі візуально-когнітивного підходу**

Розв’язування такого завдання дозволяє візуалізувати поняття визначеного інтеграла, зрозуміти його геометричний зміст, акцентувати увагу на вузлових моментах – адитивній властивості визначеного інтеграла (результат є сумою двох визначених інтегралів від функцій $y = x + 3$ на проміжку $\left[-2;-1\right]$ та від функції $y = x^2 + 1$ на проміжку $\left[-1;0\right]$).

*Аналітична геометрія.* Серед науковців, які актуалізували проблему візуалізації математичних знань при вивченні аналітичної геометрії відзначимо наступних. Г. В. Горр [5] описує ідею комп’ютерної динамічної візуалізації при вивченні теорії кривих, але не акцентує увагу на програмах, за допомогою яких цю ідею можна реалізувати. Т. М. Махомета [12] зазначає, що при вивченні аналітичної геометрії найбільш поширеними є програми *GRAN* та *Derive*, але водночас пропонує використання програми *3D Plotter*, основним призначенням якої є побудова графіків функцій. Г. Шуман [21] пропонує використовувати програму *Cabri 3D* для побудови перерізів типових математичних об’єктів. Дослідники описують способи візуалізації кривих другого порядку через переріз поверхонь другого порядку або за їх рівняннями.

Водночас такі криві можна інтерпретувати і як геометричні місця точок площини, і саме ця ідея використовується авторами при вивченні відповідних тем курсу аналітичної геометрії під час підготовки майбутніх учителів математики. Наведемо приклади *візуалізованих завдань*.

1. Побудувати еліпс як переріз конічної поверхні на базі *GeoGebra* (рис. 7)

2. Побудувати гіперболу як переріз конічної поверхні на базі *GeoGebra* (рис. 8).

3. Побудувати еліпс як геометричне місце точок, яке визначається через фокальні відстані, на базі *GeoGebra* (рис. 9).

4. Побудувати параболу як геометричне місце точок, яке визначається через фокальні відстані на базі *GeoGebra* (рис. 10).

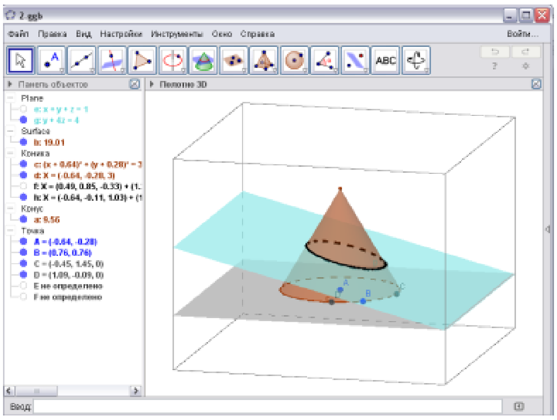


**Рис.7. Побудова еліпса як кривої перетину конуса та площини**

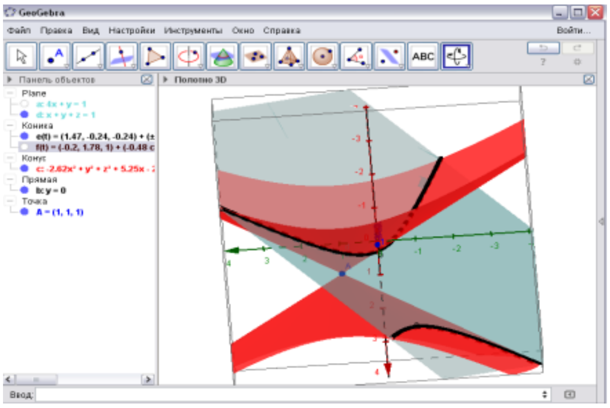


**Рис. 8. Побудова гіперболи як кривої перетину конуса та площини**

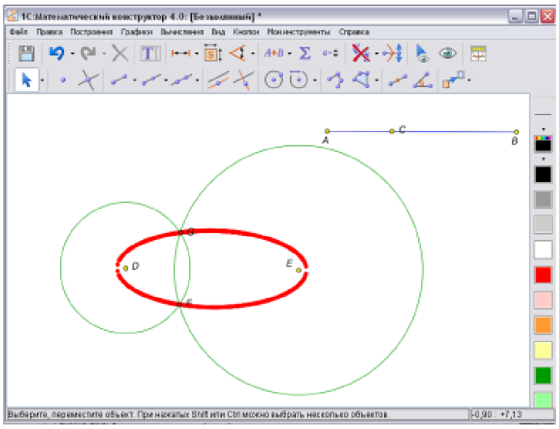


**Рис.9. Побудова еліпса як ГМТ**

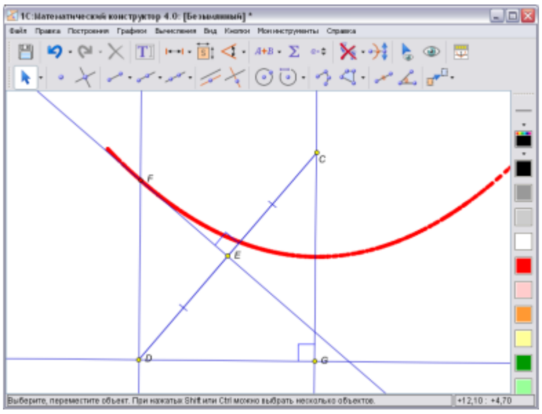


**Рис. 10. Побудова параболи як ГМТ**

Із використанням візуально-когнітивного підходу напрацьовуються не лише знання про основні властивості кривих другого порядку, а й формуються конструктивні уміння побудови геометричних об’єктів та навички використовувати комп’ютерний інструментарій у майбутній професійній діяльності.

Також на заняття з аналітичної геометрії нами використовується електронний ресурс, де можна знайти достатньо навчальних відеофільмів на підтримку вивчення даної теми [11].

*Проективна геометрія*. В. Р. Майер, Е. В. Крум наголошують на зниженні останнім часом інтересу студентів, майбутніх учителів математики до вивчення до вивчення проективної геометрії і пов'язують це з надмірною теоретизацією навчальної дисципліни, і як наслідок, із зниженням її візуальної складової [10]. До того ж зменшується кількість аудиторних годин, відведених на вивчення курсу. Для того, щоб дані фактори не спричинили зниження якості геометричної підготовки майбутніх вчителів математики, автори пропонують використовувати динамічні моделі з елементами анімації, розроблені за допомогою програм динамічної мате математики.

Програми динамічної геометрії дозволяють будувати моделі плоских і просторових фігу та маніпулювати ними, зберігаючи інцидентність точок і прямих; створювати складні відношення точок; розв'язувати задач методом зображень [3].

*Візуалізоване завдання* (пропедевтичне). Дана точка $P$ на ребрі $AA'$ призми $ABCA'B'C'$. Змінюючи положення призми, переконайтеся, що точка справді лежить в площині $ABC$. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить через $P$ та пряму $a$ (рис. 11 (а), 11 (б)).

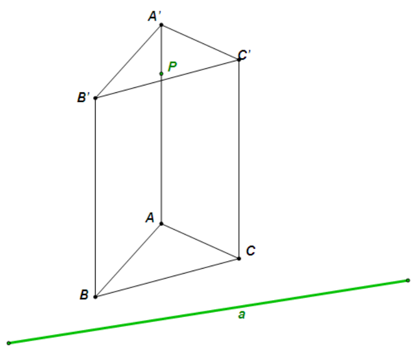



**Рис. 11 (а). Умова задачі у програмі *The Geometer's SketchPAd***

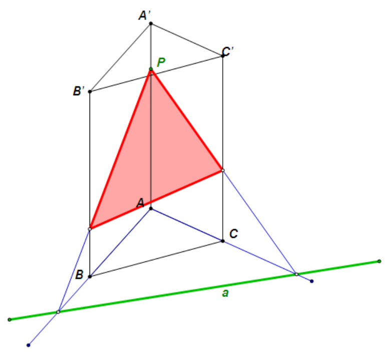



**Рис. 11 (б). Розв'язання задачі у програмі *The Geometer's SketchPAd***

*Візуалізоване завдання.* Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через три точки *K, L, M*, що лежать на гранях $ABCD$, $A'B'C'D'$ та на ребрі $AA'$ відповідно (рис. 12 (а), 12 (б)).

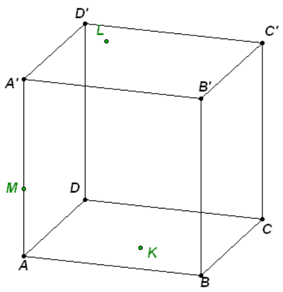



**Рис. 12 (а). Умова задачі у програмі *The Geometer's SketchPAd***

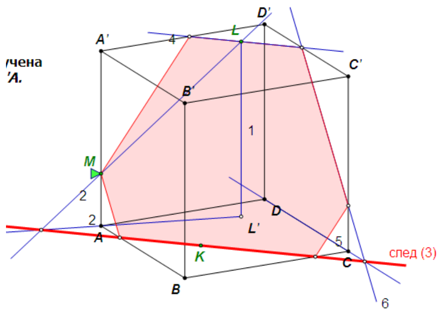



**Рис. 12 (б). Розв'язання задачі у програмі *The Geometer's SketchPAd***

*Дискретна математика*. Теорія графів позиціонується як наука про абстрактні об'єкти та зв'язки між ними, що, у свою чергу, обумовлює формалізацію умов типових задач, їх відрив від реальності, й у багатьох випадках передбачає виконання громіздких обчислень, результат яких не лише «не відчувається» студентами, але й часто відштовхує своєю формалізованістю. Це спричиняє труднощі у сприйнятті студентами навчального матеріалу з теорії графів, а тому виникає потреба у пошуку шляхів їх уникнення.

Зазвичай використання комп'ютерних програм при вивченні теорії графів зводиться до простої побудови вершин та ребер графа, визначенні деяких характеристик графа (планарності, ейлеровості тощо) та виконанні ряду елементарних дій (визначенні степенів вершин, побудові каркасного дерева, пошуку найкоротших шляхів між вершинами у зваженому графі).

Розробниками ПДМ *GeoGebra* закладено більш різноманітні інструменти для роботи з графами, які зосереджені у розділі Дискретная математика: *Диаграмма Вороного, Триангуляция Делоне, Коммивояжер, Кратчайшее Расстояние, Минимальное Остовное Дерево, Выпуклая Оболочка, Оболочка,* і які реалізуються через рядок вводу [1, 2, 7].

Вказані команди дозволяють розв’язати широке коло задач, причому побудова графу може здійснюватися із прив’язкою до готових схем, планів та карт місцевості. Це вигідно відрізняє ПДМ *GeoGebra* від інших СКМ, дозволяє продемонструвати прикладний аспект теорії графів (у тому числі з орієнтацією на місцевий матеріал) і тим самим викликати особистий інтерес у студентів до вивчення теорії графів.

*Візуалізоване завдання.* На карті міста Суми точками відмічені поштові відділення. Позначте своє місце розташування і з’ясуйте, яке з поштових відділень знаходиться до Вас найближче.

Для розв’язання задачі потрібно побудувати діаграму Вороного для множини поштових відділень, тобто розкреслити карту міста так, щоб в кожній комірці знаходилося тільки одне поштове відділення і для всіх точок відповідної комірки воно б було найближчим. Нагадаємо, що діаграмою Вороного скінченної множини точок $P$ називається таке розбиття площини, при якому кожна область розбиття (комірка Вороного) є геометричним місцем точок, що знаходяться до одного з елементів множини $P$ ближче, ніж до будь-якого іншого елемента цієї ж множини.

Додатньо застосувати команду *ДиаграммаВороного(<Список точек>)* і отримуємо розбиття поштових відділень міста (рис. 22). Виявляється, що найближчим є відділення, що відповідає вершині $D$.

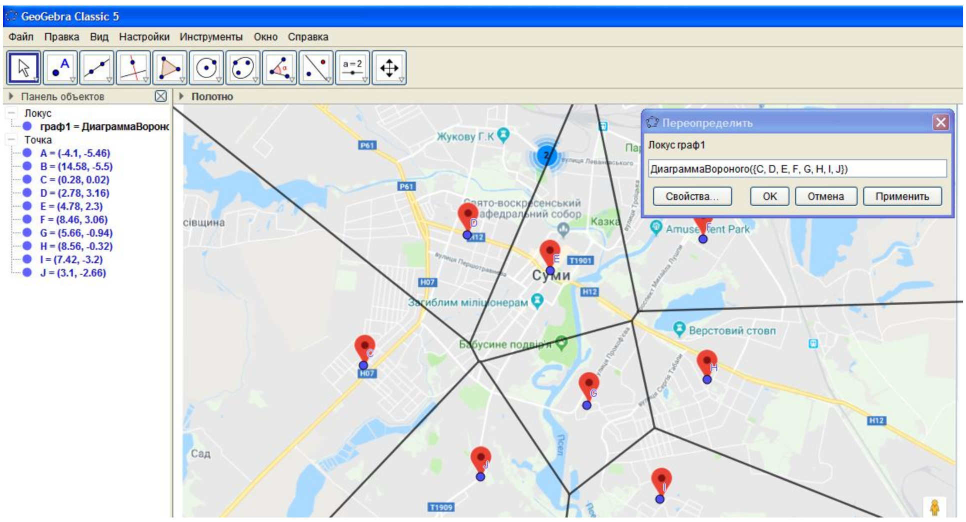



**Рис.22. Діаграма Вороного для множини поштових відділень**

*Теорія ймовірностей*. В останні роки до програм, які підтримують вивчення теорії ймовірностей, можна додати *Математический конструктор*, куди розробники додали інструментарій, який підтримує вивчення теорії ймовірностей та статистики [4].

*Візуалізоване завдання.* Програми динамічної математики дозволяють продемонструвати статистичне означення ймовірності як граничне значення частоти в ході проведення комп'ютерного експерименту, коли відбувається процес стабілізації частот із збільшенням числа дослідів.

Пропонуємо динамічні моделі для проведення експериментів з підкиданням канцелярської кнопки (два результата: кнопка може впасти на підлогу вістрям вгору, або вістрям вниз) та підкиданням монети (два результати: випаде «орел» або «решка»).

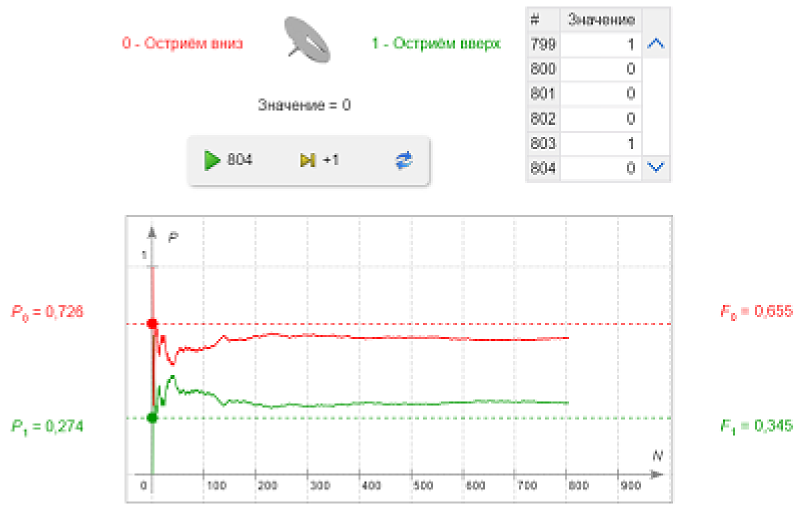



**Рис. 13. Візуалізація результатів експерименту з підкиданням канцелярської кнопки**


**Рис. 14. Візуалізація результатів експерименту з підкиданням монети**

Під час обговорення даної моделі можна зробити наступні важливі зауваження.

1. Ймовірність закладена «в природі речей»: якщо дослід з тієї ж кнопкою повторити через тиждень, частота буде прямувати до того ж числа (для кнопки, зробленої за іншою технологією, це число може бути вже іншим).

2. Значні відхилення частоти від ймовірності можливі навіть при великій кількості дослідів – але чим більше дослідів, тим менш ймовірні такі відхилення (питання про їх кількісну оцінку виходить за рамки шкільного курсу).

3. У деяких випадках можна «передбачити» ймовірність (тобто майбутню частоту) без проведення експерименту.

4. У прикладі з монетою ми мали справу з симетричним предметом, тому всі результати досліду були рівно можливими. При підкиданні монети було два рівноможливих результати – «орел» і «решка». В силу симетрії не було ніяких підстав вважати один з таких випадків найімовірніше іншого. Тому у цьому випадку можна сформулювати наступне означення (воно називається класичним визначенням ймовірності):

Означення. Нехай випадковий експеримент може завершитися одним з $n$ рівноможливих результатів; і нехай рівно $m$ з цих випадків сприяють, тобто призводять до настання випадкової події $A$. Тоді ймовірність цієї події може бути обчислена за формулою $P(A)=m/n$.

5. Але у досліді з кнопкою цим означенням користуватися не можна, оскільки подія не симетрична і результати не є рівноможливими.

Наведемо ще одне візуалізоване завдання для введення поняття геометричної ймовірності – модель досліду Бюффона з голкою, розроблену у програмі динамічної математики *Математичний конструктор*.

**Висновки і перспективи подальших розробок.** Розвиток інформаційних технологій та візуалізація освітньої галузі обумовлюють появу нових засобів навчання, покликаних формувати візуально-інформаційну культуру майбутніх учителів математики. Такими засобами навчання ми вчабаємо візуалізовані завдання з фахових дисциплін, розроблені на базі програм динамічної математики.

Візуалізованою називають задачу, в якій образ явно чи неявно задіяний в умові/відповіді, задає метод розв’язання задачі, створює опору кожному етапу розв’язання задачі або явно чи неявно супроводжує на певних етапах її розв’язання.

Використання візуалізованих завдань при формуванні візуально-інформаційної культури майбутніх учителів математики дозволяє швидко засвоювати певні фрагменти теорії, формулювати і розповсюджувати узагальнений алгоритм практичних дій, акцентувати увагу на вузлових моментах процесу розв’язування задачі. Візуалізовані завдання є інструментом реалізації когнітивно-візуального підходу до навчання математики і є засобом формування навичок візуального пошуку – процес породження нових образів, нових візуальних форм, що несуть конкретне візуально-логічне навантаження і роблять видимим значення шуканого об'єкта або його властивості.

## Список використаних джерел


1. Falcón, R. M., Moreno, A., Ríos, R. (2016). Designing evacuation routes with GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania*, 4 (2), 25-38.

2. Falcón, R. M., Ríos, R. (2015). The use of GeoGebra in Discrete Mathematics. *GeoGebra International Journal of Romania*, 4 (1), 39-50.

3. Ziatdinov, R., Rakuta, V. (2012). Dynamic Geometry Environments as a Tool for Computer Modeling in the System of Modern Mathematics Education. European Journal of Contemporary Education, 1, 93-100.

4. Булычев, В. А. (2014). Случайный эксперимент и его реализация в среде «1С: Математический конструктор 6.0». Информатика и образование, 3, 45-47.

5. Горр, Г. В., Щетинина, Е. К. (2010). Компьютерная визуализация геометрических объектов в преподавании геометрии и механики. Didactics of Mathematics: Problems and Investigations, Is. 34, 34-38.

6. Далингер, В. А. (2011). Обучение математике на основе когнитивно-визуального похода. Вестник Брянского государственного университета, 1, 1-7.

7. Есаян, А. Р., Добровольский, Н. М., Седова, Е. А., Якушин, А. В. (2017). *Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra: Учеб. пособие*. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого.

8. Князева, О. О. (2003). Визуализированные задачи и методика их использования в процессе обучения началам математического анализа: учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ.

9. Князева, О. О. (2003). Реализация когнитивно-визуального похода в обучении старшеклассников началам математического анализа. Автореф. дис. канд...пед.наук. Омск.

10. Майер, В.Р., Крум, Е.В. (2014). Информационные технологии в обучении проективной геометрии будущих учителей математики. Вестник КГПУ им.В.П.Астафьева, 1(73), 92-95.

11. Математические этюды [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.etudes.ru. (Дата звернення 03.10.2019).

12. Махомета, Т. М. (2012). Вивчення ліній та поверхонь засобами НІТ. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 3(21), 150–157.

13. Резникб Н. А., Казакова Г. Б. (1998). Неопределенный интеграл: визуальный конспект практикум. В 2 частях. Ч.1. Мурманск: Изд-во МГТУ.

14. Резник, Н. А., Казакова, Г. Б. (1998). Определенный интеграл: визуальный конспект практикум. В 2 частях. Ч.2. Мурманск: Изд-во МГТУ.

15. Резник, Н. А. (2002). Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. СПб: Изд-во "Информатизация образования".

16. Резник, Н. А. (2001). Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. СПб: Изд-во "Информатизация образования".

17. Резник, Н. А. (1998). Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования. Мурманск: Изд-во МГТУ.

18. Резник, Н.А., Казакова, Г.Б. (1998). Неопределенный интеграл. Визуальный конспект-практикум. Вып. II. Мурманск: Изд-во МГТУ.

19. Резник, Н.А., Негодяева, Л.Е. (2005). Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. СПб: ЛОИРО.

20. Резник, Н.А., Неделько, Н.С., Ежова, Н.М. (2003). Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ.

21. Шуман, Х. (2005). Введение в изучение конических сечений с помощью Cabri 3D. Компьютерные инструменты в образовании, 3, 26-31.