

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕРМОДИНАМИКИ

И.А. Мороз

Сумский государственный педагогический университет имени А.С. Макаренко

Рассматривается методика использования графиков физических процессов, которые рассматриваются в ВУЗах при изучении термодинамики. Сопоставляется информация графического представления термодинамических процессов в координатах (p,V) и (T,S) .

Ключевые слова: энтропийные диаграммы, изопроцессы, теплоемкость.

В ходе исторического развития термодинамики графические методы анализа физических процессов, введенные еще Карно, сыграли большую роль и привели к созданию специального метода - метода круговых процессов. Причем, если на начальном периоде развития термодинамики использовалась система независимых переменных (p,V) , то в дальнейшем, после введения понятия «энтропия», ученые, которые специализировались в области термодинамических исследований, стали все чаще использовать систему переменных (T,S) .

В 1902 г. американским физиком Гиббсом был разработан метод термодинамических потенциалов, который стал основным в исследованиях термодинамических систем. Однако, использование термодинамических диаграмм, как в координатах (p,V) , так и в координатах (T,S) способствует успешному проведению термодинамического анализа и является очень полезным при изучении термодинамики в высших учебных заведениях.

В этой связи в данной работе предлагается методика рассмотрения графического представления физических процессов, которые традиционно рассматриваются в ВУЗах при изучении термодинамики.

Рассмотрим сначала, так называемые, энтропийные диаграммы, то есть графики термодинамических процессов в системе координат: температура-энтропия (T,S) , которые будем рассматривать как независимые параметры состояния системы. В координатах (T,S) , где температура T выступает как функция любого вида (см. рис. 1), а энтропия S - как аргумент, величина (TdS) определяет площадь под участком dS кривой, а вся площадь под кривой $T=f(S)$ будет равна $\int_{S_1}^{S_2} TdS$. Но по второму закону

термодинамики $TdS=dQ$ и соответственно тогда $Q = \int_{S_1}^{S_2} TdS$. Таким образом, делаем

вывод, что в координатах (T, S) площадь под кривой процесса численно равняется количеству теплоты, полученной (или отданной) системой, подобно тому как в координатах (p,V) эта площадь равна работе. Проще всего выглядит формула для количества теплоты в изотермическом процессе:

$$Q = \int_{S_1}^{S_2} TdS = T(S_2 - S_1). \quad (1)$$

При этом количество теплоты будет положительно (ее получает система), если энтропия растет и, следовательно, процесс направлен на диаграмме в сторону роста энтропии, независимо от изменения температуры, то есть от того, поднимается или опускается на рисунке кривая процесса. Так, в изображенном на рис. 1, процессе $ACMB$

количество теплоты положительно не только на отрезке CMB ,

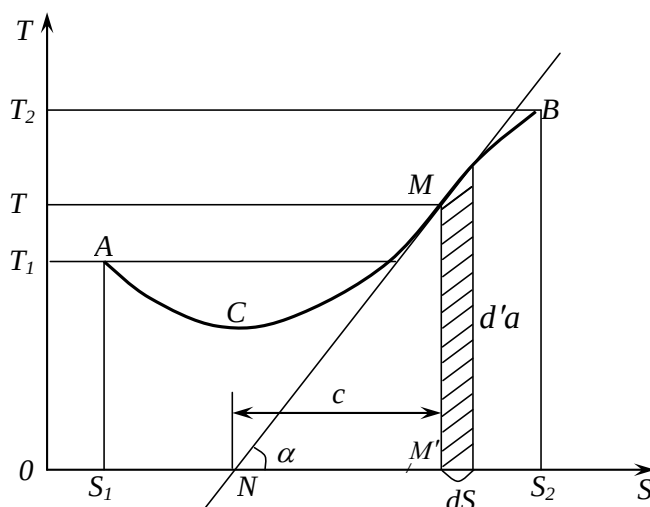


Рис. 1. График произвольного процесса ($ACMB$) на (T, S) -диаграмме

где температура растет, но и на отрезке AC , где температура уменьшается.

Из рис. 1 также видно, что проекция отрезка MN касательного к кривой процесса в некоторой точке (M) на ось энтропии дает значение теплоемкости системы (c) в состоянии, которое изображается этой точкой. Действительно, из треугольника NMM' имеем:

$$NM' = \frac{MM'}{\tan \alpha} = \frac{T}{\frac{dT}{dS}} = T \frac{dS}{dT} = \frac{dQ}{dT} = c.$$

При этом ясно, что эти проекции имеют положительный знак, следовательно, и теплоемкости положительные для всех состояний системы, которые лежат справа минимума кривой $T=f(S)$, и отрицательный – для состояний, которые лежат слева минимума. Для кривой $T=f(S)$, имеющей максимум, все знаки противоположны отмеченным. Следовательно, (T,S) -диаграмма очень наглядно демонстрирует также теплоемкость системы.

Рассмотрим теперь циклические процессы на (T,S) -диаграмме. При осуществлении прямого произвольного циклического процесса ($1-a-2-b-1$) (рис. 2), площадь под верхней частью ($1-a-2$) кривой цикла, численно равна

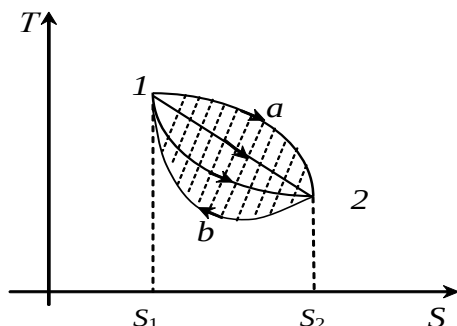


Рис. 2. До объяснения физического содержания площади под кривой произвольного процесса на (T,S) -диаграмме

полученной теплоте Q_1 , а под нижней кривой ($2-b-1$) – переданной теплоте Q_2 . Соответственно, разница этих теплот численно равна площади, ограниченной циклом, аналогично тому как в координатах (p,V) площадь, ограниченная циклом, численно равна работе за цикл. Больше того, поскольку после завершения цикла рабочее тело возвращается в исходное состояние и его внутренняя энергия не изменяется, то по первому закону термодинамики разница теплот (Q_1-Q_2) будет равна работе за цикл.

Таким образом, площадь, ограниченная графиком циклического процесса в координатах (T,S) , как и в координатах (p,V) , численно равна работе за цикл и суммарное количество теплоты (которая при этом равняется работе) положительно, если цикл происходит в направлении движения часовой стрелки и наоборот.

Рассмотрим произвольное состояние исследуемой системы, которое характеризуется на (T,S) -диаграмме некоторой точкой A (рис. 3). Понятно, что прямые, которые проходят через эту точку перпендикулярно осям T и S являются соответственно графиками изотермического и адиабатического процессов. Такие прямые на (p,V) -диаграмме изображали бы изобарный и изохорный процессы. Поскольку касательная к прямой во всех ее точках является сама прямая, то из (T,S) -диаграммы ясно, что для адиабатического процесса теплоемкость равна нулю, а для изотермического $(\pm\infty)$.

Если через выбранную произвольную точку A на (T,S) -диаграмме провести две произвольные линии (1 и 2), которые изображают некоторые процессы, как показано на рис. 3, а также – изотерму и изоэнтропу (адиабату), то последние разделят (T,S) -диаграмму на четыре квадранта (I-IV), в которых теплоемкость имеет приведенные на рис. 3 значения. Каждому изменению состояния системы от точки A вдоль произвольной кривой, расположенной в первом или третьем квадрантах, отвечает положительная теплоемкость, то есть при получении системой тепла ее температура повышается. Кривым же, расположенным во втором и четвертом квадрантах, отвечают отрицательные теплоемкости – при получении тепла температура системы, за счет выполнения ею механической работы, снижается.

Подчеркнем, что такая стройная графическая схема теплоемкостей в разных процессах имеет место только на (T,S) -диаграмме. В случае (p,V) -диаграммы, предельные (горизонтальное и вертикальное) положения, как мы отмечали, занимают изобарный и изохорный процессы с промежуточными значениями теплоемкостей c_p и c_v , в то время как изотерма и адиабата, для которых теплоемкость принимает предельные значения $(0$ и $\pm\infty)$, располагаются между ними.

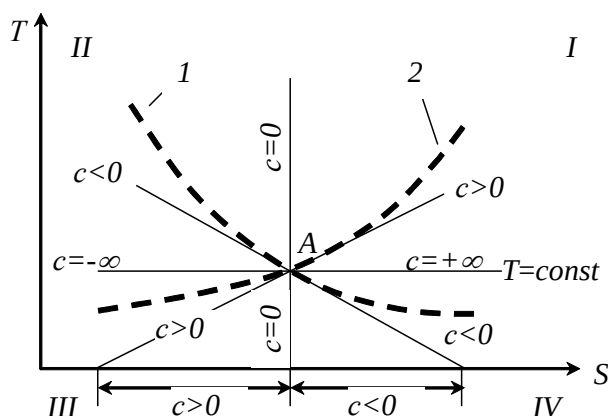


Рис. 3. Диаграмма теплоемкостей при изопроцессах на (T,S) -диаграмме

Для практического расчета количества теплоты, которым обменивается система с окружающими телами, с помощью (T,S) -диаграммы необходимо выразить энтропию через параметры ее состояния, что, понятно, возможно только для систем, для которых известны уравнения состояния. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением самой простой системы - идеального газа, уравнение состояния которого известно.

Посмотрим, как изображаются на (T,S) -диаграмме изохорный и изобарный процессы с идеальным газом.

Рассмотрим сначала изохорный процесс. Мы можем воспользоваться первым и

вторыми законами термодинамики для обратных процессов, в которых необходимо принять к сведению условие: $V = \text{const}$. Тогда, учитывая очевидные выражения $dQ = dE$ и $dE = \nu c_V dT$, имеем:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\nu c_V dT}{T}, \quad (2)$$

что сразу дает изменение энтропии при изменении состояний, которые принадлежат одной изохоре:

$$\Delta S = \nu c_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (3)$$

Это выражение, очевидно, являет собой уравнение изохоры в системе координат (T, S) .

Если же воспользоваться неопределенным интегралом от (2), то получим уравнение изохоры в системе (T, S) в виде:

$$S = \nu c_V \ln T + S_0. \quad (4)$$

Используя это уравнение, можно легко получить значение температуры как функции энтропии в изохорном процессе:

$$T = e^{\frac{S-S_0}{\nu c_V}}. \quad (5)$$

Если формально рассматривать это выражение, как зависимость температуры от энтропии, то оно показывает, что на (T, S) -диаграмме изохора изображается кривой, которая поднимается слева направо и повернута своей выпуклостью к оси абсцисс (рис.4). Это объясняется тем, что, поскольку в изохорном процессе

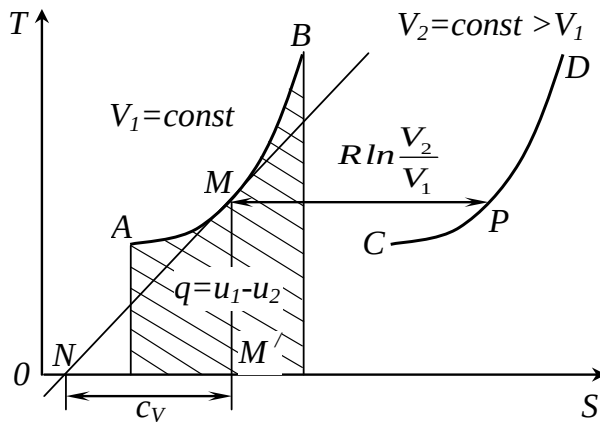


Рис. 4. Графики изохорных процессов в идеальном газе на (T, S) -диаграмме

работа не выполняется, то все полученное системой тепло идет на повышение ее внутренней энергии, в результате чего температура и энтропия не только идеального газа, но и любой системы, возрастают. Следовательно, теплоемкость при постоянном объеме произвольной системы всегда является положительной величиной ($c_V > 0$).

Поэтому и производная $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$, через которую определяется теплоемкость при

постоянном объеме, для всех веществ положительна.

Из уравнения изохорного процесса (5) видно, что кривые $S=S(T)$ являются подобными, лишь смещенными вдоль оси абсцисс, поскольку константа S_0 должна зависеть от значения фиксированного объема. Расстояние между двумя изохорами по горизонтали определяется изменением энтропии (горизонтальное направление на (T, S) -диаграмме отвечает изотерме). Это изменение для одного моля идеального газа можно

легко определить: $\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1}$. Отсюда видно, что большему объему отвечает

большее значение энтропии, то есть чем больший объем газа, тем дальше лежит его изохора от оси ординат.

Аналогичные выводы можно сделать и относительно уравнения изобары на (T,S) -диаграмме. Действительно, если в выражении (2) считать $p = \text{const}$, то оно примет вид:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\nu c_p dT}{T}.$$

Откуда получим уравнение изобары на энтропийной диаграмме:

$$s = \nu c_p \ln T + S_0. \quad (6)$$

Как и в случае изохорного процесса можно записать выражение

$$T = e^{\frac{S-S_0}{\nu c_p}}, \quad (7)$$

которое формально можно трактовать, как зависимость температуры от энтропии в изобарном процессе (рис. 5). Понятно, что подобие выражений (5) и (7) обуславливает подобие и их графиков (рис. 4 и 5). Однако, поскольку $c_p > c_v$, то график функции $T=f(S)$ для изобарного процесса будет более пологим, чем для изохорного.

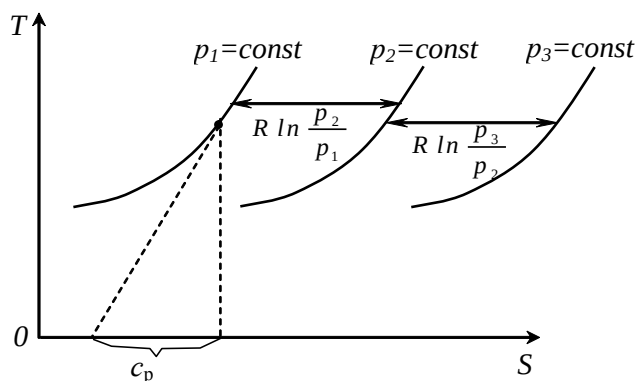


Рис. 5. Графики изобарных процессов в идеальном газе на (T,S) -диаграмме

Графики изобарных процессов также будут иметь одинаковый вид для разных значений $p = \text{const}$ и будут смещены в направлении оси абсцисс на расстояние $R \ln \frac{p_2}{p_1}$ (для $V = 1$).

Формулы (5) и (7) позволяют выполнить практическое построение (по точкам) графиков изохорного и изобарного процессов. На рис. 6 для сравнения изображено

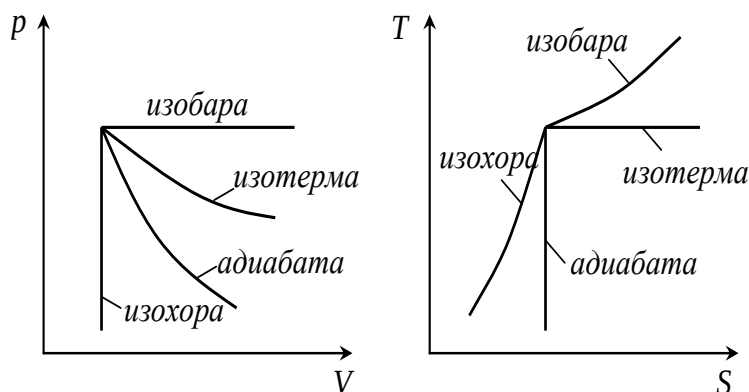


Рис. 6. Графики изопроцессов в идеальном газе на (p,V) и (T,S) -диаграммах

все изопроцессы на (p, V) и (T, S) -диаграммах. Следует отметить также, что, поскольку при изохорном процессе в простых системах работа не выполняется, то количество сообщенной системе теплоты, которое численно равно площади под кривой процесса, одновременно равно также изменению внутренней энергии. В случае изобарного процесса эта площадь также выражает не только количество теплоты, но и изменение энтальпии. Поэтому проекция на ось абсцисс касательной к кривой $T=f(S)$ в изобарном процессе, как и в изохорном процессе определяет теплоемкость, но уже при постоянном давлении (см. рис. 5).

Рассмотрим теперь на (T, S) -диаграмме обратный цикл Карно. Как известно, цикл Карно состоит из двух адиабатных и двух изотермических процессов.

В течение первого изотермического процесса прямого обратного цикла Карно рабочее тело (вещество рабочего тела не играет роли в эффективности цикла) при расширении получает от нагревателя при температуре T_1 некоторое количество теплоты Q_1 , благодаря чему его энтропия изменится на величину $\Delta S_{12} = \frac{Q_1}{T_1}$. Таким

образом, первая стадия кругового процесса Карно изображается на диаграмме (рис. 7) прямой (1-2), параллельной оси S .

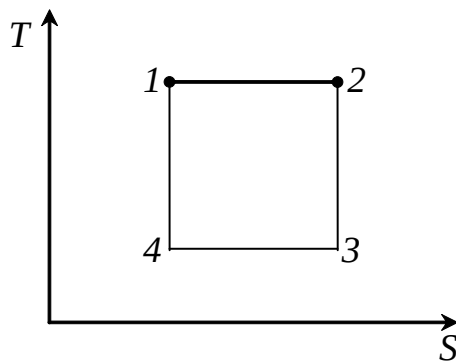


Рис. 7. Цикл Карно в (T, S) координатах

После этого рабочее вещество теплоизолируем от внешней среды и, уменьшая давление, дадим ему возможность квазистатически адиабатически расширяться (перейти из состояния 2 в состояние 3). Расширение совершается за счет собственной внутренней энергии рабочего тела, благодаря чему она перейдет к окружающей среде в виде работы (имеется в виду, что рабочее тело является изолированным от окружающей среды лишь термически, но осуществлять механическую работу оно может).

Данный адиабатический процесс расширения без изменения энтропии ведет к охлаждению рабочего вещества. Дадим ему возможность охладиться до температуры холодильника T_2 . График этого процесса изображен прямой (2-3). Потом, приведя цилиндр с рабочим телом в тепловой контакт с холодильником, путем повышения внешнего давления, начнем квазистатически сжимать рабочее тело. Теплота, которая появляется при этом, будет переходить в холодильник, и температура рабочего вещества в течение всего процесса будет равна температуре T_2 холодильника. В течение изотермических процессов (1-2) и (3-4) температура рабочего тела не должна отличаться от температуры нагревателя или холодильника больше чем на малую величину dT , поскольку иначе эти процессы будут необоротными. Очевидно, что все процессы цикла должны проходить чрезвычайно медленно. На диаграмме рассмотренный процесс отвечает переходу из состояния 3 в состояние 4. Общее количество теплоты, переданной холодильнику рабочим веществом, равно Q_2 , а

уменьшение энтропии рабочего тела равно $\Delta S_{34} = \frac{-Q_2}{T_2}$.

Третья стадия цикла заканчивается в точке 4, когда энтропия рабочего тела принимает свое начальное значение. Далее мы опять изолируем рабочее вещество термически и, увеличивая давление, сжимаем его адиабатически до первоначального объема, благодаря чему рабочее тело нагревается к начальной температуре T_1 (графически процесс изображается прямой между точками 4 и 1). Цикл закончен: рабочее тело вернулось в начальное состояние, его температура, энтропия, давление и объем имеют начальные значения. Поэтому полное изменение энтропии рабочего вещества за цикл должно быть равным нулю:

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0. \quad (8)$$

Для обеих адиабатических частей циклического процесса $\Delta S_{41} = 0$ и $\Delta S_{23} = 0$, следовательно:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{34} = \frac{Q_1}{T_1} + \left(-\frac{Q_2}{T_2}\right) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Полезная работа, выполненная рабочим телом за цикл, будет численно равна площади, которая охватывается графиком циклического процесса:

$$A = T_1(S_2 - S_1) + T_2(S_1 - S_2). \quad (9)$$

Количество теплоты, подведенной за цикл, это теплота, которая сообщается во время первого изотермического процесса. Она равна:

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1).$$

Находим КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1(S_2 - S_1) + T_2(S_1 - S_2)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Используя метод циклов в координатах (T, S) , легко доказать, что из всех обратных циклов, осуществляемых между нагревателем с температурой T_1 и холодильником с температурой T_2 цикл Карно является наиболее экономическим.

Для доказательства изобразим цикл Карно и произвольный обратный цикл, осуществляемый в том же температурном интервале (рис. 8). Сравним выражения КПД для цикла Карно и выбранного произвольного цикла ($abcda$).

$$\text{Для цикла Карно: } \eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

В случае произвольного цикла для расчета КПД нужно работу, выполненную за цикл (она численно равна площади σ фигуры, которая ограничивается циклом, то есть $A = \sigma_{abcda}$), разделить на количество теплоты, подведенной к рабочему телу за цикл, которое численно равно площади фигуры $(S_1abcS_2S_1)$, то есть $Q = \sigma_{S_1abcS_2S_1}$. Следовательно для КПД произвольного цикла имеем:

$$\eta = \frac{\sigma_{abcda}}{\sigma_{S_1abcS_2S_1}}.$$

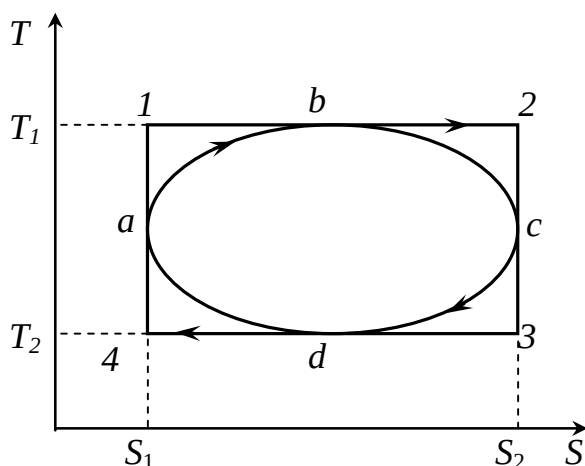


Рис. 8. Произвольный цикл ($abcda$) и цикл Карно (12341) в одинаковом температурном интервале

Площадь фигуры ($abcda$), которая ограничена произвольным циклом найдем как разницу площадей криволинейных трапеций ($S_1abcS_2S_1$), и ($S_1adcS_2S_1$):

$$\sigma_{abcda} = \sigma_{S_1abcS_2S_1} - \sigma_{S_1adcS_2S_1}.$$

Площадь криволинейных трапеций определим по известной из математики теореме о среднем:

$$\sigma_{S_1abcS_2S_1} = \tilde{T}_{abc}(S_2 - S_1);$$

$$\sigma_{S_1adcS_2S_1} = \tilde{T}_{cda}(S_2 - S_1),$$

где $\tilde{T}_{abc}$ и $\tilde{T}_{cda}$ – среднее значение температуры на соответствующих процессах. Тогда КПД произвольного цикла будет равен:

$$\eta = 1 - \frac{\tilde{T}_{cda}}{\tilde{T}_{abc}}.$$

Найдем разницу КПД циклов:

$$\eta_k - \eta = \frac{\tilde{T}_{cda}}{\tilde{T}_{abc}} - \frac{T_2}{T_1}. \quad (10)$$

Поскольку все точки (кроме одной) кривой (abc) лежат ниже изотермы с температурой T_1 , а все точки (кроме одной) кривой (cda) лежат выше изотермы T_2 , то ясно, что:

$$\tilde{T}_{abc} < T_1;$$

$$\tilde{T}_{cda} > T_2.$$

Поэтому из (10) следует, что $\eta_k > \eta$, то есть цикл Карно является наиболее экономичным (в заданном интервале температур).

Таким образом, использование графического представления термодинамических процессов (в особенности в виде энтропийных диаграмм) при изучении термодинамики вносит наглядность, существенно дополняет традиционное содержание этой дисциплины и может быть рекомендовано для использования в практике преподавания.

Литература

1. Базаров И.П. Термодинамика. - М.: Высшая школа, 1991.
2. Булавін Л.А., Гаврюшенко Д.А., Сисоєв В.М. Молекулярна фізика. – К.: Знання, 2006.

3. **Мороз І.О.** Основи термодинаміки та статистичної фізики. Навчальний посібник. ТОВ "Друкарський дім "Папірус» Суми-2012, 574с.
4. Коновалов В. М. Термодинаміка. – Київ: Радянська школа, 1962.
5. Техническая термодинамика, под редакцией Крутова В.И. – М.: Высшая школа, 1981.