

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дініц Руслан Олександрович

**МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ОДИНАДЦЯТИХ КЛАСІВ
ВМІННЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ**

Спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01. Освіта

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник

_____ Ю.В.Хворостіна
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики

« ____ » _____ 2020 року

Виконавець

_____ Р.О. Дініц

« ____ » _____ 2020 року

Суми – 2020

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП | 3 |
| РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ У СТАРШІЙ ШКОЛІ..... | 7 |
| 1.1 Пропедевтика вивчення теми «Тіла обертання в основній школі» ... | 7 |
| 1.2 Аналіз програм старшої школи за темою дослідження | 8 |
| 1.3. Особливості введення основних понять та тверджень з теми «Тіла обертання» у шкільних підручниках..... | 13 |
| 1.4. Методичні вказівки до вивчення теми «Тіла обертання»..... | 21 |
| 1.5 Методика розв’язування задач з основних розділів теми «Тіла обертання»..... | 24 |
| ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1 | 27 |
| РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ ПРОСТОРОВИХ НАВИЧОК В УЧНІВ..... | 28 |
| 2.1 Методи розвитку абстрактного мислення при вивченні теми «Тіла обертання»..... | 30 |
| 2.2 Методи розвитку просторового мислення | 32 |
| 2.3 Методи розвитку короткочасної пам’яті | 35 |
| 2.4 Методи розвитку навичок роботи з інформацією | 40 |
| ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2 | 42 |
| РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ УРОКІВ ГЕОМЕТРІЇ | 43 |
| 3.1. Аналіз можливостей додатку «Desmos»..... | 43 |
| 3.2 Аналіз можливостей пакету «GeoGebra» у порівнянні з «Desmos» | 53 |
| 3.3 Огляд ПЗ «Manim» (бібліотека для мови Python)..... | 55 |
| 3.4 Огляд «Wolfram Mathematica» як додаткової альтернативи | 57 |
| ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3 | 58 |
| ВИСНОВКИ..... | 59 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 61 |

ВСТУП

Актуальність теми. Вивчення стереометрії у старших класах загальноосвітніх та профільних шкіл потребує від учня значних зусиль у формуванні вмінь і навичок при розв’язанні задач. Для оволодіння шкільною програмою зі стереометрії недостатньо знати основні означення та теореми. Одними з найважливіших якостей, необхідних учневі, є:

- просторове уявлення;
- абстрактне мислення;
- вміння ставити задачу і застосовувати до неї декомпозицію;
- розвинуті навички із чотирьох основних процесів роботи з інформацією, а саме її сприйняття, запам’ятовування, обробка і відтворення;
- навички із аналізу та синтезу при розв’язуванні задач та засвоєнні нового матеріалу [16].

Специфіка задач прикладного характеру, які розглядаються у ВНЗ є такою, що за наявності саме цих якостей учні, що навчалися і закінчили загальноосвітні школи, на спеціальностях, що потребують широкого прикладного використання математичних методів та моделей, діють приблизно на тому ж якісному рівні, що й учні, які навчалися і закінчили профільні або поглиблені класи. Відповідно, ці якості необхідні не лише в рамках вивчення стереометрії, але в рамках даної роботи буде розглянуто безпосередньо методики формування їх в контексті розв’язування стереометричних задач і підвищення в учнів рівня навичок їх розв’язання.

Крім цього, в рамках роботи розглядаються експериментальні методи розвитку математичних здібностей у дітей з різним ходом думок: аналітичним, гуманітарним, практичним і художньо-образним. Існує розповсюджена проблема, коли в матеріалі в класі добре орієнтуються лише кілька «аналітиків», іншим пояснення даються важко або не даються взагалі. Між тим, це – парадокс. Жак Адамар у «Дослідженні психології процесу винайдення в області математики» писав наступне: «Для математиків,

опитаних мною в Америці, явища в більшості своїй є аналогічними до тих, що я помітив на власному досвіді. Практично всі (...) уникають не лише мисленнєвого використання слів, але так само, як і я, мисленнєвого використання точних алгебраїчних або інших знаків; як і я, вони використовують розпливчаті образи».[9] Іншими словами, мислення образами є навпаки великою перевагою для вивчення математики і проведення математичного дослідження. Ця робота Жака Адамара, а також роботи таких відомих вчених, як К. Дункер, Ю.М. Колягін, Н. Майєр, А.І. Маркушевич, Д.Д. Мордухай-Болтовський, А. Пуанкаре, В. Хаєкер, А.Я. Хінчин, Т. Циген, С.І. Шварцбурд та багато інших, вказують на значну роль інтуїції в процесі навчання математики і на важливість розвитку інтуїції в учнів. Мова йде про так звану математичну інтуїцію. Математик В.А. Стеклов казав: «Метод відкриття і винаходу є одним і тим же, та ж інтуїція, бо з допомогою логіки ніхто нічого не відкриває»[32]. Між тим, процес навчання математики в школі – це саме «відкриття» учнями для себе чогось нового, хай і з допомогою вчителя. Важко переоцінити роль розвитку математичної інтуїції в процесі вивчення математики, а особливо – такої об'ємної і, як показує практика, дещо проблемної теми, як стереометрія.

Об'єкт дослідження: методика навчання стереометрії учнів старшої школи.

Предмет дослідження: методика формування в учнів одинадцятих класів вміння розв'язувати задачі зі стереометрії на прикладі вивчення теми «Тіла обертання».

Мета дослідження: дослідити методичні особливості формування в учнів старших класів розв'язувати задачі з теми «Тіла обертання», розкрити особливості формування математичного мислення учнів старшої школи в контексті вивчення стереометрії, дослідити рівень сформованості такого типу мислення.

У відповідності до мети було поставлено наступні завдання дослідження:

- 1) опрацювати науково-методичні джерела та навчальну літературу за напрямками дослідження;
- 2) порівняти програмно-технічні засоби, які позитивно впливають на предмет дослідження;
- 3) проаналізувати програму навчання геометрії в старшій школі;
- 4) дослідити методичні особливості формування в учнів старших класів розв'язувати задачі з теми «Тіла обертання».
- 5) розкрити сутність понять просторового і абстрактного мислення, сутність декомпозиції задач;
- 6) описати базові навички роботи з інформацією і запропонувати ефективні шляхи їх розвитку;
- 7) описати сутність поняття математичної інтуїції в контексті вивчення стереометрії;

Методи дослідження:

У ході написання роботи були застосовані такі методи дослідження: абстрактно-логічний (передбачає узагальнення теоретичних основ та формулювання на їх основі висновків), табличний (аналіз чинників відбувається у вигляді таблиць), аналітичний, аналіз (виокремлення суттєвих ознак і характеристик із загального, несуттєвого), синтез (поєднання абстрагованих сторін у цілісне відображення реального стану речей).

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку та списку використаних джерел.

У вступі висвітлено: актуальність дослідження, його мета, об'єкт, предмет та завдання.

У першому розділі проаналізовано теоретичну основу дослідження, окреслено і уточнено вимоги до засобів, прийомів та методів, які досліджуються в роботі, проаналізовано навчальну програму.

У другому розділі описано прийоми та методи розвитку в учнів просторових навичок, умінь роботи з інформацією, математичної інтуїції. Запропоновано методи оптимізації роботи учнів, а також описано способи

об'єднання учнів у групи задля розвитку творчого мислення і вміння працювати в команді.

У третьому розділі описано програмно-технічні засоби, які допоможуть зробити засвоєння матеріалу більш легким. Розглянуто наступне ПЗ:

- Desmos;
- GeoGebra;
- Manim (бібліотека для мови Python)

У висновку представлені основні результати роботи та описано важливість вивчення цієї теми.

Апробація результатів. Участь у студентській звітній конференції фізико-математичного факультету 2020 року, за результатами якої було опубліковано статтю: Дініц Р. О. Особливості введення основних понять та тверджень з теми «тіла обертання» у шкільних підручниках / Р. О. Дініц // Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2020. – Випуск 14. – Том 1. –С. 21-27

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

1.1 Пропедевтика вивчення теми «Тіла обертання в основній школі»

Знайомство з тілами обертання учень починає ще з 6-го класу. Незважаючи на те, що в освітній програмі рівня стандарту не фігурують ані назви цих тіл, ані назва теми взагалі, у 6-му класі передбачене ознайомлення з основними тілами обертання (крім зрізаного конуса).[25] Перераховуються їх елементи, учні вчаться розрізняти тіла обертання, знаходити їх аналогії в навколишньому світі. Виявляються основні властивості.

В подальшому можливе повторення протягом наступних 7-го і 8-го класів. У 9-му класі під час вивчення теми «Основи стереометрії» тема тіл обертання згадується, учні вчать формули площ і об'ємів тіл обертання, вчаться з ними працювати. Проте такі формули, як об'єм конуса і кулі, подаються без доведення. Можливий перегляд навчальних відео або ознайомлення з іншими матеріалами, де пояснюється, як історично людство прийшло до визначення об'ємів даних тіл. Звертається увага на роботу з прямокутними трикутниками під час вирішення задач, пов'язаних з тілами обертання. Застосовується тригонометричний апарат.

Тіла обертання можуть згадуватись наприкінці 10-го класу в рамках ознайомлення з матеріалом наступного року.

Вивчення теми «Тіла обертання» в 11-му класі передбачає засвоєння або повторення наступних ключових моментів:

- базові поняття (тіло, прямокутник, прямокутний трикутник, радіус, діаметр, коло, круг, дотична площина);
- нові поняття (тіло обертання, циліндр, основи циліндра, радіус циліндра, бічна поверхня циліндра, твірна циліндра, висота циліндра, конус, радіус конуса, бічна поверхня конуса, твірна конуса, висота конуса, зрізаний

конус, куля, діаметр кулі, радіус кулі, сфера, комбінація тіл, вписані і описані тіла).

Має сенс навести схему вивчення матеріалу теми «Тіла обертання» (рис. 1.1):

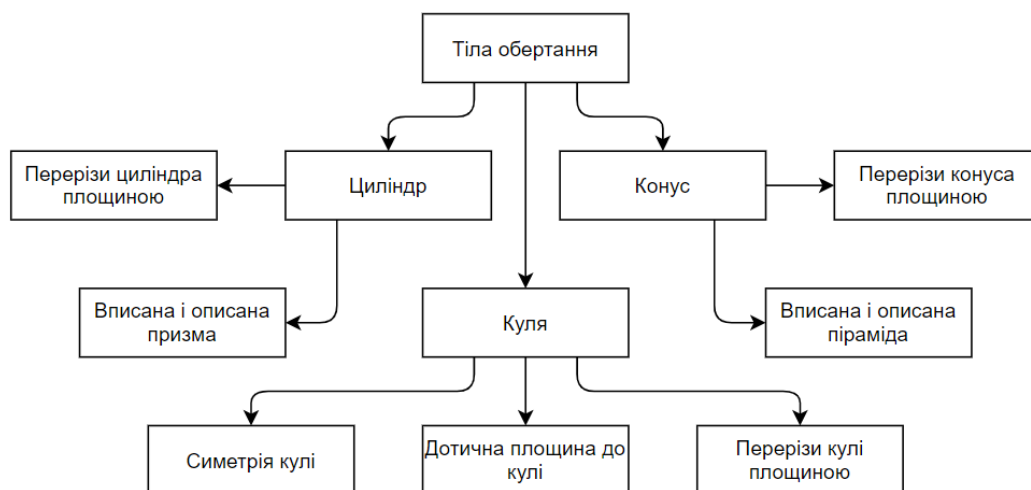


Рис. 1.1 – Тематичне дерево вивчення тіл обертання

1.2 Аналіз програм старшої школи за темою дослідження

В роботі порівняно дві навчальних програми: рівня стандарту та профільного рівня.

За навчальною програмою рівня стандарту (таблиця 1.1) на вивчення теми «Тіла обертання» відводиться 12 годин, на тему «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» відводиться ще 11 годин.

Вимоги, які ставляться до учня у відповідності до даної програми можна вважати невисокими. Незважаючи на певну кількість вирішених задач з теми, мета рівня стандарту – сформуванати загальне уявлення про тіла обертання, їх властивості і зв'язок теми з реальним світом.

Втім, такого об'єму знань вистачає для того, аби вирішувати елементарні задачі з пов'язаних предметів (наприклад, фізика, інформатика, астрономія).

Таблиця 1.1 – Програма рівня стандарту [25]

| Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 12 годин | |
|---|--|
| <p>Учень/учениця:</p> <p>обчислює величини основних елементів тіл обертання;</p> <p>застосовує властивості тіл обертання до розв'язування задач;</p> <p>розпізнає види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об'єктах навколишнього світу.</p> | <p>Циліндр, конус, їх елементи.</p> <p>Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі.</p> <p>Куля і сфера. Переріз кулі площиною.</p> |
| Тема 3. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ 11 годин | |
| <p>Учень/учениця:</p> <p>записує формули для обчислення об'ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, площі сфери;</p> <p>має уявлення про об'єм тіла та його основні властивості;</p> <p>розв'язує задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл, зокрема прикладного змісту.</p> | <p>Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єми призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі.</p> <p>Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса. Площа сфери.</p> |

У рівні стандарту не приділяється достатньо уваги підрозділам, що присвячені комбінаціям фігур, перерізам і, певною мірою, дотичній площині.

В той же час програма профільного рівня (таблиця 1.2) передбачає для вивчення теми «Тіла обертання» 21 годину. До того ж, окремо виділено тему «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання», на яку виділяється 16 годин.

При цьому, учень вже не просто оглядово орієнтується у темі. Для учня профільного курсу тіла обертання не обмежуються окремими випадками у вигляді конуса / циліндра / сфери. Учень вирішує складні задачі, що

потребують високого рівня знань, умінь і навичок, впевнено використовує для вирішення задач зв'язки між алгеброю та геометрією, в тому числі на інтуїтивному рівні.

Крім того, результатом навчально-пізнавальної діяльності учня є аналіз фактів, самостійне доведення теорем, віднайдення наслідків і закономірностей. Загалом, програма профільного рівня передбачає більш глибоке пізнання даної теми, утворення стійких узагальнень з іншими розділами алгебри та геометрії. Профільний рівень передбачає забезпечення певної єдності алгебри та геометрії.

Таблиця 1.2 – Програма профільного рівня [25]

| Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 21 година | |
|--|---|
| <p>Учень/учениця</p> <p>наводить приклади: тіл обертання;</p> <p>пояснює що таке: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс;</p> <p>формулює означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми;</p> <p>формулює і доводить теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною;</p> <p>класифікує геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс;</p> <p>розрізняє елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; видимі і невидимі елементи; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса;</p> <p>зображає рисунком, відповідно до властивостей ортогонального проєкціювання: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданих фігур – висота, твірна, радіус, хорда; площину, дотичну до сфери та</p> | <p>Тіло обертання.</p> <p>Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи.</p> <p>Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі;</p> <p>перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину.</p> <p>Куля і сфера. Переріз кулі площиною.</p> <p>Частини кулі: сегмент, сектор, пояс.</p> <p>Площина, дотична до сфери.</p> <p>Комбінації геометричних тіл.</p> |

Продовження таблиці 1.2

| | |
|--|---|
| <p>переріз кулі площиною; осьові перерізи циліндра та конуса; комбінації просторових фігур;</p> <p>пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; перетин кулі площиною;</p> <p>аналізує та досліджує кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур;</p> <p>обґрунтовує властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного кола;</p> <p>характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; елементи комбінації просторових фігур;</p> <p>розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.</p> | |
| Тема 4. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ 16 годин | |
| <p>Учень/учениця</p> <p>наводить приклади: тіл обертання;</p> <p>пояснює що таке: об'єм циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса; площа сфери;</p> | <p>Об'єм тіл обертання:</p> <p>циліндра,</p> <p>конуса,</p> <p>зрізаного конуса,</p> <p>кулі та її частин.</p> <p>Площа бічної поверхні,</p> <p>площа повної поверхні тіл</p> |

Продовження таблиці 1.2

| | |
|---|--|
| <p>формулює і доводить теореми про об'єм: циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин;</p> <p>розрізняє розгортки поверхні циліндра і конуса;</p> <p>зображує рисунком, відповідно до властивостей паралельного проєціювання: циліндра, конус, зрізаний конус; кулю та її частини; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об'єму;</p> <p>пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об'єму циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єму кулі та її частин;</p> <p>вимірює та обчислює площі бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса;</p> <p>аналізує та досліджує лінійні виміри та величини для обчислення об'єму;</p> <p>обґрунтовує розміщення основи висоти циліндра, конуса, зрізаного конуса; центр кулі; покрокові висновки під час розв'язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження;</p> <p>характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання;</p> <p>вимірює та обчислює об'єм та площі поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; площу сфери;</p> <p>розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення об'єму циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі; площ бічної та повної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, площу сфери.</p> <p>знаходження площ поверхонь комбінації просторових фігур.</p> | <p>обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса. Площа сфери.</p> |
|---|--|

1.3. Особливості введення основних понять та тверджень з теми «Тіла обертання» у шкільних підручниках

Підтверджуючи вище написане, доцільно вказати, що програма рівня стандарту не дозволяє сильно відійти від мінімально необхідного рівня знань, що необхідний учневі. В той же час, автори підручників поглибленого і профільного рівнів мають можливість по-різному підійти до навчального процесу і, відповідно, до побудови самого підручника. Для прикладу, можна порівняти подання матеріалу, пов'язаного з темою «Тіла обертання», у трьох підручниках наступних авторів:

1. А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір.
2. Г. Бевз, В. Бевз, Н. Владімірова, В. Владіміров.
3. Є. Нелін, О. Долгова.

Перший підручник можна вирізнити чіткою структурою і розбиттям теми на підрозділи. Так, наприклад, вивчення циліндра розбите по наступних параграфах:

1. Циліндр
2. Комбінації циліндра та призми
3. Комбінації циліндра (конуса) та сфери
4. Об'єм тіл обертання

Для вивчення теми «Тіла обертання» разом із темою «Об'єми тіл. Площа сфери», виділено тринадцять підрозділів підручника, органічно між собою пов'язаних і зорієнтованих на утворення логічно цілісних (але при цьому відкритих для подальшого розширення) знань з теми. При цьому, підручник має достатній набір як стандартних задач, так і таких, що потребують нешаблонного мислення та оригінального підходу.

Другий підручник вирізняється з-поміж наведених об'ємом інформації (в тому числі додаткової), що приведена на його сторінках. При цьому на вивчення «Тіл обертання» та «Об'ємів тіл та площі сфери» виділено загалом дванадцять параграфів. Та якщо в підручнику «Мерзляк» більша частина була

виділена під тему «Тіла обертання», то в підручнику «Бевз» набагато більше уваги навпаки приділено об'єму тіл. Даний підручник, тим не менш, має потужний набір задач підвищеної складності і зорієнтований на ґрунтовне засвоєння учнями матеріалу і підготовку їх до подальшого вступу на спеціальності, що пов'язані з математикою.

Основною рисою, яка вирізняє третій підручник з-поміж аналогів – імовірно, саме це автори і вважали своєю основною задачею – це лаконічність подання інформації укупі з її повнотою. Два розділи: «Тіла обертання» і «Об'єми й площі поверхонь геометричних тіл», – подано у восьми параграфах. Підручник має багато спільного з методичними посібниками, якими студенти користуються у ВНЗ. Попри це, в ньому подано і проілюстровано всі основні визначення, а теореми подано з доведенням. Обчисленню площі поверхні тіл відведено окремий параграф. Слід зауважити, що лише в цьому підручнику проілюстровано принцип Кавальєрі. Проте, на жаль, немає обґрунтування деяких формул, зокрема, об'єму конуса, а також не згадуються способи обчислення об'єму або площі за допомогою інтегральних формул.

В таблиці 1.3 наведено порівняння цих трьох підручників за поданням теми «Тіла обертання»:

Таблиця 1.3 – Порівняльна таблиця досліджуваних підручників [18, 19, 24]

| | Мерзляк | Нелін | Бевз |
|-------------------|--|---|---|
| | Тіла обертання | | |
| Основні відомості | Поняття тіла обертання введено в розділі, присвяченому циліндра; розкрито суть поняття, пояснено суть поняття осі обертання. | Розділ "Тіла обертання" починається з теми "Циліндр", не приділяючи уваги поняттю тіла обертання. | Вивчення поняття тіл обертання виноситься в окремий розділ; введено поняття осі обертання, площини симетрії, осьового перерізу, розглянуто тор, |

Продовження таблиці 1.3

| | | | |
|------------------------------|--|--|--|
| | | | наведено класифікацію фігур обертання, а також рівняння еліпсу. |
| Формули | $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ | | $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ |
| | Циліндр | | |
| Основні відомості | <p>Поняття циліндра вводиться як множина твірних і дві основи (кола), після цього вводиться поняття тіла обертання, за ним - визначення циліндра як тіла обертання.</p> <p>Вводиться поняття твірної, осі, перерізу циліндра, а також дотичної площини.</p> <p>Наведено основні властивості. Докладно розглянуто еліпс як переріз циліндра, наведено рівняння еліпсу, а також доведення, що перерізом циліндра є саме еліпс.</p> | <p>Введено поняття кругового циліндра, а також, окремо, прямого циліндра. Розглянуто основні поняття, пов'язані з циліндром, а також розглянуто основні перерізи.</p> <p>Наведено основні властивості.</p> | <p>Циліндр одразу пояснюється як тіло обертання. Розглянуто перерізи циліндра, пояснено поняття прямого кругового циліндра, а також циліндра у його загальному понятті.</p> <p>Наведено основні властивості.</p> |
| Комбінації циліндра і призми | Введено поняття описаної і вписаної призми. Комбінаціям циліндра і призми виділено окремий параграф. Розглянуто | Комбінації розглянуто в тому самому параграфі, що і циліндр. Розкрито суть понять вписаної та описаної призми. | Комбінаціям тіл присвячено окремий параграф. Розкрито поняття описаної та вписаної призми. |

Продовження таблиці 1.3

| | | | |
|------------------------------|--|---|---|
| | приклади задач з нестандартними комбінаціями | | |
| Комбінації циліндра та сфери | Теми "Тіла обертання, вписані в сферу" і "Тіла обертання, описані навколо сфери" виділено в окремі параграфи. Розкрито суть понять сфери, описаної навколо циліндра і сфери, вписаної у циліндр. Розглянуто властивості вписаного і описаного циліндрів. | Розділ відсутній. | Теоретичному поясненню комбінацій тіл обертання не приділено багато уваги. Попри це наявний великий вибір задач, у тому числі з нестандартними комбінаціями і тором. |
| Об'єм циліндра | Описано виведення формули об'єму як за аналогією з призмою, так і розв'язанням інтегралу. | Подано узагальнені відомості про об'єм, розкрито поняття об'єму, наведено і доведено формулу для знаходження об'єму циліндра. | Виведення формули об'єму пояснено в одному з параграфів геометричним методом, інший параграф присвячено окремо знаходженню об'єму тіл, зокрема тіл обертання, інтегральним методом. |
| Формули | $S_6 = 2\pi rh$ $S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$ $S_{\Pi} = 2\pi r(h + r)$ $V = \pi r^2 h$ $V = Sh$ | $S_6 = 2\pi rh$ $S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$ $S_{\Pi} = 2\pi r(h + r)$ $V = \pi r^2 h$ $V = Sh$ | $S_6 = 2\pi rh$ $S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$ $S_{\Pi} = 2\pi r(h + r)$ $V = \pi r^2 h$ $V = Sh$ |
| | Конус | | |
| Основні відомості | Поняття конуса вводиться як множина | Визначено поняття кругового конуса, | Визначення конуса формулюється через |

Продовження таблиці 1.3

| | | | |
|------------------------------|---|---|---|
| | твірних і основи (кола), за ним - визначення конуса як тіла обертання. Вводиться поняття вершини, твірної, осі конуса, наводяться перерізи конуса площиною, яка проходить через його вершину. Наведено основні властивості. Велику увагу приділено розгортці. | прямого кругового конуса. Визначено основні складові. Наведено основні властивості. | поняття тіла обертання. Дано визначення основних понять, пов'язаних з конусом. Розглянуто перерізи конуса як криві другого порядку, наведено їх назви, рівняння і графіки. Розкрито узагальнене поняття конуса, визначено поняття прямого кругового конуса. Наведено основні властивості. |
| Комбінації конуса і піраміди | Введено поняття описаної і вписаної пірамід. Комбінаціям конуса і піраміди виділено окремий параграф. Розглянуто приклади задач з нестандартними комбінаціями. | Введено і проілюстровано поняття описаної і вписаної пірамід. | Введено поняття описаної і вписаної пірамід. Розглянуто приклади задач з нестандартними комбінаціями. |
| Комбінації конуса і сфери | Розкрито суть понять сфери, описаної навколо конуса і сфери, вписаної в конус. | Розділ відсутній. | Розділ відсутній. |
| Об'єм конуса | Формулу для розрахунку виведено інтегральним методом. | Формулу для розрахунку виведено з допомогою принципу Кавальєрі. | Формулу для розрахунку виведено за аналогією з пірамідою. |
| Формули | $S_6 = \pi r l$ $S_{\Pi} = S_6 + S_{\text{осн}}$ | $S_6 = \pi r l$ $S_{\Pi} = S_6 + S_{\text{осн}}$ | $S_6 = \pi r l$ $S_{\Pi} = S_6 + S_{\text{осн}}$ |

Продовження таблиці 1.3

| | | | |
|----------------------------------|---|---|--|
| | $S_{\pi} = \pi r(l + r)$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $V = \frac{1}{3} Sh$ | $S_{\pi} = \pi r(l + r)$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $V = \frac{1}{3} Sh$ | $S_{\pi} = \pi r(l + r)$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $V = \frac{1}{3} Sh$ |
| | Зрізаний конус | | |
| Основні відомості | Визначення подається з використанням поняття конуса, за умови його перетину площиною, що паралельна основі. Велику увагу приділено розгортці. | Визначення подається з використанням поняття конуса, за умови його перетину площиною, що паралельна основі. Розгортку зрізаного конусу не подано. | Визначення подається з використанням поняття конуса, за умови його перетину площиною, що паралельна основі. Розгортку зрізаного конусу не подано. Перерізи конуса площинами розглядаються в ракурсі зрізаного конусу, з подальшим наведенням кривих другого порядку. |
| Комбінації зі зрізаною пірамідою | Введено поняття зрізаної піраміди, описаної навколо зрізаного конуса і такої, що вписана в зрізаний конус. | Введено і проілюстровано поняття описаної і вписаної зрізаних пірамід. | Розділ відсутній. |
| Комбінації зі сферою | Введено поняття сфери, описаної навколо зрізаного конуса і такої, що вписана в зрізаний конус. Наведено властивість вписаної сфери. | Розділ відсутній. | Розділ відсутній. |

Продовження таблиці 1.3

| Об'єм зрізаного конуса | Формулу для розрахунку виведено інтегральним методом. | Формулу для розрахунку виведено геометричним методом. | Формулу для розрахунку виведено за аналогією зі зрізаною пірамідою. |
|------------------------------|---|--|---|
| Формули | $S_6 = \pi(R + r)l$ $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ $V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ | $S_6 = \pi(R + r)l$ $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ $V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ | $S_6 = \pi(R + r)l$ $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ $V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ |
| | Сфера | | |
| Основні відомості | Подано визначення кулі. Пояснено значення понять: центр кулі, радіус кулі, діаметр кулі, поверхня кулі, великого кола сфери, великого круга кулі. Вказано можливі варіанти взаємного розміщення з площиною. Розкриті значення поняття кульового шару. | Подано визначення сфери і кулі. Коротко пояснено їх основні компоненти. Проілюстровано взаємне розміщення кулі і площини. | Подано визначення кулі. Пояснено значення понять: центр кулі, радіус кулі, діаметр кулі, поверхня кулі, великого кола сфери, великого круга кулі. Вказано можливі варіанти взаємного розміщення з площиною. Розкриті значення поняття кульового шару. |
| Комбінації з многогранниками | Для вписаних і описаних многогранників відведено окремі параграфи. Наведено кілька ключових достатніх ознак, що дозволяють визначити, коли коло можна вписати / описати, в тому числі у вигляді опорних задач. | Комбінації кулі з призмою та пірамідою винесені в окремий параграф. Розглядувані випадки описано і проілюстровано. Достатні ознаки наведено. | Розділ узагальнений. Наведено приклади вирішення задач. |

Продовження таблиці 1.3

| Комбінації сфер | Розділ відсутній. | Проілюстровано і пояснено взаємне розміщення двох куль / сфер. | Проілюстровано і пояснено взаємне розміщення двох куль / сфер. |
|---------------------|--|---|---|
| Об'єм і площа сфери | Формулу для об'єму пропонується вивести за допомогою інтегральної формули (подається без доведення). Формула площі подається так само без доведення. | Обидві формули приводяться з геометричним доведенням. | Формула об'єму виводиться інтегральним методом. |
| Сектор і сегмент | Подано визначення кульового сектору і сегменту. Формули і їх вивід (з допомогою інтегралу) додаються. | Подано визначення кульового сектору і сегменту. Формули і їх вивід (геометрично) додаються. | Формула виводиться шляхом наближення товщини кульового шару до нуля. |
| Формули | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S = 4\pi r^2$ $V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$ $V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi r h^2$ | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S = 4\pi r^2$ $V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$ $V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi r h^2$ | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S = 4\pi r^2$ $V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$ $V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi r h^2$ |

«Мерзляк» робить упор на стандартні конструкції, заглиблюючись в них і комбінуючи. Дуже добре підходить для отримання нових навичок і заточування їх, оскільки матеріал поданий у логічній послідовності і добре «розжований», а також через добре підібраний набір задач.

«Бевз» опрацьовує величезний обсяг матеріалу і має багатий набір завдань, що потребують творчого підходу. Такий підручник добре підійде для сильних профільних класів, учні яких вже мають певні навички в такого роду діяльності. В іншому випадку підручник ризикує бути заскладним, хоча успішне навчання з його допомогою в будь-якому разі можливе.

«Нелін», через свою лаконічність у поданні інформації і розмежований набір задач, непогано підходить для ліквідації відставання за рахунок вивчення і закріплення найголовніших моментів. Крім того, даний підручник може бути використаний у якості посібника для підготовки до ЗНО.

Автори підручників писали їх, користуючись тими основними засадами і тою метою, яку в їхньому випадку вважали такою, що найбільш варта досягнення.

1.4. Методичні вказівки до вивчення теми «Тіла обертання»

Зважаючи на специфіку теми, необхідно зробити акцент на трьох основних моментах:

1. Розвиток графічних навичок учнів.
2. Розвиток просторової уяви.
3. Розвиток аналітичних навичок учнів.

Щодо першого пункту, то перш за все варто згадати правила, сформульовані професором Четвертухіним [31]:

1. Рисунок повинен бути побудованим за допомогою одного методу проектування [15].
2. Рисунок має бути наочним, таким, що допомагає у вирішенні задачі.
3. Рисунок має бути простим у побудові.

Ці правила актуальні як для учня, так і для вчителя. Адже за допомогою наочних зображень учень не лише легше розуміє суть задачі, але і швидше розвиває просторову уяву.

Крім того, для побудови тіла обертання необхідно приділити більше уваги безпосередньо до того, як зображується те чи інше тіло.[11, 29]

Наприклад, доцільно спочатку використовувати шаблон еліпса для побудови основ циліндра або конуса. Якщо такого немає, необхідно, щоб учні визначили для себе пропорції, в яких вони будуть креслити еліпс, і

проставляли точки перед тим, як накреслити фігуру. Наприклад, так, як на рис.1.2:

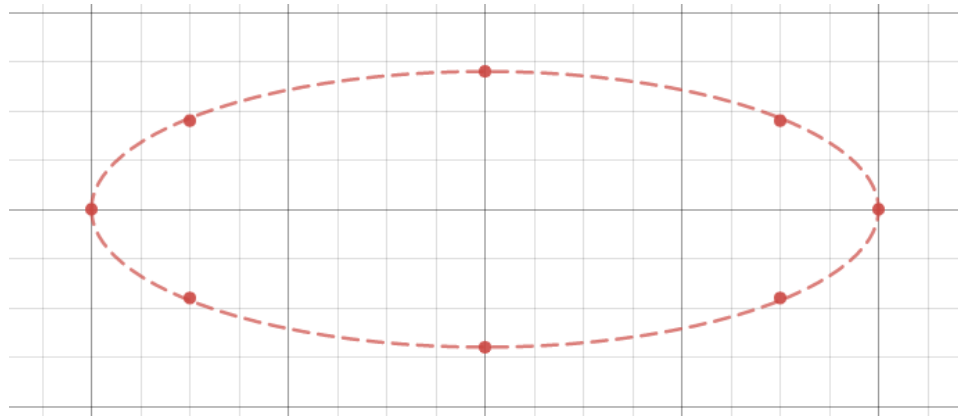


Рис. 1.2 – Приклад попередньої розмітки еліпса

Адже інакше легко збитися, накреслити криво або просто через неуважність не застосувати де потрібно штриховану лінію. В той же час, попередньо спланований рисунок з більшою імовірністю буде виконаний без помилок. Такі пропорції мають лишатися для учня незмінними, аби бути відпрацьованими до автоматизму. Після того, як усі опорні точки нанесено, можна приступати до верхньої основи, за нею – дві бічні твірні, далі – нижня основа, після чого можна позначити радіус і твірну у разі необхідності.

Варто пам'ятати, що для деяких учнів такий порядок дій буде очевидним або навіть сама побудова буде інтуїтивно зрозумілою, проте для інших необхідно вказати вголос ці правила.

Загалом же, для всіх тіл обертання можна виділити узагальнений алгоритм побудови:

1. Створити попередню розмітку для тіла / фігури.
2. Побудувати видимі елементи.
3. Побудувати елементи, що потребують штриховки.
4. Зробити необхідні позначки на рисунку.
5. Якщо умова задачі передбачає побудову наступних елементів, перейти до п. 1, інакше – до п. 6.

6. Приступити до вирішення задачі.

Цей алгоритм, вивчені пропорції фігур, а також навички паралельного проектування – це те, чого в більшості випадків достатньо для вирішення задачі. Але, відповідно, для того, аби навички проектування і креслення фігур були закріплені, необхідно давати прості вправи на побудову.

Що стосується розвитку просторової уяви, то тут існує кілька підходів. По-перше, це використання макетів фігур. З цим пов'язані певні проблеми. На відміну від многогранників, макети тіл обертання мають містити не лише «каркас». Для кращого розуміння необхідна бічна поверхня. Крім цього, бажано робити макет таким, щоб його можна було швидко розібрати для того, аби продемонструвати учням той чи інший елемент в розгортці. Ще один недолік макету полягає у тому, що, незважаючи на ефективність, дана технологія морально застаріває, поступаючись ІКТ. Справа в тому, що за допомогою відповідного програмного забезпечення можна швидко створювати свої моделі, які до того ж будуть динамічними. Це допоможе без зайвих зусиль пояснити, наприклад, зв'язок між об'ємом призми і циліндра або той же принцип Кавальєрі. Відповідно, використання динамічних моделей системно і протягом певного проміжку часу формує в учня принципово новий погляд на задачі як з геометрії, так і з алгебри, створюючи новий, більш ефективний інструментарій для їх розв'язання.[12]

Ще одним способом закріпити отримані навички є усні вправи. При цьому, є кілька варіантів їх використання. Можна давати прості задачі фронтально, в групах або в парах. Крім того, можна заохочувати усне рішення задач із підручника перед їхнім записом у зошит. Тим не менш, не варто погоджуватись на занадто сильне спрощення запису задачі, оскільки це може негативно вплинути на подальше написання контрольних робіт і відкритих завдань ЗНО.

Можна надавати усні задачі з готовим рисунком. Особливо ефективна така практика в сукупності з використанням динамічних комп'ютерних моделей. Причина цього полягає в тому, що таким чином учень тренується не

просто аналізувати рисунок, а працювати з ним, застосовуючи еквівалентні перетворення або застосовуючи додаткові побудови (засвоєння цього методу зазвичай є проблемою, адже неочевидно, коли саме застосовувати надбудову). [20] Під час вирішення такого роду задач в учня з'являється можливість думати зі зручною швидкістю, не відволікаючись на розписування задачі.

Саме тому зазвичай починають саме з таких задач, а потім поступово прибирають зоровий супровід.

1.5 Методика розв'язування задач з основних розділів теми «Тіла обертання»

В даному пункті буде розглянуто методику розв'язування задач, яка стосується тіл обертання взагалі, а також стосовно деяких конкретних видів задач.

Перш за все, варто розглянути загальну методику розв'язування задач з теми «Тіла обертання». Зокрема, під час вирішення задач з даної теми необхідно активно проводити паралелі з попередньо вивченою темою «Многогранники». Зокрема, мають місце паралелі між циліндром та призмою, конусом та пірамідою, зрізаним конусом та зрізаною пірамідою.

Приклад 1. Знайти об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює R , а висота – H .

В такому випадку проводиться паралель між об'ємом призми і об'ємом циліндра. Інтуїтивно дійшовши до висновку, що для обох випадків варто площу основи помножити на висоту, розв'язуємо задачу. Після цього пропонується подумати, чи зміниться об'єм фігури, якщо, наприклад верхню основу змістити, не виходячи при цьому з її початкової площини. Таким чином, навіть якщо принцип Кавальєрі і не вивчається за програмою, учні отримають деякі практичні навички з його використання.

Якщо учні знайомі з інтегральним численням на достатньому рівні, можна задати конус як правильну піраміду з нескінченно великою кількістю

кутів і застосувати правило для знаходження площі бічної поверхні піраміди до конуса. Навіть якщо учні не ознайомлені з інтегральним численням на достатньому рівні, створені моделі можуть допомогти учням уявити, про що саме йде мова.

Наступне, на що потрібно звернути увагу, – це використання узагальнених формул для знаходження об'ємів тіл.

Приклад 2. Вивести формулу, за якою можна було б знайти об'єм зрізаного конуса, якщо відомі радіуси його основ і висота:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

Виведена формула має наступні особливості:

1. Вона є конкретним випадком формули об'єму зрізаної піраміди.
2. Вона легко узагальнюється на інші тіла обертання, що вивчаються у програмі рівня стандарту. Дійсно, якщо для даної формули застосувати рівність $R = r$, то отримаємо формулу $V = \pi R^2 h$, тобто формулу об'єму циліндру. Якщо застосувати $r = 0$, то отримана формула матиме вигляд $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, що є формулою об'єму конуса.

Варто окремо розглянути задачі на комбінації тіл обертання між собою і з многогранниками.

В таких задачах особливо важливо зосередитись на правильній побудові рисунку, про що вже було сказано вище. Крім того, такі задачі є досить різноманітними, тому має сенс після вирішення кількох задач, що є більш-менш типовими, дати учням нестандартні задачі. Це допоможе додатково розвинути просторове мислення, творчу уяву, а також послужить для повторення матеріалу, вивченого раніше, зокрема для того, щоб учні потренувалися застосовувати отримані навички в неочевидних ситуаціях.

Окремої уваги заслуговують задачі, пов'язані з кулею і сферою. З одного боку, ця фігура інтуїтивно сприйнятна, з іншого ж боку тут є менше

можливостей застосування аналогій з попередньо вивченими темами. Тому, якщо є можливість, було б непогано у вигляді факультативних задач розглянути доведення Архімеда для об'ємів конуса і кулі, а також по можливості пояснити зміст формули площі сфери [10]. Для роз'яснення такого матеріалу можна використовувати також відеоматеріали, представлені у відкритих джерелах.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

В даному розділі було розглянуто деякі методичні аспекти вивчення теми «Тіла обертання». Було проаналізовано програму з 5 по 11 класи з точки зору вивчення теми «Тіла обертання». Виявлено, що перше знайомство з тілами обертання має місце ще у 6 класі, після чого учні мають можливість поглибити свої знання та покращити навички застосовуючи інструментарій, що його було розглянуто в подальших класах.

Під час аналізу програми 11-го класу було порівняно програми рівня стандарту і профільного рівня. Програма рівня стандарту зорієнтована на оглядове ознайомлення з темою, в той час як програма профільного рівня розрахована на глибинне розуміння теми і використання отриманих навичок для вирішення нестандартних задач.

Було порівняно підходи до подання теми в різних підручниках. Виявлено, що тема корелює з багатьма іншими темами, не лише шкільними, але й такими, що мають відношення до вищої математики. Відповідно, в деяких підручниках з геометрії подано такі дані в якості додаткових, що правда лише в ознайомчому плані.

Під час розгляду методичних особливостей викладання теми, було встановлено, що особливої уваги заслуговують: правильне креслення малюнків, наведення міжтематичних зв'язків, звернення уваги на можливість узагальнення формул.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ ПРОСТОРОВИХ НАВИЧОК В УЧНІВ

Під час вивчення стереометрії досить важлива роль відводиться безпосередньо розвитку просторового мислення учнів, а також вмінню аналізувати одночасно велику кількість інформації.

При цьому пропонується розрізняти розвиток абстрактного і просторового мислення, вміння роботи з інформацією, розвиток короткочасної («оперативної») пам'яті, а також розвиток математичної інтуїції.

Під абстрактним мисленням розуміється такий тип мислення, який дозволяє утворювати абстрактні поняття і оперувати ними (використовувати знання про предмет, а не чуттєвий досвід для отримання нових знань). При цьому очевидно, що для оперування абстрактними поняттями, вони мають бути повними і логічно цілісними. При цьому вони повинні бути достатньо динамічними для того, аби створена уявна модель могла зайняти стан, необхідний для успішного вирішення поставленої задачі.[13]

Просторове мислення – це безпосередньо вміння мислити у трьох вимірах, детально уявляти умову поставленої задачі, орієнтуючись переважно на візуальне сприйняття. Під час розв'язування типових задач в учня формуються певні навички роботи з типовими формами, однак це не є показником розвинутого просторового мислення.[14] У цій роботі будемо вважати ним вміння учня швидко сприймати незнайомі форми або нестандартні комбінації знайомих форм, здатність роботи з ними.

Основні навички роботи з інформацією – це:

- сприйняття;
- обробка;
- запам'ятовування;
- відтворення.

Відповідно, від рівня цих навичок залежить те, як добре загалом учень уміє працювати з інформацією.

Під короткочасною пам'яттю розуміється такий вид пам'яті, що характеризується дуже коротким збереженням після одноразового сприйняття і миттєвим відтворенням [17]. Цей вид пам'яті використовується людиною для концентрації на певному об'єкті. Короткочасна пам'ять дуже обмежена. Її тривалість коливається від 15 до 30 секунд, а за правилом Міллера вона може вміщувати 7 ± 2 структурних об'єкти (літери, речення, об'єкти, ідеї). [27, 28] Іншими словами, для розвитку короткочасної пам'яті потрібно зосередитись на розвитку наступних якостей:

- вміння концентруватися (для збільшення тривалості запам'ятовування);
- вміння структурувати інформацію (для збільшення об'єму короткочасної пам'яті);
- візуальне запам'ятовування (існує думка, що короткочасна пам'ять краще спирається на вербальний код, а на зоровий – гірше). [1]

Крім цього, для тренування короткочасної пам'яті добре підходять вправи, які потребують швидкого прийняття складних рішень, оскільки цей вид пам'яті бере безпосередню участь в цьому процесі.

Визначення математичної інтуїції досить важко сформулювати. Між тим, саме її наявність робить спеціаліста дійсно цінним у будь-якій сфері, яка має зв'язок із математикою. Справа в тому, що для вирішення нестандартної проблеми або для віднайдення чогось нового потрібно проявити певну творчість. Наявність математичної інтуїції неможлива без розвитку всіх якостей, перелічених вище.[7]

2.1 Методи розвитку абстрактного мислення при вивченні теми «Тіла обертання»

Перш за все, варто визначитись, яку саме роль грає абстрактне мислення при вивченні даної теми. Тіла обертання, що вивчаються в школі – це циліндр, конус, зрізаний конус і сфера. Існують задачі на різноманітні комбінації даних фігур, на перетин такої фігури площиною та ін.

Розвинуте абстрактне мислення в учня дозволяє йому мінімізувати кількість нового матеріалу, необхідного для засвоєння, дозволяючи сконцентруватись на вирішенні практичних задач. Доведемо це на прикладі конуса. По суті, у конуса одна природа із вивченою раніше пірамідою. Це обумовлює схожі формули для знаходження їх об'єму. Як для конуса, так і для піраміди, об'єм дорівнює третині добутку площі основи на висоту. Більше того, навіть не маючи знань про інтеграли, учень, узагальнивши отримані знання, може висловити гіпотезу про схожість природи цілої групи фігур, що мають в основі не лише плаский багатокутник або коло, але і пласку фігуру будь-якої форми, а отже – і про те, як можливо знайти їх об'єм. Це, у свою чергу, розширює знання учнів за межі даної теми. Крім того, оволодівши інструментарієм, що надає абстрактне мислення, учень легко приходить до висновку про незмінність об'єму піраміди, а отже – і конуса у випадку переміщення його вершини в площині паралельній основі. Так само, важливим моментом є схожість властивостей апофеми правильної піраміди і твірної прямого конуса.

Для розвитку абстрактного мислення пропонується збільшити об'єм виконуваних задач, що передбачають розрахунки в загальному вигляді. Наприклад, можна запропонувати учням самотійно вивести формулу для знаходження об'єму зрізаного конуса, якщо відомі його висота і радіуси основ (це задача високого рівня складності, варто починати з легших завдань). При цьому пропонується створити анімацію, що поступово перетворює конус на зрізаний конус (перетворюючи точку вершини в коло), а зрізаний конус – у

циліндр, який, у свою чергу, перетворюватиметься знов у зрізаний конус, але основа зі змінним радіусом у нього вже більша. Після цього учням пропонується висловити гіпотези відносно того, від чого залежить зміна об'єму фігури і, можливо, як її знайти. Учні можуть висловити гіпотезу про те, що об'єм може залежати від відношення радіусів основ, або від різниці висот повного конуса і зрізаної частини, або ж висловлять думки, наприклад про те, що можна почати з різниці об'ємів конусів та інші корисні гіпотези, які можна використати для перетворень у формулі. Далі приступати до розв'язку.

Сенс методу полягає в тому, щоб створити для учнів умови, в яких вони б вільно мислили, співставляючи відомі їм властивості і роблячи відповідні висновки. При цьому учитель під час виконання таких вправ у перші кілька разів як навчає учнів правильно вибудовувати гіпотези в існуючу модель без її «краху», так і правильно організовувати групову роботу.

Існує сенс поєднувати алгебру з геометрією, створюючи нестандартні задачі.[22] Наприклад, наступна задача. Дано конус з певною висотою і радіусом основи, які можуть змінюватись. Єдина умова – вони змінюються таким чином, що об'єм конуса лишається константою. Через вершину конуса і його діаметр проведено декартову площину, при цьому початок координат співпадає з вершиною конуса, а висота конуса лежить на осі ординат. Визначити геометричне місце точок, в яких дану площину може перетинати коло основи. Учні пропонується після короткого часу, даного на роздуми, висловити власні гіпотези з приводу того, яку форму матиме утворена крива. Після цього завдання вирішується в зошиті. Особливу увагу звернути на те, щоб учні не пропустили знак модуля.

Цей прийом зорієнтований переважно на укріплення цілісності структури вивченої на уроках математики інформації. Конкретно даний приклад додатково розвиває навички просторового мислення.

Узагальнюючи описані прийоми, можна сказати, що для активізації розвитку абстрактного мислення варто використовувати продуктивні методи навчання з упором на дедукцію.

2.2 Методи розвитку просторового мислення

Як було зазначено вище, під просторовим мисленням мається на увазі здібності до мислення у трьох вимірах. При розгляді даної теми важливо спершу розглянути просторове мислення в ракурсі механізму роботи короткочасної пам'яті.

Сформулюємо наступні логічні ланки у вигляді оптимізаційної задачі. Короткочасна пам'ять має значні обмеження в часі (15 – 30 секунд) і місткості (7 ± 2 структурні об'єкти). Оптимізуємо результат, тобто рішення, прийняте внаслідок використання короткочасної пам'яті, без допомоги підручних засобів (як зошит, ручка і т. п.).

Найперший крок – конкретизація поняття «структурний об'єкт». Ним може виступати як окрема точка, так і відрізок, або пласка фігура, площина, об'ємна фігура або навіть їх звичні комбінації. Що сприймається мозком учня як структурний об'єкт, визначає здебільшого його практика у вирішенні задач того чи іншого типу, а також здатність до навчання, але про це докладніше буде описано в підрозділі, присвяченому розвитку короткочасної пам'яті. На даному ж етапі пропонується введення деяких простих правил, які зможуть допомогти покращити роботу короткочасної пам'яті шляхом «правильного уявлення» математичних об'єктів.

Приступимо до їх виведення. Почнемо з простого. Розглянемо точку і відрізок. Якщо учень уявляє відрізок спершу як дві точки на краях відрізка, а потім «проводить» між ними лінію, то це вже три об'єкти, які одночасно тримаються у короткочасній пам'яті. Якщо ці дві точки будуть ще й названі літерами латинського алфавіту, то можна говорити вже про п'ять об'єктів (спірне питання, бо все залежить від образу, створеного мозком учня відповідно до поняття «точка» в його довготривалій пам'яті). За таких умов учневі буде складно навіть тримати в голові всі ці об'єкти, вже не говорячи про те, щоб додавати нові або виконувати маніпуляції із вже існуючими. При

цьому ніщо не заважає учневі обмежитися одним об'єктом, а саме самим відрізком, без точок і найменувань. Створений образ так чи інакше залишиться на певний час у довготривалій пам'яті. Таким чином, уявивши відрізок, ми за необхідності можемо абстрагуватись від одних об'єктів, зосереджуючи увагу на інших, після чого можна повернутись до загальної моделі. Розберемо дане правило на прикладі тетраедру. Якщо учень перш за все уявляє тетраедр, фокусуючи увагу на точках, то йому так чи інакше доведеться їх між собою поєднувати відрізками. Це вже завантажує короткочасну пам'ять настільки, що певні деталі перестають надійно в ній триматися (4 вершини і 6 ребер, всього 10 об'єктів; хоч вони між собою пов'язані, все одно, тримати їх таким чином є досить важкою задачею). В той же час можна одразу зосередитись на ребрах тетраедру так, як раніше було оговорено про уявлення відрізка. Тепер маємо замість 10-ти об'єктів лише 6, а до окремих частин тетраедра під час рішення задачі можна звернутися окремо, розглядаючи той чи інший елемент. Наступний етап – фокусування на гранях (4 об'єкти), далі – фокусування на всьому тетраедрі цілком. Між цими етапами може знаходитись етап, на якому тетраедр (піраміда, конус) сприймається як сукупність двох елементів: перший – основа, другий – все інше. Складність полягає в необхідності сприймати об'єкт як єдине ціле з усіма його властивостями. Тому час від часу доводиться відходити від фігур більш високого порядку на користь фігур, що є їх складовими. Проте, чим більш розвинутим є абстрактне мислення учня, тим менше виникає проблем подібного роду. На основі цих логічних міркувань можна сформулювати три правила:

- 1) Необхідно, за можливістю, фокусуватися на фігурах більш високого порядку, застосовуючи декомпозицію до окремих елементів.
- 2) Необхідно ділити модель на якомога меншу кількість структурних об'єктів.
- 3) Застосовуючи декомпозицію, необхідно частково абстрагуватись від решти моделі (мозок сам поновить її в пам'яті за необхідності, відтворивши з довготривалої).

Для того, аби навчити учнів даним правилам, потрібно не лише сформулювати їх, але й бажано застосувати ряд тренувальних вправ, метою яких є створення звички застосовувати ці правила на практиці. Механізм даних вправ має бути націленим на створення екстремального навантаження на короткочасну пам'ять.

Такі вправи можуть включати повороти складних геометричних тіл подумки, уявлення їх комбінацій, завдання на пошук певної проекції фігури тощо. Наприклад, в якості тренажера, можна дати завдання учням уявити тетраедр, після чого повернути його так, щоб тетраедр в отриманій позиції виглядав як трикутник; накреслити даний трикутник за допомогою лінійки і циркуля, зберігши і виписавши пропорції. Якщо говорити про тіла обертання, непоганою задачею може бути уявлення конуса в такому положенні, щоб його вершина і певна точка основи лежали на одній прямій з уявною точкою зору. Після чого уявити всі такі можливі положення одночасно і вказати, які фігури нагадують ділянки, що не затронуті новоутвореною фігурою.

Розібравши ту частину задачі, де говорилося про структурні елементи і вивівши з неї правила, можемо приступити до обробки часового обмеження. Частково ми вже знайшли рішення для даної проблеми, застосували декомпозицію і абстрагування. Це дозволить проводити більш довгі логічні ланцюги завдяки використанню довготривалої пам'яті. Таким чином ми можемо вирішувати одну задачу за більш ніж один «сеанс» прийняття рішення, розділяючи рішення задачі на складові. Попри це, важливим моментом є ще й розвиток швидкості мислення. Таким чином, навіть не маючи змоги розкласти задачу на більш прості складові, учень має змогу вирішити її, оскільки думає швидше, а отже – має більше шансів укластися у ті 15 – 30 секунд, під час яких інформація зберігається в короткочасній пам'яті. До того ж, розвиваючи швидкість ходу думок, учень може отримати великий поштовх в плані розвитку математичної інтуїції (перший закон діалектики – перехід кількісних змін в якісні) [33]. Докладніше про короткочасну пам'ять у відповідному підрозділі.

Тепер варто перейти безпосередньо до розвитку просторових навичок. Маються на увазі саме вміння, пов'язані з перетвореннями і застосуванням вивченого матеріалу на практиці. Окрім практики з вирішенням задач, допомагають вправи, зорієнтовані на повороти об'ємних фігур та проектування, а також задачі прикладного типу. Прикладом може послужити наступна задача родом із Кореї: «Є гора конусоподібної форми, довжина схилу (твірна) якої дорівнює 60 од., а радіус – 20 од. Точка А розташована у підніжжя гори, а точка В – на 10 од. вище по схилу від точки А. Із точки А до точки В довкола гори прокладено залізничну колію для туристичного потягу таким чином, що вона є найкоротшою. Знайти її довжину. (більш складна версія задачі: потяг, ідучи цією колією, певний час ручається вгору, після чого він рухається вниз; знайти довжину низхідного маршруту)». Дана задача потребує використання розгортки конуса, визначення і побудови найкоротшого маршруту, вирішення питання, чим на утвореному кресленні є низхідна частина маршруту і, відповідно, її обчислення. Подібні задачі не лише значно розвивають просторове мислення, але й навчають учнів розбивати задачу на менші підзадачі, тобто застосовувати декомпозицію.

2.3 Методи розвитку короткочасної пам'яті

Як було зазначено вище – короткочасна пам'ять – це той вид пам'яті, що відповідає за обробку інформації і прийняття рішень.[23] В математиці короткочасна пам'ять відіграє істотно більшу роль, ніж довготривала, оскільки існує необхідність в запам'ятовуванні лише невеликих обсягів інформації, а саме визначень і деяких правил. Крім того має місце запам'ятовування певних стандартних патернів для більш швидкого рішення елементів задач і кращої структуризації інформації. Між тим, за якнайліпшу структуризацію інформації і її відкладення в довготривалій пам'яті відповідає як раз пам'ять короткочасна. По суті, можна сказати, що просторове мислення при вивченні стереометрії – це значною мірою як раз робота короткочасної пам'яті, що

використовує інформацію, структуровану правильним чином. Звичайно, не можна ототожнювати ці два поняття, але не можна і не звернути уваги на тісний зв'язок між ними.

У свою чергу, для розвитку короткочасної пам'яті існують і кілька загальних правил, яких варто дотримуватись. Деякі з них можна адаптувати і для уроків геометрії. Ось деякі з них:

1. Формування навичок структуризації має супроводжуватись розгалуженим поданням моделей.
2. Формування навичок концентрації повинне супроводжуватись позитивною мотивацією.
3. Незважаючи на те, що, імовірно, короткочасна пам'ять краще працює з вербальною інформацією, ніж з візуальними образами, від цієї концепції бажано відходити.

Почнемо розбір з останнього правила. Дійсно, деякі експерти схиляються до того, що короткочасна пам'ять краще працює з інформацією, що подана словесно. Питання в тому, що є тому причиною? В певному сенсі відповідь очевидна: людський інтелект багато в чому базується на створенні узагальнень, а ці узагальнення, у свою чергу, приймають форму слів і символів. Так і виходить, що слово є своєрідним «ярликом», який відкриває доступ до абстрактної моделі і її властивостей. Між тим, коли умова задачі вже відома учневі, необхідність в подібних «ярликах» відпадає. Мислення можна зробити більш ефективним, якщо не задіювати подібну систему. Вербальне подання інформації має бути одідвинуте на один рівень з образами, сформованими пам'яттю, а також іншими органами чуття в період засвоєння поняття.

Практика показує, що цьому досить сильно сприяють наочні матеріали, зокрема відео розв'язання нестандартних задач із рішенням, поданим іноземною мовою. Засвоєння нових термінів одразу українською і, наприклад, англійською мовами, а також їх змішане використання (подання умови задачі

іноземною мовою) також сприяє девербалізації уявлень, а також урізноманітнює структурування матеріалу.

Таким чином поступово можемо перейти до першого правила, яке говорить, що формування навичок структурування має супроводжуватись розгалуженим поданням моделей. Цієї теми ми вже торкалися раніше, коли проводили паралелі між конусом, пірамідою і трикутником. Тут важливе місце посідають також міжпредметні зв'язки.

Говорячи про площу сфери ($S = 4\pi r^2$), можна:

1. Звернути увагу на те, що, по суті це є чотири площі круга того ж радіусу (можна дати можливість учням спробувати уявити, як так виходить; незалежно від того, що вони отримають, це відкладеться в їхній пам'яті).

2. Умовно вписати тетраедр в сферу, спроектувати на поверхню сфери його ребра, прийнявши центр сфери за основу проектування; запропонувати учням оцінити площу кожного з новоутворених криволінійних трикутників.

3. У класах з поглибленим вивченням математики або на занятті математичного гуртка запропонувати учням розділити поверхню сфери трьома паралельними площинами так, щоб чотири новоутворені фігури мали рівну бічну поверхню.

Формування зв'язків між предметами і поняттями значно підвищує рівень компетентності учня в тому чи іншому питанні, а також полегшує для нього вирішення нестандартних задач, оскільки вчить учня тому, що на заході називають «out-of-box thinking». Часто це поняття перекладають як «нестандартне мислення», проте за суттю, переданою в самому терміні, це скоріше означає «думати поза межами чогось», наприклад, теми, що вивчається на даний момент з даного предмету. А це, поза всякими сумнівами, як мінімум значно розширює інструментарій при вирішенні задачі.

Переходячи до другого правила, потрібно внести зауваження, що позитивна мотивація взагалі позитивно впливає на процес навчання. Для формування позитивної мотивації можна збільшити кількість групових робіт, довівши такі види діяльності до таких, що мають місце на кожному уроці. При

цьому можна перемішувати групову діяльність із парною і, можливо, індивідуальною. При цьому не можна забувати для чого призначені ці види діяльності.

Фронтальний вид роботи можна застосувати при вивченні нової теми в рамках діалогу з класом.

В той же час групова робота має кілька основних призначень. Перше – коли група організована таким чином, що всі її учасники мають рівень вищий, ніж середній. Така група швидко засвоює новий матеріал за рахунок того, що учні компенсують слабкі сторони один одного. Якщо в такій групі панує конструктивна атмосфера, то зазвичай достатньо того, аби один з її учасників зрозумів матеріал. Він / вона швидко і надійно пояснить матеріал остачі за рахунок двох факторів:

- налагоджена робота в групі;
- власні зусилля кожного з учасників, внаслідок чого формуються певні уявлення про предмет.

З певного моменту учасникам такої групи можна час від часу давати різні задачі і дозволяти пояснювати їх рішення всім. Однак це можливо лише за умови, що кожен з її членів має достатній рівень математичної компетентності.

Групи, що сформовані з учнів з різним рівнем знань, добре підходять для того, аби підвищувати рівень знань тих, хто відстає, а також аби закріплювати рівень тих, хто добре розуміється на матеріалі.

Для підтримки високої мотивації можна застосовувати проектний метод роботи. Такий вид роботи, як і всі групові, проте, можливо, навіть більшою мірою, сприяє подоланню так званої «проблеми гуманітарія». Учням, що не мають аналітичного типу мислення, не бракує уяви для роботи із задачами зі стереометрії. У даній роботі висувається припущення, що проблема полягає в тому, що такі учні мають інший підхід до структуризації інформації. Звертаючи більше уваги на «властивості», а не на «форму», ці учні мають таким чином іти більш складним шляхом, минаючи або значною мірою

обходячи ту стадію, коли конкретні ідеї, об'єднуючись, формують певний абстрактний образ-узагальнення. Між тим, вони здатні сприймати такі образи, проте дещо по-іншому. З одного боку, це ускладнює сприйняття матеріалу, але з іншого, за умови належного пояснення, це полегшує інтуїтивне сприйняття матеріалу. Більше того, учні, що мають подібний хід думок, вкупі з розвинутою уявою і певною підготовкою, мають схильність до інтуїтивного виконання різноманітних геометричних перетворень, а відтак – і до декомпозиції умови складних задач.

Для розкриття потенціалу таких учнів можна застосувати проектну діяльність. Спершу для ефективної роботи потрібно правильно сформувати групи. Доцільно розподілити ролі в групі. Якщо завдання передбачає певне дослідження або експеримент, то такі задачі досить добре підійдуть для учня з «гуманітарним» ходом думок. Під певним керівництвом зі сторони сильнішого учня і використанням належного програмного забезпечення, як GeoGebra (програмне забезпечення буде описано в наступному розділі), такі учні отримують саме такий досвід, який допоможе їм розвинути як математикам. Без програмного забезпечення така робота також можлива, проте вона має бути організована таким чином, щоб не надто сильно втратити ефективність від цього. Роль вчителя в такому випадку збільшується і контроль над проведенням дослідження, відповідно, має бути збільшеним.

Успішно проведена групова робота піднімає вмотивованість учнів. Крім цього є кілька моментів стосовно організації груп, на які варто звернути увагу. Перш за все це те, на який термін організовуються групи. Існує два основні підходи. Перший – це часте тасування груп. Це сприяє розвитку навичок групової роботи в учнів, що вже мають певний досвід і є компетентними в математиці. Добре підходить для факультативів, в яких беруть участь більше дванадцяти осіб. Другий підхід – це той, коли групи тримаються більш-менш довгий період часу. За таких умов в старших класах можна спробувати прослідкувати, щоб групи успішно працювали над проектом не лише в межах

школи, а й у позаурочний час. Це допоможе сформувати сильну групу, яка буде засвоювати новий матеріал в рази швидше.

Можливі теми проектних робіт:

1. Тіла обертання в природі.
2. Еліпсоїд, земний еліпсоїд.
3. Характеристики конуса.
4. Додекаедрально-ікосаедральна теорія Землі.
5. Коло, що вписане у конус.
6. Перерізи конуса.
7. Тіла обертання з центром обертання, що знаходиться поза фігурою обертання. [30]

2.4 Методи розвитку навичок роботи з інформацією

Розглянувши питання розвитку короткочасної пам'яті, все ж необхідно сконцентрувати увагу безпосередньо на розвитку навичок роботи з інформацією. Як було вказано вище, це:

- сприйняття;
- обробка;
- запам'ятовування;
- відтворення.

В процесі навчання учень розвиває свої інформаційні навички. При цьому, для досягнення більш високих результатів, має сенс розвивати їх спеціально. Існує кілька основних способів для цього. Деякі з них включають самостійну роботу учня, в той час як інші – групову.

Один зі способів полягає у розвитку навичок роботи з інформацією шляхом занурення в екстремальні умови: обмеження часу або використовуваних ресурсів. Практика показує, що, намагаючись вирішити кожен геометричну задачу усно, навіть без застосування спеціальних методик, учень-одинадятикласник може значно підвищити свій рівень вже за місяць,

навчившись вирішувати усно більшість задач, включно із задачами високого рівня складності. При цьому в разі зростають навички декомпозиції складних і нестандартних задач, покращується пам'ять, загальний рівень інтелекту, в окремих випадках з'являється здатність до паралельного мислення. Досить часто, аби дещо ускладнити задачу усного рішення, рекомендують уявляти геометричну фігуру не безпосередньо перед собою, а в інших місцях, наприклад за потилицею, збоку або уявляти себе всередині моделі.

Існує спеціальна вправа для розвитку навичок роботи з інформацією, що включає в себе увесь набір дій, що проводяться з інформацією. Учням пропонується об'єднатися в пари (згодом – у групи), після чого кожному учаснику видається його індивідуальна задача, записана в текстовій формі. Завданням учня є повністю усне рішення власної задачі, усне викладення її умови партнерам по команді і так само усне пояснення рішення. В той же час інші учасники перевіряють доповідача, вказуючи на помилки в ході рішення.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

В розділі було розглянуто абстрактне, просторове мислення, короткочасна пам'ять учня з теоретичної точки зору. На основі цього було сформульовано кілька основних принципів для оптимального використання ресурсів мозку при розв'язання стереометричних задач або засвоєнні нового матеріалу. Запропоновано способи залучення учнів з нерозвинутим аналітичним мисленням до активної математичної діяльності, отримання досвіду роботи зі стереометричними фігурами і, як результат, підвищення їх загального рівня. При цьому основна увага під час проектної роботи приділяється грамотному поділу обов'язків в команді.

Проаналізовано основні навички роботи з інформацією, як: сприймання, обробка, запам'ятовування і відтворення, наведено шляхи їх розвитку, зокрема за допомогою ІКТ, а також вирішення усних задач.

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ УРОКІВ ГЕОМЕТРІЇ

З початку другого десятиріччя ХХІ ст. комп'ютери активно вводяться в навчальний процес. Разом із широким використанням комп'ютерів та інтерактивних навчальних матеріалів стає популярним використання спеціалізованого програмного забезпечення для створення розробок уроків, динамічних наочностей або навіть повномасштабних навчальних роликів.[21]

Таке програмне забезпечення дозволяє створювати наочність саме так, як вважає за потрібне вчитель для кращого розуміння учнями матеріалу. На сьогоднішній день існує багато програмних пакетів і онлайн-платформ, забезпечених таким функціоналом. Крім того, забезпечується функціонал для дистанційного навчання. Більшість пакетів мають дружній до користувача інтерфейс.

Відповідно, для вивчення стереометрії використання таких програм має дуже велике значення. Крім того, що інтерактивний виклад матеріалу покращує його розуміння і розвиває абстрактне мислення та інтуїтивно-пізнавальні навички, використання вчителем особливих методів візуалізації під час пояснення матеріалу та розбору задач значно розширює інструментарій учня, який той застосовуватиме в подальшому, розвиває його креативність.

В даному розділі розглянуто чотири програмні пакети, кожен з яких має свої особливості, свої обмеження і, відповідно, своє призначення.

3.1. Аналіз можливостей додатку «Desmos»

Desmos – це графічний калькулятор, реалізований як додаток для браузера і мобільний додаток на мові JavaScript. [2] Останні версії мають досить потужний інструментарій для розробки і проведення дистанційних занять з учнями, включаючи динамічну наочність, інструменти для перевірки знань і навичок тощо.

Основні функції включають в себе:

- графічний калькулятор;
- геометричний додаток;
- звичайний і науковий калькулятори;
- додаток для онлайн уроків.

Графічний калькулятор дозволяє створювати побудови точок, графіків функцій і тотожностей, а також нерівностей. Можна задавати фігуру таблицею значень. Підтримується також параметричне задання графіків і полярні координати. Існує інструментарій для роботи з масивами. Є можливість створення динамічної наочності за допомогою змінних параметрів і налаштування анімації. Підтримуються складні розрахунки. Містить вбудовані значення математичних констант. Існує можливість знаходити визначений інтеграл. Є інструментарій для побудови регресії. Підтримується імпорт з Excel. Інтерфейс графічного додатку зображено на рис. 3.1.

Геометричний додаток дозволяє виконувати основні планіметричні побудови і перетворення фігур. Для вивчення стереометрії його використання є досить обмеженим.

Калькулятор нічим не відрізняється від звичайного електронного калькулятора, крім того, що на екрані відображено всю історію виконаних дій з можливістю їх динамічного редагування, а також задіяно покращений механізм роботи з пам'яттю.

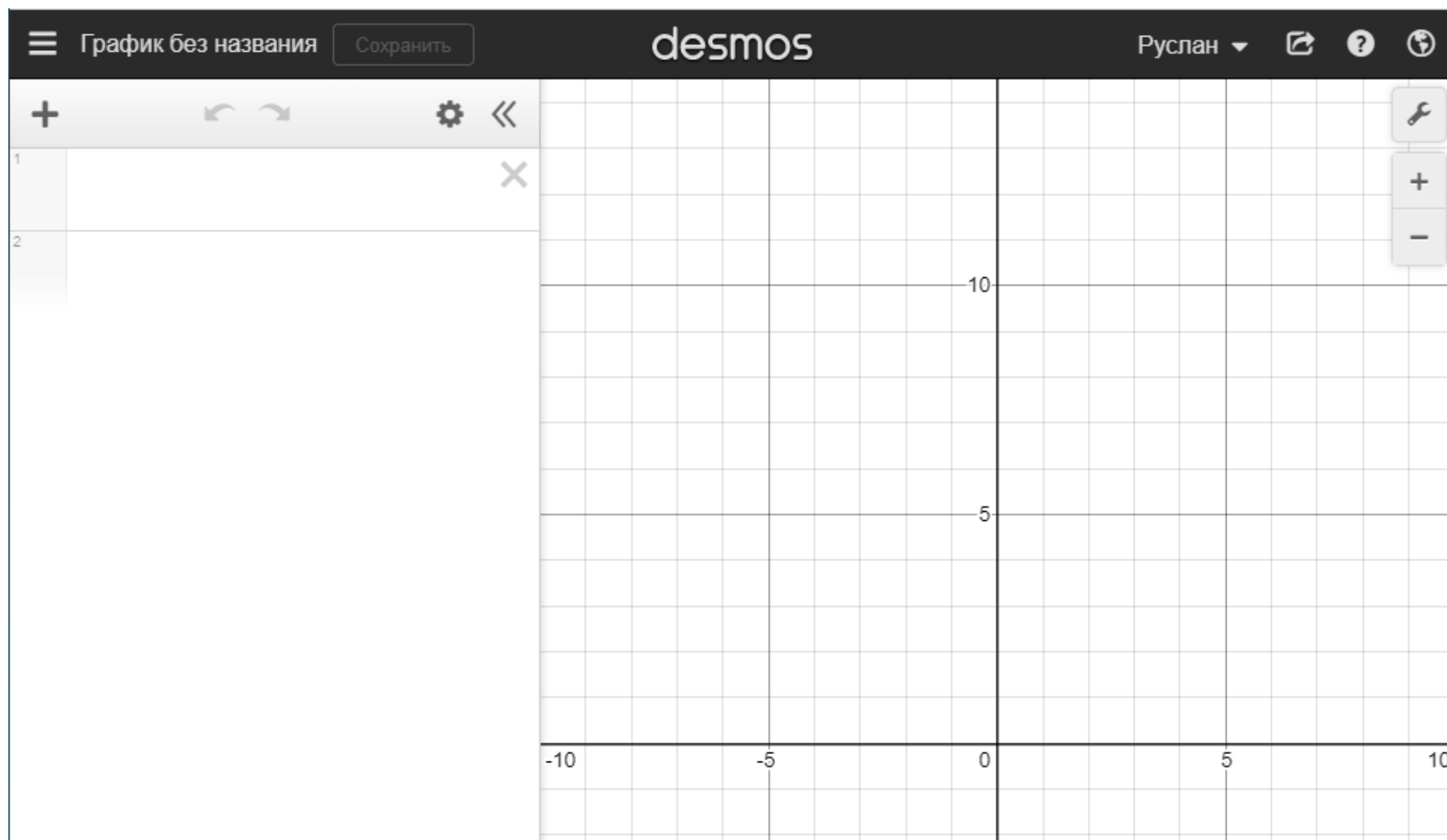


Рис. 3.1 – Інтерфейс графічного додатку Desmos

Науковий калькулятор, крім функціоналу звичайного калькулятора, підтримує зведення до степеню, знаходження модуля, роботу з тригонометричними (прямими і оберненими) функціями, розрахунок середнього арифметичного, факторіалу, основних комбінаторних функцій, округлення, експоненти, логарифмів. Містить вбудовані значення математичних констант. Підтримується робота як з градусною мірою кута, так і з радіанною. Підтримується задання значень параметрів. Приклади розрахунків, здійснених за допомогою наукового калькулятора, подано на рис. 3.2 і рис. 3.3:



Рис. 3.2 – Розрахунок об’ємів конусу і циліндру засобами наукового калькулятора

| | |
|---------------------------------|--------|
| $a = 1$ | $= 1$ |
| $b = -3$ | $= -3$ |
| $c = 2$ | $= 2$ |
| $D = b^2 - 4ac$ | $= 1$ |
| $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ | $= 2$ |
| $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ | $= 1$ |

осн. abc функ.

град

↶ ↷

стереть

🔧

| | | | | | | | | |
|----------------------|-------------------------|-------|---|---|-----|---|---|---------------|
| a^2 | a^b | $ a $ | 7 | 8 | 9 | ÷ | % | $\frac{a}{b}$ |
| $\sqrt{}$ | $\sqrt[n]{}$ | π | 4 | 5 | 6 | × | ← | → |
| sin | cos | tan | 1 | 2 | 3 | - | ✖ | |
| (|) | , | 0 | . | ans | + | ↵ | |

Рис. 3.3 – Вирішення квадратного рівняння засобами наукового калькулятора

Додаток для онлайн уроків є включає в себе вищезгадані засоби, засоби для вводу, виводу інформації та пояснення матеріалу, засоби для перевірки знань, а також потужний інструментарій для довільної організації і зв'язку між компонентами. Інтерфейс додатку зображено на рис. 3.4:

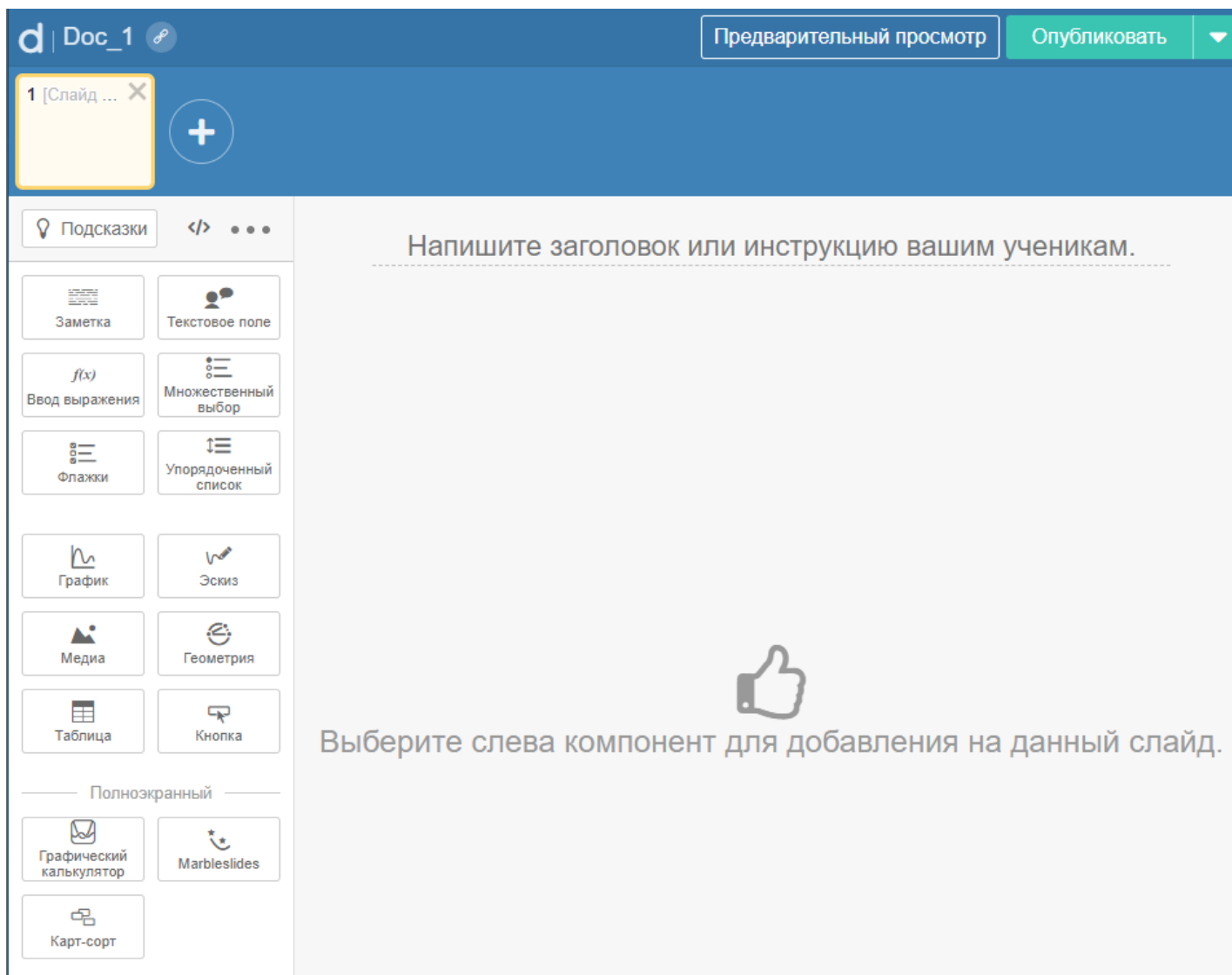


Рис. 3.4 – Интерфейс додатку для створення онлайн уроків

Урок поділено на слайди, які можна створювати або видаляти. На кожному слайді можна розміщувати компоненти. Основні компоненти:

- замітка (пояснення на слайді, що може включати в себе як текст, так і формули);
- текстове поле (поле для вводу інформації у вигляді тексту або формул);
- введення виразу (поле для введення формального виразу);
- множинний вибір (перевірка з можливістю вибору кількох правильних відповідей або увімкнення певних параметрів);
- прапорці (перемикач як засіб перевірки з вибором однієї правильної відповіді або передача одного з кількох можливих значень параметра);
- впорядкований список (перевірка виставленням варіантів в правильному порядку);
- графік;
- ескіз (ручне введення зображення);
- медіа;
- геометрія (елементи із геометричного додатку);
- таблиця (таблиця з даними, можливий імпорт з Excel);
- кнопка;
- графічний калькулятор (повноекранний графічний калькулятор на слайді);
- карт-сорт (робота з навчальними картками, на яких може міститись інформація).

Крім наведених елементів управління, існує ще один потужний інструмент, який дозволяє пов'язати їх між собою та задати для них необхідну поведінку. Це — мова програмування Computation Layer, що розроблена спеціально для даної платформи. Дана мова перебуває в процесі розвитку і подальшої розробки, проте на даний момент для неї створено повноцінну англomовну документацію з прикладами.

Мова включає в себе достатній функціонал для роботи і налаштування компонентів. [3] За допомогою даного інструментарію можливо покращити розуміння учнем пройденого матеріалу, а також розвинути його інтуїтивне розуміння. Простий приклад наведено на рис. 3.5:

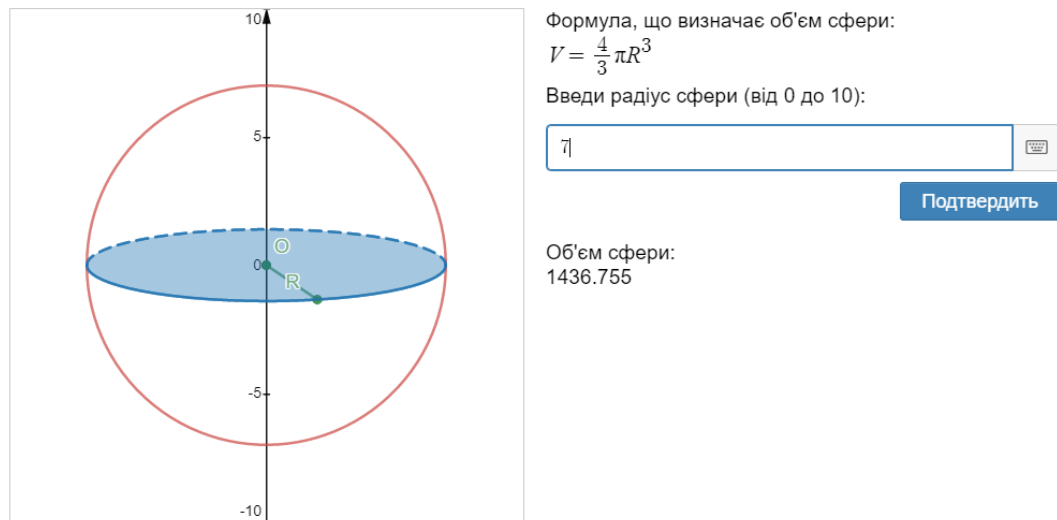


Рис. 3.5 – Ілюстрація для вивчення теми «Сфера»

При цьому, модель є динамічною, і показане обертання радіуса по екватору.

На сьогоднішній день викладачами з різних країн засобами платформи створено багато уроків з різних тем.

До основних плюсів платформи можна віднести:

- відносно низький поріг входу і простота інтерфейсу (інтерфейс подібний до пакету «GeoGebra»);
- простота введення формул;
- висока швидкість завантаження системи;
- можливість оприлюднювати роботи;
- популярність сервісу серед зарубіжних користувачів (а отже – велика кількість готових шаблонів і розробок);
- зручний інструментарій для дистанційного навчання як в режимі реального часу, так і для самостійного проходження готових уроків;

- не потребує встановлення.

Пройдемо по деяких пунктах.

Desmos має найнижчий поріг входу серед усього ПЗ, що описане в роботі. Це обумовлено кількома чинниками. По-перше, для мінімальної роботи в системі достатньо ознайомлення з посібником користувача і математичних знань. Система інтерпретує введені символи мовою Latex, з деякими обмеженнями. По-друге, інтерфейс програми зрозумілий на інтуїтивному рівні. По-третє, мова програмування Computation Layer є дуже простою і має повну документацію.

Будучи реалізованою як додаток для браузера, Desmos має дійсно високу швидкодію. Ця швидкодія обумовлює високу швидкість завантаження додатку (як звичайна веб-сторінка), а також високу динамічність, коли графік будується уже в ході введення формули.

Платформа дає можливість авторизації і оприлюднення власних наробок. Через це наразі є дуже багато уроків і робіт в Desmos, що доступні для використання, включно з тілами обертання.

Основні обмеження платформи:

- відсутність інструментарію для побудови тривимірного зображення;
- існує поріг кількості оброблених даних (проявляє себе при завеликій кількості ітерацій або при надто складних розрахунках);
- повністю розроблено лише англomовну версію інтерфейсу (використання української обмежене).

Серед наведених обмежень найсуттєвішим є відсутність інструментів для тривимірної побудови. Додаток знаходиться в постійному розвитку, і цей інструментарій може бути доданий незабаром. На даний момент якість тривимірної побудови залежить від математичних знань розробника. Крім того, за певних умов можна скористатись готовим прикладом (рис. 3.6):

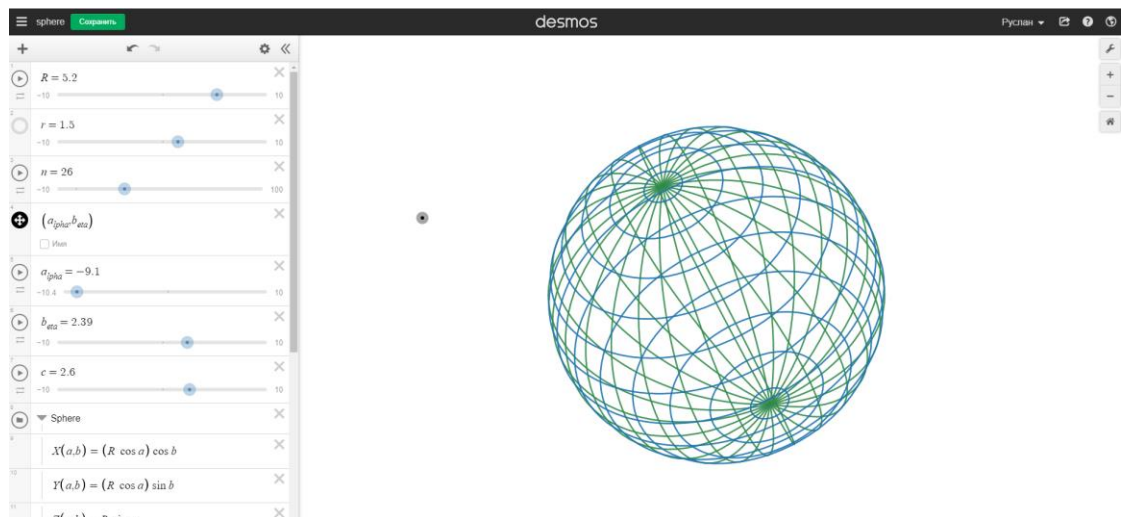


Рис. 3.6 – приклад побудови тривимірної сфери

Поріг кількості оброблених даних не є значною проблемою. Приклад, коли він проявляє себе, наведено на рис. 3.7:

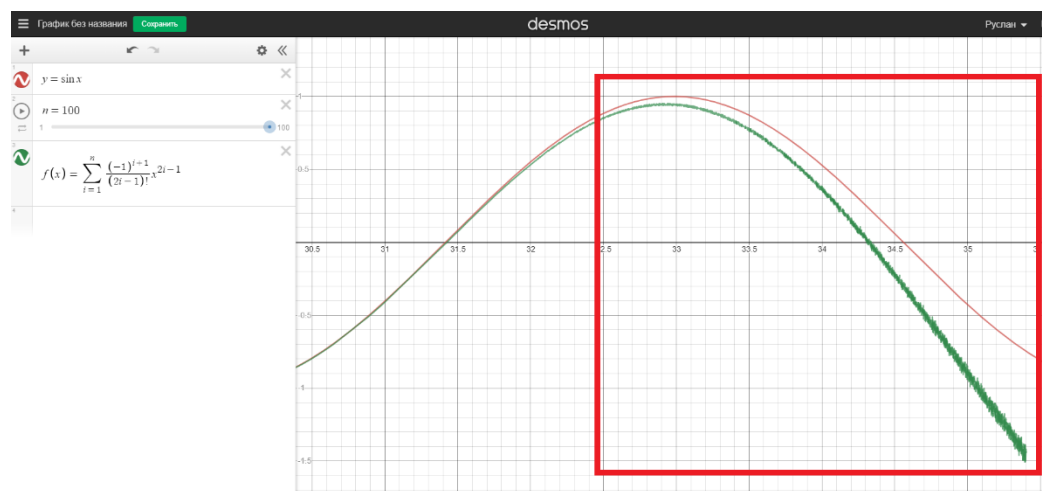


Рис. 3.7 – Спотворення при складних розрахунках

Тут показано розклад синусоїди в поліном сотого степеню. Для геометричних побудов таке спотворення не грає ролі.

Розібравши інструментарій, переваги та обмеження даного ПЗ, можна зробити по ньому висновок.

Desmos є ідеальним варіантом для початку вивчення того чи іншого розділу теми «Тіла обертання». В процесі ілюстрації деяких задач можуть виникати певні труднощі, пов'язані з побудовою тривимірного зображення.

Дане ПЗ доцільно використовувати в тому випадку, коли необхідно швидко створити просту наочність або пояснити матеріал дистанційно. Desmos постійно розвивається, а отже його недоліки поступово виправляються.

3.2 Аналіз можливостей пакету «GeoGebra» у порівнянні з «Desmos»

GeoGebra є набагато більш потужним ПЗ, ніж Desmos. Будучи менш динамічною, вона включає в себе набагато більший функціонал, включно із тривимірними побудовами (рис 3.7):

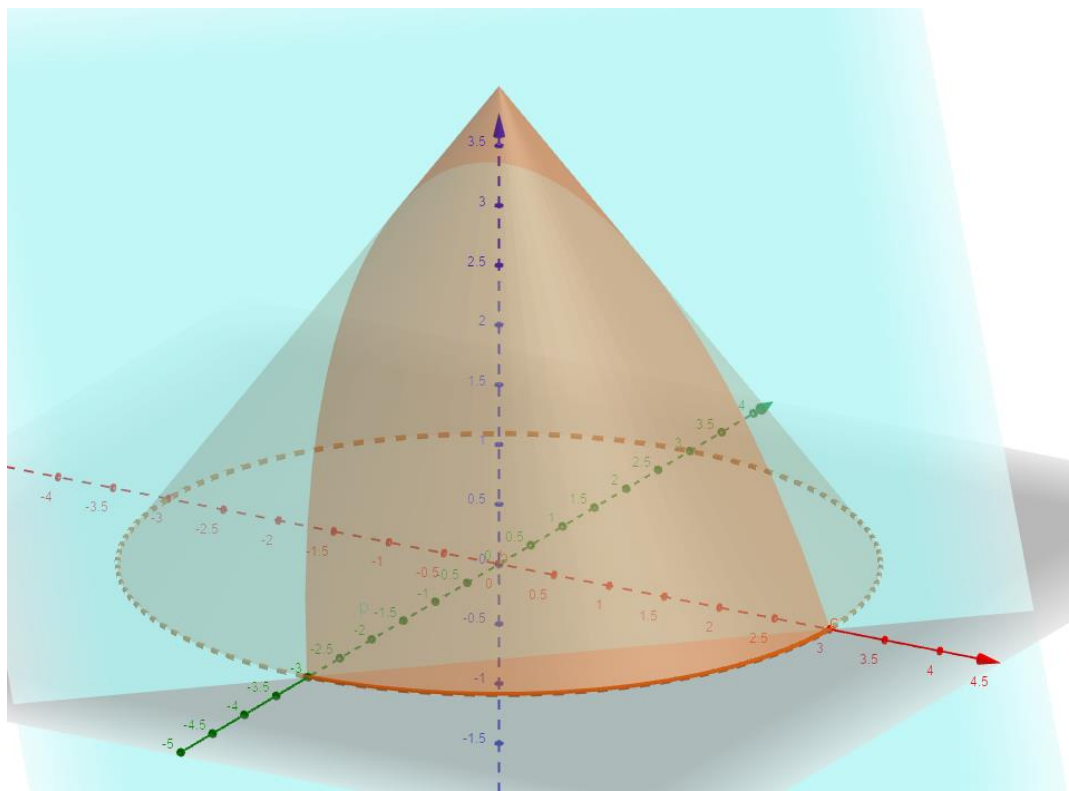


Рис. 3.7 – Приклад тривимірної побудови в GeoGebra

Пакет включає в себе наступні програми:

- графічний калькулятор;
- 3D-калькулятор;

- геометрія;
- науковий калькулятор (мобільний додаток);
- імовірність.[4]

Крім цього, є функціонал для проведення уроків.

Загалом принципи роботи GeoGebra і Desmos є дуже схожими. Попри це, через більшу функціональність, в GeoGebra дещо вищий поріг входу (альтернативою є більші втрати часу на розробку).

Великою перевагою є те, що функціонал GeoGebra перекладений російською мовою.

Крім того, GeoGebra має дуже багато вбудованих функцій для побудови геометричних об'єктів, ілюстрації математичних дій, роботи зі статистичними даними тощо. У свою чергу, це збільшує об'єми документації і ускладнює її вивчення.

Певним недоліком у порівнянні з платформою Desmos є те, що в апплеті GeoGebra (рис. 3.8) немає можливості для створення слайдів. В платформі Desmos організація уроків реалізована на більш якісному рівні.

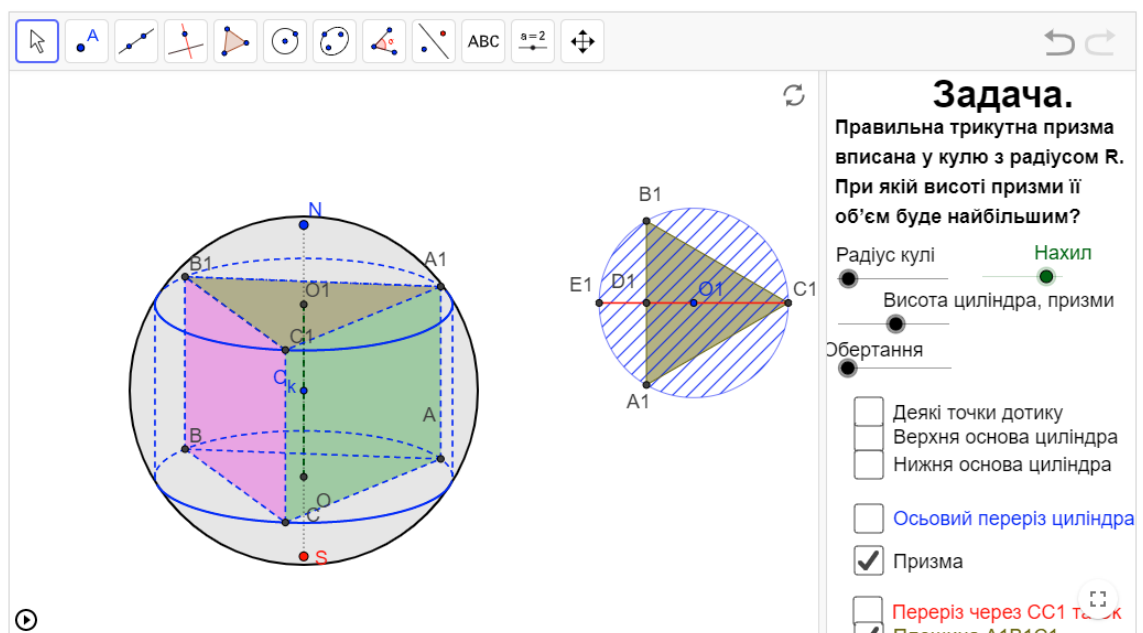


Рис. 3.8 – Приклад апплету GeoGebra

Для створення якісних апплетів в GeoGebra (як на рис. 3.8) необхідне знання GeoGebra Script та / або навички використання JavaScript в GeoGebra. При цьому документація є досить розрізною, її українсько- або російськомовної версії ще не створено. Навчальні матеріали англійською також ще не завершені.[5]

В цілому ж, Desmos, що був створений пізніше від GeoGebra, багато в чому повторює її і в процесі розвитку може її перевершити, оскільки вже має більшу динамічність і кращу продуманість стосовно деяких моментів.

Тим не менш, на даний момент використання GeoGebra є доцільнішим для вивчення теми «Тіла обертання». На сьогоднішній день GeoGebra, попри недоліки, що їх було розглянуто вище, є ідеальним варіантом для розбору складних задач зі стереометрії, пояснення матеріалу та підготовки проектів.

3.3 Огляд ПЗ «Manim» (бібліотека для мови Python)

Дана бібліотека з відкритим кодом розробляється випускником Стенфордського університету Грантом Сандерсоном (автор математичного каналу «3Blue1Brown») і призначена для створення зображень (рис. 3.9), а також анімованих відеороликів, що включають у себе математичні моделі.

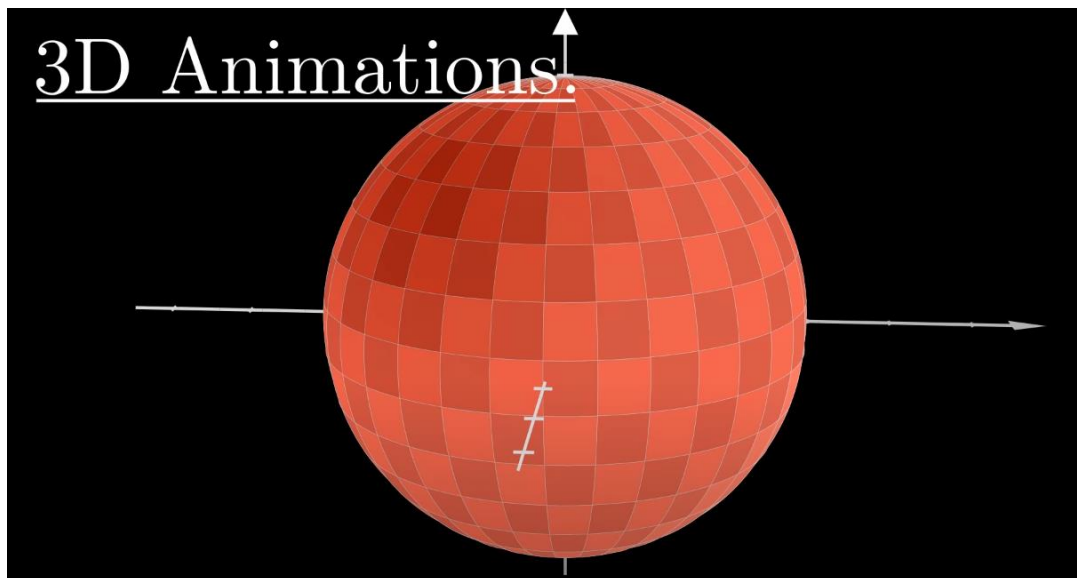


Рис. 3.9 – Зображення тривимірної поверхні, створене з допомогою Manim

Бібліотека дозволяє створювати анімовані математичні доведення, анімації математичних перетворень, двовимірні і тривимірні графіки з діями на них, анімовані тривимірні зображення, а також багато чого іншого.

Для роботи з бібліотекою має бути встановлене наступне ПЗ:

- Python;
- LaTeX;
- Cairo;
- FFmpeg;
- SoX.[6]

До переваг бібліотеки можна віднести:

- все ПЗ абсолютно безкоштовне;
- ПЗ працює на навіть на старих комп'ютерах;
- дане ПЗ працює в операційних системах Windows, GNU/Linux, Mac;
- бібліотека постійно розвивається і покращується;
- відео мають високу якість і займають мало пам'яті на ПК.

Крім того, існує кілька основних недоліків при роботі з даним ПЗ:

- всі програми у встановленому вигляді займають близько 5 Гб;
- все ще немає повної документації бібліотеки;
- Cairo необхідно встановлювати зі стороннього джерела через те, що офіційний сайт зламано хакерами;
- навчальні матеріали для роботи з бібліотекою подано англійською мовою у вигляді серії відеороликів;
- незважаючи на те, що глибокі знання мови Python не є обов'язковими для роботи з бібліотекою, для дійсно якісних відео мати їх все ж бажано.

Перераховані вище недоліки обумовлюють досить високий поріг входу. Більшість користувачів не використовують дане ПЗ в основному через те, що зіштовхнулись із проблемами на стадії встановлення.

Попри це, за умови успішного оволодіння даною технологією, учитель має можливість швидко створювати унікальні навчальні ролики, які зроблять навчання набагато ефективнішим і цікавішим.

Manim є дуже потужним засобом для створення наочностей і навчальних матеріалів з різних тем, включаючи «Тіла обертання».

3.4 Огляд «Wolfram Mathematica» як додаткової альтернативи

Wolfram Mathematica – система комп'ютерної алгебри, що широко використовується в наукових, інженерних, математичних і комп'ютерних областях.

Незважаючи на те, що створення наочності для уроків не є основним призначенням даного пакету, але в ньому є необхідний для цього інструментарій. Особливість – наявність потужного математичного апарату, що може бути розширеним в залежності від потреби.[8]

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

В розділі було розглянуто чотири програмні продукти, за допомогою яких можна значно покращити якість сприйняття учнями матеріалу на уроках геометрії. Звичайно, що таких програмних продуктів набагато більше. Дані продукти були підібрані через їх зручність, або високий рівень ефективності, або ж багатофункціональність, або комбінацію із перелічених рис.

ПЗ «Desmos» має потужний інструментарій для створення дистанційних уроків, «GeoGebra» включає в себе значний аналітичний інструментарій і надає можливість значно скоротити час на створення наочності, «Manim» надає високу свободу вираження для вчителя, але має високий поріг входу. «Wolfram Mathematica» створена для проведення наукових досліджень, добре підходить для проектної роботи, проте її використання на уроках є обмеженим.

ВИСНОВКИ

В роботі було проаналізовано методику викладання геометрії на прикладі теми «Тіла обертання». Було розглянуто деякі методичні аспекти вивчення теми «Тіла обертання», проаналізовано програму з 5 по 11 класи з точки зору вивчення теми «Тіла обертання». Виявлено основний шлях, що його «проходить» тема протягом всього навчального курсу.

Під час аналізу програми 11-го класу було порівняно програми рівня стандарту і профільного рівня і встановлено різницю між імовірними результатами навчального процесу для обох програм.

Було порівняно підходи до подання теми в різних підручниках. Виявлено спільні і відмінні риси, основні задачі кожного з досліджуваних підручників.

Під час розгляду методичних особливостей викладання теми, було встановлено, що особливої уваги заслуговують: правильне креслення малюнків, наведення міждисциплінарних зв'язків, звернення уваги на можливість узагальнення формул.

Було розглянуто абстрактне, просторове мислення, короткочасна пам'ять учня з теоретичної точки зору. Сформульовано кілька основних принципів для оптимального використання ресурсів мозку при розв'язанні стереометричних задач або засвоєнні нового матеріалу. Запропоновано способи залучення учнів з нерозвинутим аналітичним мисленням до активної математичної діяльності, отримання досвіду роботи зі стереометричними фігурами і, як результат, підвищення їх загального рівня.

Проаналізовано основні навички роботи з інформацією, як: сприймання, обробка, запам'ятовування і відтворення, наведено шляхи їх розвитку, зокрема за допомогою ІКТ, а також вирішення усних задач. Ключовим моментом є створення в учнів навичок використання динамічних образів замість звичайного аналізу побудованого рисунку. І якщо друге значною мірою

залежить від аналітичних навичок учня і завчених алгоритмів, то перше – від творчої уяви і організованості мислення, що, крім всього, є більш важливим завданням освітнього процесу в сьогоднішніх реаліях.

Також було розглянуто приклади програмного забезпечення, яке можна використовувати для уроків геометрії, з його сильними і слабкими сторонами, розглянуто переваги ІКТ перед звичайною наочністю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Conrad R. Acoustic Confusions in Immediate Memory / Conrad. // British Journal of Psychology. – 1964. – №55. – С. 75–84.
2. Desmos API v1.5 documentation [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.desmos.com/api/v1.5/docs/index.html?lang=en>.
3. Desmos Computation Layer Documentation [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://teacher.desmos.com/computation-layer/documentation?lang=en>.
4. GeoGebra Manual [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://wiki.geogebra.org/GeoGebra-en-Manual.pdf>.
5. GeoGebra Scripting Tutorial [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://wiki.geogebra.org/en/Scripting>.
6. Manim Documentation [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://docs.manim.community/en/stable/index.html>.
7. Par Jean Dieudonne. L' abstraction et l'intuition matliematique. Tire a part de «Dialectica» / Par Jean Dieudonne. // Revue internationale de philosophie de la connaissance Vol. 29. – 1975. – №1.
8. Wolfram Language Documentation [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://reference.wolfram.com/language/?source=nav>.
9. Адамар Ж. Дослідження психології процесу винаходу в області математики / Ж. Адамар. // М., «Советское радио». – 1970. – С. 79–81.
10. Архімед. Про кулю і циліндр / Архімед. – Сіракузи, 225 до н. е.
11. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч посібник. - 3-тє вид., перероб. і допов. / Г. П. Бевз. – Київ: Вища шк., 1989. – 367 с.
12. Беседін Б. Б. ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ / Б. Б. Беседін, О. В. Смоляков. // Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ. – 2017. – №7. – С. 103–109.

13. Биданов Н. Методика використання відеоматеріалів в навчальному процесі [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://sisv.com/publ/1/metodika/14-1-0-557>.
14. Бікбаєва А. В. Проблеми, що виникають в учнів при вивченні стереометрії [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.scienceforum.ru/2015/1029/9548>.
15. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник / В.Н.Боровик, В. П. Яковець. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
16. ВЕЛИКА УКРАЇНСЬКА ЕНЦИКЛОПЕДІЯ [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://vue.gov.ua/Аналіз_i_синтез.
17. Винославська О. В. Психологія. Навчальний посібник / О.В.Винославська. – Київ: ІНК ОС, 2005.
18. Геометрія: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П.Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В.М.Владіміров. – Київ: Генеза, 2011. – 336 с.
19. Геометрія: проф. рівень: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г.Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С.Якір. – Харків: Гімназія, 2019. – 204 с.
20. Комп'ютерні технології в освіті : навч. посібн. / Ю. С.Жарких, С. В. Лисоченко, Б. Б. Сусь, О. В. Третьак. – Київ: Видавничополіграфічний центр "Київський університет", 2011. – 239 с.
21. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером / Т.Г.Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 271 с.
22. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – Москва: Просвещение, 1968. – 432 с.
23. Лозниця В. С. Психологія і педагогіка: основні положення. Навчальний посібник для самостійного вивчення дисципліни / В. С. Лозниця. – Київ: ЕскОб, 2000. – 304 с.

24. Мерзляк А. Г. Алгебра та початки аналізу. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б.Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 431 с.
25. НАВЧАЛЬНІ ПРОГРАМИ 10-11 КЛАСІВ [Електронний ресурс]. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>.
26. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків: Ранок, 2019. – 208 с.
27. Резнікова Ж. І. Мова мурах до відкриття доведе / Ж. І. Резнікова. // Наука з перших рук. – 2008. – №4. – С. 68–75.
28. Резнікова Ж. І. Теоретико-інформаційний аналіз «мови» мурашок / Ж. І. Резнікова, Б. Я. Рябко. // Журн. заг. біології, Т. 51. – 1990. – №5. – С.601–609.
29. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. - 2-е видання, доповн. і переробл. / З. І. Слєпкань. – Київ: Вища шк., 2006. – 582 с.
30. Теоремы Гульдина. Центры тяжести плоских фигур и их моменты относительно осей [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/p2/m2806.html>.
31. Четвертухін Н. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії / Н. Ф. Четвертухін. – Київ, 1953. – 188 с.
32. Шатохина А. А. Развитие математической интуиции учащихся / А. А. Шатохина. // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – Т. 39. – С. 2021–2025.
33. Шинкарук В. І. Філософський словник / В. І. Шинкарук. – Київ: АН УРСР, 1986. – 800 с.