Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Жучок Ю.В. Класифікація двоелементних допельнапівгруп. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 3(25). Частина 2. С. 38-42.

Zhuchok Yu.V. A classification of two-element doppelsemigroups. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 3(25). Part 2. P. 38-42.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-025-3-023
УДК 378, 512.53

Юрій В. Жучок
ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», Україна
zhuchok.yu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8794-9205

КЛАСИФІКАЦІЯ ДВОЕЛЕМЕНТНИХ ДОПЕЛЬНАПІВГРУП

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Задача класифікації математичних структур (об’єктів) за деякою властивістю або ознакою є однією з класичних проблем у математиці. Класифікацію структур здійснюють зазвичай з урахуванням деяких спеціальних властивостей заданих структур. Вказати в точності клас з певною ознакою, до якого відноситься досліджуваний об’єкт, і означає – класифікувати даний об’єкт. Ідея, що покладена в основу задачі класифікації, якнайкраще розкривається на прикладі конкретних математичних об’єктів, у даному випадку алгебраїчних систем з двома операціями – так званих допельнапівгруп, які є природнім узагальненням відомого поняття напівгрупи.*

Методи. *Для проведення даного дослідження було застосовано в комплексі наступні методи: аналіз наукової літератури, систематизація та узагальнення різних поглядів при вивченні напівгруп та допельнапівгруп, а також загально алгебраїчні методи із використанням основних методів теорії напівгруп.*

Результати. *Напівгрупою називається непорожня множина із заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Під допельнапівгрупою, яка розширює поняття напівгрупи, розуміють непорожню множину D з двома бінарними асоціативними операціями $\prec$ та $\succ$, для яких виконуються такі дві умови: (D₁)* $(x \prec y) \succ z = x \prec (y \succ z)$, *(D₂)* $(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z)$ *для всіх* $x, y, z \in D$. *Найпростішими нетривіальними об’єктами дослідження у класі допельнапівгруп є структури, що складаються з двох елементів, тому увагу акцентовано на задачі класифікації саме двоелементних допельнапівгруп. У якості властивості, за якою здійснюється класифікація допельнапівгруп, обрано абстрактну властивість ізоморфності. Показано, що існує всього сім попарно неізоморфних двоелементних допельнапівгруп.*

Висновки. *Розкрито сутність задачі класифікації на прикладі двоелементних допельнапівгруп. Відкритими в цьому напрямі досліджень залишаються задачі класифікації допельнапівгруп вищих порядків з точністю до ізоморфізму.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *класифікація, напівгрупа, ізоморфізм, допельнапівгрупа, двоелементна допельнапівгрупа.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Задача класифікації структур (математичних об’єктів) за деякою властивістю або ознакою є однією з класичних проблем у математиці. Ця задача полягає у наступному: розглядається множина об’єктів, поділених певним чином на класи, при цьому для одних об’єктів відомо до яких класів вони відносяться, а для інших об’єктів – ні, тобто невідомо яким саме класам вони належать. Необхідно побудувати такий алгоритм, який буде здатний класифікувати довільний об’єкт з вихідної множини. Класифікувати об’єкт – означає, вказати точно клас, до якого відноситься даний об’єкт. Наприклад, “сюжетні задачі”, які розглядаються при навчанні математиці у початкових класах загальноосвітніх шкіл, класифікуються на дві основні групи: прості та складені. Простою називають сюжетну задачу, для розв’язування якої необхідно виконати одну арифметичну дію. Подальша класифікація простих задач на групи зумовлена характером випадків застосування арифметичних дій: задачі на конкретний зміст арифметичних дій; задачі на зв’язки між компонентами і результатами арифметичних дій; задачі, що пов’язані з поняттям різницевого чи кратного відношення двох чисел; окремі види задач. Задачу називають складеною, якщо для її розв’язування треба виконати дві і більше взаємопов’язаних арифметичних дій. Арифметичні дії на числових множинах призводять до більш широких понять абстрактної алгебри – операції та алгебраїчної системи – множини з набором будь-яких операцій. Саме дослідженню задачі класифікації алгебраїчних систем на прикладі конкретного класу алгебр з двома операціями і присвячено цю роботу.

Однією з областей сучасної алгебри, яка активно розвивається, є теорія напівгруп. Вона має тісні зв'язки з багатьма математичними дисциплінами: диференціальною геометрією, функціональним аналізом, теорією графів, теорією алгоритмів, абстрактною теорією автоматів, а також застосовується в таких галузях як біологія, соціологія, математична лінгвістика та ін. Базові поняття теорії напівгруп досить елементарні й цілком доступні навіть школярам старших класів. Більше того, з напівгрупою зустрічається, не підозрюючи цього, вже першокласник, і потім напівгрупи супроводжують учнів протягом усіх років навчання в школі. Природним узагальненням напівгрупи є поняття допельнапівгрупи, яке з'явилося в 1997 році в роботі сучасного німецького математика Б. Ріхтер (Richter, 1997) при описі нового типу алгебраїчних систем – допельалгебр. Термін «допельнапівгрупа» було запропоновано в роботі (Zhuchok, 2017). Зараз теорія допельнапівгруп також починає швидко розвиватися. Як і в багатьох інших математичних теоріях, однією з основних задач теорії допельнапівгруп є задача класифікації, що свідчить про актуальність обраної тематики. Відмітимо, що найпростіший випадок для напівгруп – класифікація напівгруп другого порядку (тобто двоелементних напівгруп) – був представлений в (Шеврин, 1997). Класифікація допельнапівгруп третього порядку була наведена в (Гаврилків&Рендзяк, 2019).

Мета статті – розкрити сутність задачі класифікації математичних структур на прикладі двоелементних допельнапівгруп.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для проведення даного дослідження було застосовано в комплексі наступні методи: аналіз наукової літератури, систематизація та узагальнення різних поглядів при вивченні напівгруп та допельнапівгруп, а також загальноалгебраїчні методи із використанням основних методів теорії напівгруп.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

1. Поняття напівгрупи. Невизначені поняття, що зустрічаються в цій роботі, можна знайти, наприклад, в (Кліффорд&Престон, 1972; Ляпін, 1960; Шеврін, 1991).

Бінарною операцією (Шеврин, 1997) на множині S називається будь-яке відображення множини всіх упорядкованих пар (x, y) елементів x, y з S у множину S. Іншими словами, існує правило, згідно з яким будь-якій парі (x, y) елементів з S зіставляють однозначно визначений елемент з S – результат застосування даної операції до x та y.

Далі будемо позначати бінарні операції символами $\circ$, $*$, $\prec$, $\succ$ або $\circ_1$, $\circ_2$ тощо. Операції представлятимемо для зручності у вигляді таблиць. Такі таблиці називають таблицями Келі (Кліффорд&Престон, 1972).

Бінарна операція $\circ$, визначена на множині S, називається *асоціативною*, якщо для будь-яких $x, y, z \in S$ виконується умова:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

Напівгрупою називається непорожня множина із заданою на ній бінарною асоціативною операцією.

Що означає навести приклад напівгрупи? По-перше, це означає вказати множину, по-друге, задати на цій множині бінарну операцію та, по-третє, переконатися, що задана операція асоціативна.

<u>Приклад 1.1.</u> Адитивна напівгрупа натуральних чисел $(N, +)$.

Це і є напівгрупа, з якою зустрічається кожен, хто починає вивчати математику в початковій школі, і з якою люди, можна сказати, не розлучаються все життя.

<u>Приклад 1.2.</u> Мультиплікативна напівгрупа натуральних чисел $(N, \cdot)$.

Це, безперечно, друга серед напівгруп, з якою ознайомлюються всі, хто вивчає математику.

<u>Приклад 1.3.</u> Наведемо відразу шість числових напівгруп. Нагадаємо, що через Z позначається множина всіх цілих чисел, через Q – множина всіх раціональних чисел, а через R – множина всіх дійсних чисел. Кожна з множин Z, Q, R є як адитивною (за додаванням), так і мультиплікативною (за множенням) напівгрупою. У середніх і старших класах школи це постійні супутники тих, хто вивчає математику.

2. Напівгрупи другого порядку. У цьому пункті наводиться опис усіх двоелементних напівгруп (більш детальніше див. (Шеврін, 1997).

Напівгрупи $(S, \circ)$ і $(T, *)$ називаються *ізоморфними* (Кліффорд&Престон, 1972), якщо існує взаємно однозначне відображення $\phi : S \to T$ таке, що для всіх $x, y \in S$ виконується умова: $\phi(x \circ y) = \phi(x) * \phi(y)$. При цьому відображення ϕ називається *ізоморфізмом*. Взаємно однозначне відображення має обернене до нього відображення, і якщо ϕ є ізоморфізмом S на T, то обернене відображення ϕ^{-1} буде ізоморфізмом T на S.

<u>Приклад 2.1.</u> Адитивна напівгрупа натуральних чисел $(N, +)$ ізоморфна адитивній напівгрупі парних натуральних чисел $(2N, +)$. Ізоморфізм між цими напівгрупами встановлюється за таким правилом: кожному натуральному числу n зіставляється подвійне парне число $2n$.

<u>Приклад 2.2.</u> Мультиплікативна напівгрупа натуральних чисел $(N, \cdot)$ та мультиплікативна напівгрупа парних натуральних чисел $(2N, \cdot)$ не є ізоморфними (у першій напівгрупі є одиниця, а в другій – ні).

Поняття ізоморфізму є одним з найважливіших у математиці. За допомогою цього поняття можна визначати наскільки "схожими", "однаковими" з точки зору абстрактних властивостей (тобто таких властивостей, які визначаються не природою елементів цих структур, а взаємодією елементів, яка описується на мові алгебраїчних операцій) є дві досліджувані математичні структури. У математиці багато різних структур класифікуються, як говорять, з точністю до ізоморфізму, тобто ізоморфні структури вважаються однаковими. Проілюструємо далі таку класифікацію на прикладі двоелементних напівгруп.

Нехай $S=\{a,b\}$ – довільна двоелементна множина. Зрозуміло, що на двоелементній множині можна задати бінарну операцію 16-ма різними способами. Згідно з (Шеврін, 1997) всього існує п'ять попарно неізоморфних напівгруп другого порядку, а саме: це напівгрупи $(S,\circ_1)$, $(S,\circ_2)$, $(S,\circ_3)$, $(S,\circ_4)$, $(S,\circ_5)$, операції на яких визначаються такими таблицями Келі (таблиці 1-5 відповідно).

Таблиця 1

Напівгрупа $(S,\circ_1)$

$\circ_1$	a	b
a	b	a
b	a	b

Таблиця 2

Напівгрупа $(S,\circ_2)$

$\circ_2$	a	b
a	a	a
b	a	a

Таблиця 3

Напівгрупа $(S,\circ_3)$

$\circ_3$	a	b
a	a	b
b	a	b

Таблиця 4

Напівгрупа $(S,\circ_4)$

$\circ_4$	a	b
a	a	a
b	b	b

Таблиця 5

Напівгрупа $(S,\circ_5)$

$\circ_5$	a	b
a	a	a
b	a	b

3. Класифікація допельнапівгруп другого порядку. Нагадаємо, що структура допельнапівгрупи з'явилася лише в кінці минулого століття в роботі сучасного математика Б. Ріхтер (Richter, 1997). У цьому пункті з точністю до ізоморфізму класифікуються всі допельнапівгрупи, що складаються лише з двох елементів.

Наведемо визначення поняття допельнапівгрупи (Zhuchok, 2017). Непорожня множина D з двома бінарними асоціативними операціями $\prec$ та $\succ$ називається *допельнапівгрупою*, якщо виконуються такі дві умови:

$$(D_1)\quad (x\prec y)\succ z = x\prec(y\succ z),$$

$$(D_2)\quad (x\succ y)\prec z = x\succ(y\prec z)$$

для всіх $x,y,z\in D$.

Далі необхідно перевірити всі аксіоми допельнапівгрупи для кожної з алгебраїчних систем $(S,\circ_i,\circ_j)$, де $S=\{a,b\}$ та $\circ_i,\circ_j$, де $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$ – операції, визначені в п. 2.

Зрозуміло, що всього існує 25 випадків. Неважко поміти, що кожна алгебраїчна система $(S,\circ_i,\circ_i)$ є допельнапівгрупою при будь-якому $i\in\{1,2,...,5\}$. Цей факт випливає з асоціативності операцій $\circ_i$, де $1\le i\le 5$. Отже, отримано 5 допельнапівгруп з однаковими операціями, при цьому, як безпосередньо випливає з (Шеврин, 1997), вони є попарно неізоморфними. Позначимо ці допельнапівгрупи таким чином: $D_i=(S,\circ_i,\circ_i),\ 1\le i\le 5$.

Доведемо тепер, що алгебраїчна система $D_6 = (S, \circ_2, \circ_5)$ є допельнапівгрупою. Для цього покажемо виконання допельнапівгрупових аксіом (D_1) та (D_2) (операції $\circ_2, \circ_5$ є асоціативними згідно з п. 2). Візьмемо довільні $x, y, z \in S$ та розглянемо такі випадки:

1) $x = y = z = a$, тоді
$$(a \circ_2 a) \circ_5 a = a \circ_5 a = a, \quad a \circ_2 (a \circ_5 a) = a \circ_2 a = a;$$
2) $x = y = z = b$, тоді
$$(b \circ_2 b) \circ_5 b = a \circ_5 b = a, \quad b \circ_2 (b \circ_5 b) = b \circ_2 b = a;$$
3) $x = y = a, z = b$, тоді
$$(a \circ_2 a) \circ_5 b = a \circ_5 b = a, \quad a \circ_2 (a \circ_5 b) = a \circ_2 a = a;$$
4) $x = z = a, y = b$, тоді
$$(a \circ_2 b) \circ_5 a = a \circ_5 a = a, \quad a \circ_2 (b \circ_5 a) = a \circ_2 a = a;$$
5) $x = b, y = z = a$, тоді
$$(b \circ_2 a) \circ_5 a = a \circ_5 a = a, \quad b \circ_2 (a \circ_5 a) = b \circ_2 a = a;$$
6) $x = y = b, z = a$, тоді
$$(b \circ_2 b) \circ_5 a = a \circ_5 a = a, \quad b \circ_2 (b \circ_5 a) = b \circ_2 a = a;$$
7) $x = z = b, y = a$, тоді
$$(b \circ_2 a) \circ_5 b = a \circ_5 b = a, \quad b \circ_2 (a \circ_5 b) = b \circ_2 a = a;$$
8) $x = a, y = z = b$, тоді
$$(a \circ_2 b) \circ_5 b = a \circ_5 b = a, \quad a \circ_2 (b \circ_5 b) = a \circ_2 b = a,$$
отже, тотожність (D_1) доведена. Подібним чином розглядаються інші випадки:

9) $x = y = z = a$, тоді
$$(a \circ_5 a) \circ_2 a = a \circ_2 a = a, \quad a \circ_5 (a \circ_2 a) = a \circ_5 a = a;$$
10) $x = y = z = b$, тоді
$$(b \circ_5 b) \circ_2 b = b \circ_2 b = a, \quad b \circ_5 (b \circ_2 b) = b \circ_5 a = a;$$
11) $x = y = a, z = b$, тоді
$$(a \circ_5 a) \circ_2 b = a \circ_2 b = a, \quad a \circ_5 (a \circ_2 b) = a \circ_5 a = a;$$
12) $x = z = a, y = b$, тоді
$$(a \circ_5 b) \circ_2 a = a \circ_2 a = a, \quad a \circ_5 (b \circ_2 a) = a \circ_5 a = a;$$
13) $x = b, y = z = a$, тоді
$$(b \circ_5 a) \circ_2 a = a \circ_2 a = a, \quad b \circ_5 (a \circ_2 a) = b \circ_5 a = a;$$
14) $x = y = b, z = a$, тоді
$$(b \circ_5 b) \circ_2 a = b \circ_2 a = a, \quad b \circ_5 (b \circ_2 a) = b \circ_5 a = a;$$
15) $x = z = b, y = a$, тоді
$$(b \circ_5 a) \circ_2 b = a \circ_2 b = a, \quad b \circ_5 (a \circ_2 b) = b \circ_5 a = a;$$
16) $x = a, y = z = b$, тоді
$$(a \circ_5 b) \circ_2 b = a \circ_2 b = a, \quad a \circ_5 (b \circ_2 b) = a \circ_5 a = a.$$

З випадків 1)–16) та асоціативності операцій $\circ_2$ та $\circ_5$ випливає, що алгебраїчна система $D_6 = (S, \circ_2, \circ_5)$ є допельнапівгрупою. Зрозуміло, що алгебра $D_7 = (S, \circ_5, \circ_2)$ також є допельнапівгрупою. Слід відмітити, що з властивостей операцій $\circ_j$, де $1 \le j \le 5$, випливає, що допельнапівгрупи D_i, $1 \le i \le 7$, є попарно неізоморфними.

Виявляється, що в усіх випадках, які залишилось розглянути (а їх наразі 18), не знайдуться нові допельнапівгрупи, тобто не існує інших двоелементних допельнапівгруп, відмінних від допельнапівгруп $D_1 - D_7$. Покажемо, що це дійсно так.

1–2). Алгебраїчні системи $(S, \circ_1, \circ_2)$ та $(S, \circ_2, \circ_1)$ не є допельнапівгрупами, оскільки
$$(a \circ_1 a) \circ_2 b = b \circ_2 b = a, \text{ але } a \circ_1 (a \circ_2 b) = a \circ_1 a = b.$$
3–4). Алгебраїчні системи $(S, \circ_1, \circ_3)$ та $(S, \circ_3, \circ_1)$ не є допельнапівгрупами, оскільки
$$(a \circ_1 a) \circ_3 a = b \circ_3 a = a, \text{ але } a \circ_1 (a \circ_3 a) = a \circ_1 a = b.$$
5–6). Алгебраїчні системи $(S, \circ_1, \circ_4)$ та $(S, \circ_4, \circ_1)$ не є допельнапівгрупами, оскільки
$$(a \circ_4 a) \circ_1 a = a \circ_1 a = b, \text{ але } a \circ_4 (a \circ_1 a) = a \circ_4 b = a.$$
7–8). Алгебраїчні системи $(S, \circ_1, \circ_5)$ та $(S, \circ_5, \circ_1)$ не є допельнапівгрупами, оскільки
$$(a \circ_5 a) \circ_1 a = a \circ_1 a = b, \text{ але } a \circ_5 (a \circ_1 a) = a \circ_5 b = a.$$

9–10). Алгебраїчні системи $(S, \circ_2, \circ_3)$ та $(S, \circ_3, \circ_2)$ не є допельнапівгрупами, оскільки

$$(b \circ_2 b) \circ_3 b = a \circ_3 b = b \text{, але } b \circ_2 (b \circ_3 b) = b \circ_2 b = a.$$

11–12). Алгебраїчні системи $(S, \circ_2, \circ_4)$ та $(S, \circ_4, \circ_2)$ не є допельнапівгрупами, оскільки

$$(b \circ_4 a) \circ_2 b = b \circ_2 b = a \text{, але } b \circ_4 (a \circ_2 b) = b \circ_4 a = b.$$

13–14). Алгебраїчні системи $(S, \circ_3, \circ_4)$ та $(S, \circ_4, \circ_3)$ не є допельнапівгрупами, оскільки

$$(a \circ_4 a) \circ_3 b = a \circ_3 b = b \text{, але } a \circ_4 (a \circ_3 b) = a \circ_4 b = a.$$

15–16). Алгебраїчні системи $(S, \circ_3, \circ_5)$ та $(S, \circ_5, \circ_3)$ не є допельнапівгрупами, оскільки

$$(a \circ_5 a) \circ_3 b = a \circ_3 b = b \text{, але } a \circ_5 (a \circ_3 b) = a \circ_5 b = a.$$

17–18). Алгебраїчні системи $(S, \circ_4, \circ_5)$ та $(S, \circ_5, \circ_4)$ не є допельнапівгрупами, оскільки

$$(b \circ_4 b) \circ_5 a = b \circ_5 a = a \text{, але } b \circ_4 (b \circ_5 a) = b \circ_4 a = b.$$

Отже, вичерпну класифікацію всіх допельнапівгруп другого порядку дає наступне твердження:

Будь-яка двоелементна допельнапівгрупа є ізоморфною одній з отриманих вище допельнапівгруп D_1–D_7.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. У роботі класифіковано всі двоелементні допельнапівгрупи за їх абстрактними властивостями. Встановлено, що з точністю до ізоморфізму існує всього сім різних допельнапівгруп другого порядку. Природними в цьому напрямі є задачі класифікації з точністю до ізоморфізму допельнапівгруп вищих порядків.

Список використаних джерел

1. Richter B. Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie. *Diplomarbeit, Universitat Bonn*. 1997. Retrieved from: https://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/dipl.ps
2. Zhuchok A. V. Free products of doppelsemigroups. *Algebra Universalis*. 2017. №77. P. 361–374.
3. Шеврин Л. Н. Что такое полугруппа. *Соровский образовательный журнал*. 1997. №4. С. 99–104.
4. Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп*. М: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
5. Ляпин Е. С. *Полугруппы*. М.: Физматгиз, 1960. 592 с.
6. Шеврин Л. Н. *Полугруппы / Общая алгебра*. Под ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2. С. 11–191.
7. Gavrylkiv V., Rendziak D. Interassociativity and three-element doppelsemigroups. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2019. №28 (2). P. 224–247.

References

1. Richter, B. (1997). Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie. *Diplomarbeit*, Universitat Bonn. *Thesis*. Bonn: University Bonn. Retrieved from: https://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/dipl.ps [in German].
2. Zhuchok, A. V. (2017). Free products of doppelsemigroups. *Algebra Universalis*, 77, 361-374.
3. Shevrin, L. N. (1997). Chto takoe polugruppa [What a semigroup is]. *Sorovskij obrazovatel'nyj zhurnal – Sorovsky Educational Journal*, 4, 99–104 [in Russian].
4. Klifford, A.&Preston, G. (1972). *Algebraicheskaya teoriya polugrupp* [*Algebraic theory of semigroups*]. Moskva: Mir, T. 1 [in Russian].
5. Lyapin, E. S. (1960). *Polugruppy* [*Semigroups*]. Moskva: Fizmatgiz [in Russian].
6. Shevrin, L. N. (1997). *Polugruppy* [*Semigroups*]. In L. A. Skornjakov (Ed.), *Obshchaya algebra* [*General algebra*] (T. 2, pp. 11–191). Moskva: Nauka [in Russian].
7. Gavrylkiv, V.&Rendziak, D. (2019). Interassociativity and three-element doppelsemigroups. *Algebra and Discrete Mathematics*, 28 (2), 224–247.

A CLASSIFICATION OF TWO-ELEMENT DOPPELSEMIGROUPS

Yu.V. Zhuchok

Luhansk Taras Shevchenko National University, Ukraine

Abstract.

Problem formulation. *The problem of mathematical structures (objects) classifying by some property or feature is one of the classic problems in mathematics. Classification of mathematical structures is usually carried out taking into account some special properties of given structures. Specify the class with a specific feature to which the object belongs, means to classify this object. The idea of the classification problem is best revealed by the example of specific mathematical objects, in this case algebraic systems with two operations – the so-called doppelsemigroups, which are a natural generalization of the known concept of a semigroup.*

Methods. *The following methods were used to conduct this study: analysis of the scientific literature, systematization and generalization of different views in the study of semigroups and doppelsemigroups, as well as general algebraic methods using the basic methods of semigroup theory.*

Results. *A semigroup is a nonempty set with a given binary associative operation. Summarizing this concept, we obtain the concept of a doppelsemigroup. A doppelsemigroup is a nonempty set D with two binary associative operations $\prec$ and $\succ$, if the following two conditions are satisfied: (D1) $(x \prec y) \succ z = x \prec (y \succ z)$, (D2) $(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z)$ for all $x, y, z \in D$. The simplest non-trivial objects of study in the class of doppelsemigroups are structures consisting of two elements, so the focus is on the problem of classification of two-element doppelsemigroups. The abstract property of an isomorphism is chosen as the property by which the doppelsemigroups are classified. It is shown that there are only seven pairwise non-isomorphic two-element doppelsemigroups.*

Conclusions. *The essence of the classification problem on the example of two-element doppelsemigroups is revealed. The problems of classification of doppelsemigroups of higher orders up to an isomorphism remain open in this direction of research.*

Key words: *classification, semigroup, isomorphism, doppelsemigroup, two-element doppelsemigroup.*