

implement the ideas of interactive learning. The focus is on active, independent, creative student learning activities. Therefore, this content and the organization of laboratory classes in the teaching of physics will help to find new, more effective ways of training future physics teachers.

Key words: educational process, educational activity, independent work of students, methods of teaching physics, laboratory work, individual work, teamwork, future physics teacher.

УДК 519.67

DOI 10.5281/zenodo.3547765

З. О. Лубенець

О. В. Мартиненко

ORCID ID 0000-0002-8287-0573

Сумський державний педагогічний
університет імені А.С.Макаренка

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У статті розглянуто застосування методу стискаючих відображень та методу послідовних наближень на прикладі фрактального стиску зображень, вказано загальний алгоритм фрактального кодування зображень і його переваги та обґрунтовано важливість вивчення даного питання студентами закладів вищої освіти, зокрема студентами фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

У обчислювальній математиці виникає багато задач, що можна звести до відшукування нерухомої точки відображення. Для цього використовують метод послідовних наближень (метод ітерацій), в основу якого покладено принцип стискаючих відображень. Цей принцип застосовують до доведення теорем про існування та єдиність розв'язків деяких типів диференціальних і інтегральних рівнянь; він також дозволяє розв'язувати наукові проблеми в алгебрі, геометрії, фізиці, медицині, інформатиці, у теорії фракталів тощо.

Серед переваг фрактального методу стиснення зображення можна виділити такі: він здатний забезпечити найкраще співвідношення ступеня стиснення та якості відновленого зображення; має короткий час розпакування; надає можливість відновлювати лише частину зображення і будь-якого розміру; має широкі можливості у виборі параметрів стиску.

На сучасному етапі стиск даних є важливим як для швидкості передачі, так і ефективності зберігання. Він застосовується у медицині для реконструкції зображень у комп'ютерній томографії, до того ж крім багатьох видів комерційного використання, технології стиску є важливими й для військових потреб. Отже, метод стискаючих відображень має досить широке коло використання та відіграє велику роль у нашому житті. Одним із прикладів його застосування є фрактальне кодування зображень.

Знання даного методу дозволить спеціалістам з фізико-математичних спеціальностей застосовувати його при розв'язуванні прикладних задач, а майбутні вчителі зможуть пояснити учням математичний апарат на якому побудовані сучасні технології в багатьох галузях життя.

Ключові слова: метод стискаючих відображень, метод ітерацій, фрактальний стиск зображень, нерухома точка, математика, алгоритм фрактального кодування, фізико-математичний факультет, студенти закладів вищої освіти.

Постановка проблеми. Математика є одним із найважливіших досягнень цивілізації, адже вона надає методи для пізнання світу, для вивчення його закономірностей. Саме тому останнім часом досить поширеними є такі словосполучення як «математична економіка», «математична біологія», «математична лінгвістика» тощо [6, с. 5]. Зауважимо, що математичні методи завжди відігравали важливу роль в природознавстві. Прикладами можуть слугувати видатні теоретичні відкриття, зроблені спочатку математично і лише

потім підтверджені експериментально. Це – планета Нептун (1846 р.), виявлена астрономом Йоганном Галле, електромагнітні хвилі (1868 р.), відкриті шотландським фізиком Джеймсом Максвеллом чи позитрон (1928 р.), описаний британським фізиком Полем Діраком.

Математична наука постійно розвивається, в ній з'являються нові методи та напрями. Розвиток інформаційних технологій зумовив появу нових можливостей використання математичних методів не лише в фізиці та механіці, але й у тих областях, де вони майже не застосовувались, наприклад, у медицині, економіці, лінгвістиці, соціології тощо [4, с. 8].

На сучасному етапі інформаційних технологій одним із фундаментальних напрямків математики є функціональний аналіз. Він активно використовується в обчислювальній математиці, що має на меті розробку методів доведення до числового результату основних задач математичного аналізу, алгебри, геометрії та шляхів застосування з цією метою комп'ютерної техніки [1, с. 10].

У обчислювальній математиці виникає багато задач, що можна звести до відшукування нерухомої точки відображення. Для цього використовують метод послідовних наближень (метод ітерацій), в основу якого покладено принцип стискаючих відображень [6, с. 100]. Цей принцип застосовують до доведення теорем про існування та єдиність розв'язків деяких типів диференціальних і інтегральних рівнянь; він також дозволяє розв'язувати наукові проблеми в алгебрі, геометрії, фізиці, медицині, інформатиці, у теорії фракталів тощо.

Вивчення всіх цих питань є важливим для сучасних спеціалістів з різних галузей науки та природознавства, наприклад, для фахівців з медичної та обчислювальної техніки, архітекторів та вчителів математики тощо.

Аналіз актуальних досліджень. Вперше послідовні наближення зустрічаються у грецького філософа Зенона Елейського, який жив за 500 років до н.е. Він намагався довести, що в природі не існує руху. Для цього ним було складено та розв'язано задачу про Ахіллеса та черепаху, але зрозуміло, що його роздуми – парадокс.

Французький математик Еміль Пікар розвинув ще один метод послідовних, що був названий на його честь. Велику увагу розробці і поширенню методів наближених обчислень приділив академік О.М. Крилов, а в роботах М.В. Остроградського та О.М. Ляпунова було розглянуто застосування методу послідовних наближень до рівнянь коливального руху. Сама теорема про стискаючі відображення для повного нормованого простору була сформульована і доведена польським математиком Стефаном Банахом в його дисертації «Про операції в абстрактних множинах із застосуванням до інтегральних рівнянь», яка була опублікована в 1922 році.

Отже, знання історичного розвитку даного методу та сучасних можливостей його використання в різних галузях науки та в повсякденному житті зумовлює важливість вивчення цього питання в курсі математики вищих навчальних закладів, зокрема й студентами фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Мета статті. Показати застосування методу стискаючих відображень на прикладі фрактального методу стиску зображень в інформатиці та важливість його розуміння студентами, що вивчають математику.

Виклад основного матеріалу. Фрактальний метод кодування зображень відносять до алгоритмів архівації з частковою втратою інформації. Він ґрунтується на тому, що ми подаємо зображення в більш компактній формі – за допомогою коефіцієнтів систем ітерованих функцій (Iterated Function Systems – IFS). Теорія IFS була запропонована Хатчінсоном та в подальшому розвинута Майклом Барнслі та Аланом Слоуном [2, с. 101]. Вони запатентували свою ідею в 1990 році, а 1991 року Арнауд Джеквін представив метод фрактального кодування, в якому використовуються системи доменних і рангових блоків зображення [8, с. 17].

Найбільш відомими є два зображення отримані за допомогою IFS: трикутник Серпінського і папороть Барнслі. Перше з них задається трьома афінними перетвореннями, а друге – чотирма. Кожне перетворення кодується ліченими байтами, в той час як зображення, побудоване з їх допомогою, може займати і декілька мегабайт [5, с. 312].

Фактично фрактальна компресія – це пошук самоподібних областей у зображенні та визначення для них параметрів афінних перетворень [7, с. 31].

Теоретичним обґрунтуванням фрактального стиску зображень є теорема про стискаючі відображення: нехай маємо стискаюче відображення $f (X \rightarrow X)$ на повному метричному просторі (X, d) , де d – метрика. Тоді f має одну і лише одну нерухому точку $x_f \in X$, і для будь-якого $x \in X$ послідовність $\{f^{0^n}(x): n = 1, 2, \dots\}$ (f^{0^n} – n -а ітерація f) збігається до x_f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{0^n}(x) = x_f, \forall x \in X.$$

Точку x_f ще називають атрактором перетворення.

Зауважимо, що формально ми можемо використовувати будь-яке стискаюче відображення при фрактальному стисненні, але реально використовують тривимірне афінне перетворення з достатньо великими обмеженнями на коефіцієнти [5, с. 314].

Існує два алгоритми побудови фрактального зображення-атрактора за допомогою IFS:

- пряме застосування теореми про стискаючі відображення;
- застосування так званої «Гри хаосу».

Напрямку застосовує теорему про стискаючі відображення до будь-якого початкового зображення $B \in H(X)$ детерміністичний алгоритм для побудови зображення, що є атрактором IFS, де $H(X)$ – простір, що складається з компактних підмножин X . Даний алгоритм будує послідовність зображень A_n , багаторазово застосовуючи IFS відображення $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$: $A_n = W^{0^n}(B)$ [7, с.34].

Якщо ми покладемо $A_0 = B$, то $A_n = W^{0^n}(B)$ може бути записано у вигляді ітераційного процесу як

$$A_n = W(A_{n-1}).$$

За теоремою про стискаючі відображення A_n збігається до A , що є атрактором даної IFS.

Детерміністичний алгоритм є корисним тим, що ви можете бачити теорему про стискаючі відображення в дії і мати уявлення про те, як вона працює в контексті IFS-перетворень зображень, але це не найефективніший алгоритм з точки зору отримання якісних зображень-атракторів [8, с. 52, 57]. Кращим вважається використання ймовірнісного алгоритму, який ґрунтується на «Грі хаосу». Він пов'язує в IFS з кожним афінним перетворенням w_i ймовірність p_i . Ці ймовірності визначають те, наскільки щільно кожна частина зображення-атрактора вкрита точками. Зауважимо, що ймовірнісний алгоритм створює зображення високої якості набагато швидше, ніж детерміністичний алгоритм, завдяки тому, що виконує на кожній ітерації меншу роботу і ця робота дає кращий результат [7, с. 34]. Детерміністичний алгоритм будує на кожному n -ому кроці ітерації всю множину A_n , а ймовірнісний будує на n -ому кроці лише одну точку x_n , а отже він може виконувати тисячі ітерацій за час, що потрібний першому алгоритму на одну ітерацію [8, с. 59]. Зокрема, зображення фрактальної папороті може бути відтворено за допомогою відносно простої IFS, тому що цей вид зображень має властивість глобальної самоподібності. Це означає, що ціле зображення складається із зменшених копій його самого чи його частин. Однак реальне зображення не має властивості глобальної самоподібності, яка присутня в IFS зображеннях і не є двійковим; кожен піксель належить діапазону значень (у градаціях сірого) чи вектору значень (у кольорі) [7, с. 35].

Для фрактального стиску використовують системи ітерованих кусково-визначених функцій – PIFS (Partitioned iterated function system). PIFS складається з повного метричного простору X , набору підобластей $D_i \subset X$ ($i=1, \dots, n$) і набору стискаючих відображень w_i :

$$D_i \rightarrow X, i = 1, \dots, n.$$

Іншими словами, система ітерованих функцій, намагається знайти множину стискаючих перетворень w_i : $D_i \rightarrow X$, які відображають доменні блоки D_i в множину рангових блоків R_i , що покривають зображення [2, с.103].

Розглянемо застосування теореми про стискаючі відображення для зображень в градаціях сірого. Розіб'ємо одиничний квадрат I^2 на множину рангових блоків $\{R_i\}$:

$$I^2 = \bigcup R_i, R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j.$$

Нехай \tilde{w}_i – PIFS виду $D_i \rightarrow R_i$ для деякої множини доменних блоків $D_i \subset I^2$.

Для кожного \tilde{w}_i визначаємо відповідний стиск w_i на просторі зображень F , де $w_i(f)(x, y) = s_i f(\tilde{w}_i^{-1}(x, y)) + 0_i$, обираючи s_i так, щоб w_i було стиском.

Визначимо $W: F \rightarrow F$ наступним чином:

$$W(f)(x, y) = w_i(f)(x, y) \text{ для } (x, y) \in R_i.$$

Оскільки рангові області R_i покривають I^2 , відображення W визначено для всіх (x, y) з I^2 і тоді $W(f)$ є зображенням. Оскільки кожне відображення w_i є стиском, то й W є стиском на F . За теоремою про стискаючі відображення W має єдину нерухому точку $f_W \in F$, що задовольняє умову

$$W(f_W) = f_W.$$

Ітеративно застосовуючи W до довільного початкового зображення f_0 , ми отримаємо нерухому точку f_W :

$$W^{0n}(f_0) \rightarrow f_W, \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

де $W^{0n}(f_0)$ – це $W(W(\dots W(f_0)))$, тобто W застосовується n раз.

Зауважимо, що зображення декодується шляхом ітеративного застосування відображення W до довільного початкового зображення g , де

$$W(g)(x, y) = w_1(g)(x, y) \text{ для } (x, y) \in R_i.$$

Якщо послідовність перетворень $\{w_1\}$ була обрана коректно, то ітерація $W^{0n}(g)$ буде близькою до вихідного зображення f при деякому значенні n . За теоремою про стискаючі відображення ітерації будуть збігатися незалежно від вибору початкового зображення [8, с. 74, 90].

Подано загальний алгоритм фрактального кодування зображення.

1. Задане зображення розбивається на рангові блоки, що не перетинаються. Блоки можуть являти собою прямокутники, але можуть бути і іншої форми (наприклад, трикутники).

2. Задається набір доменів, що можуть взаємно перекриватися та бути різних розмірів, а їх кількість може обчислюватися сотнями і тисячами. Домени повинні включати характерні фрагменти, які надалі використовуються для побудови декодованого зображення.

3. Для кожного рангового блоку відшукується домен і відповідне перетворення, яке найкращим чином покриває ранговий блок. Зазвичай це афінне перетворення.

4. Якщо отримана відповідність не є шуканою, то рангові блоки розбиваються на менші. Цей процес продовжується, доки не отримаємо допустимої відповідності або розмір рангових блоків не досягне деякої заздалегідь визначеної межі [3, с. 25; 7, с. 36].

Серед переваг фрактального методу стиснення зображення можна виділити такі:

- він здатний забезпечити найкраще співвідношення ступеня стиснення та якості відновленого зображення;
- має короткий час розпакування;
- надає можливість відновлювати лише частину зображення і будь-якого розміру;
- має широкі можливості у виборі параметрів стиску [3, с. 27].

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. На сучасному етапі стиск даних є важливим як для швидкості передачі, так і ефективності зберігання. Він застосовується у медицині для реконструкції зображень у комп'ютерній томографії, до того ж крім багатьох видів комерційного використання, технології стиску є важливими й для військових потреб. Отже, метод стискаючих відображень має досить широке коло використання та відіграє велику роль у нашому житті. Одним із прикладів його застосування є фрактальне кодування зображень.

Знання даного методу дозволить спеціалістам з фізико-математичних спеціальностей застосовувати його при розв'язуванні прикладних задач, а майбутні вчителі зможуть пояснити учням математичний апарат на якому побудовані сучасні технології в багатьох галузях життя.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Березин, И. С., Жидков, Н. П. (1962). Методы вычислений, Б.М. Будака, А.Д. Горбунова (ред.). (Том 1). Москва: ГИФМЛ. (Berezin, I.S., Zhidkov, N.P. (1962). Computing methods. In B.M. Budaka, A.D. Gorbunova (eds.). (Vol. 1). Moscow: SPHPML).
2. Ватолин, Д., Ратушняк, А., Смирнов, М., Юкин, В. (2003). Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. Москва: ДИАЛОГ-МИФИ. (Vatolin, D., Ratushnyak, A., Smirnov, M., Yukin, V. (2003). Data compression methods. The device archivers, image and video compression. Moscow: Dialog-MIFI).
3. Земцов, А.Н. (2011). Сравнительный анализ эффективности методов сжатия изображений на основе дискретного косинусного преобразования и фрактального кодирования. Прикладная информатика, 4, 90-104. (Zemtsov, A.N. (2011). Comparative analysis of the effectiveness of image compression methods based on discrete cosine transform and fractal coding. Applied Informatics, 4, 90-104).
4. Зубко, Р.А. (2014). Сжатия изображений фрактальным методом. Восточно-Европейский журнал передовых технологий : сб. наук. Праць, 6, 23-28. (Zubko, R.A. (2014). Image compression by fractal method. Eastern European journal of advanced technology: collection of scientific works, 6, 23-28).
5. Кудрявцев, Л.Д. (2012). Курс математического анализа. (Том 1). (6-е изд.). Москва.: издательство Юрайт. (Kudryavtsev, L.D. (2012). Course of mathematical analysis. (Vol. 1). (6th ed.). Moscow: Yurayt).
6. Морозова, В.Д. (1996). Введение в анализ. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко (ред.). Москва: МГТУ имени Н.Э. Баумана. (Morozova, V.D. (1996). Introduction to analysis. In V.S. Zarubina, A.P. Krishchenko (eds.). Moscow: MSTU named after N.E. Bauman).
7. Тропченко, А.Ю., Тропченко, А.А. (2009). Методы сжатия изображений, аудиосигналов и видео. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО. (Tropchenko, A.Yu., Tropchenko, A.A. (2009). Methods for compressing images, audio, and video. Saint Petersburg: ITMO university).
8. Уэлстид, С. (2003). Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Москва: Триумф. (Welstead, S. (2003). Fractal and wavelet image compression techniques. Moscow: Triumph).

Лубенец З. О., Мартыненко Е. В. Применение метода сжимающих отображений.

В статье рассмотрено применение метода сжимающих отображений и метода последовательных приближений на примере фрактального сжатия изображений, указан общий алгоритм фрактального кодирования изображений и его преимущества и обоснованно важность изучения данного вопроса студентами высших учебных заведений, в частности студентами физико-математических факультетов педагогических университетов.

В вычислительной математике возникает много задач, можно свести к отысканию неподвижной точки отображения. Для этого используют метод последовательных приближений (метод итераций), в основу которого положен принцип сжимающих отображений. Этот принцип применяют к доказательству теорем о существовании и единственности решений некоторых типов дифференциальных и интегральных уравнений; он также позволяет решать научные проблемы в алгебре, геометрии, физике, медицине, информатике, в теории фракталов и тому подобное.

Среди преимуществ фрактального метода сжатия изображения можно выделить следующие: он способен обеспечить наилучшее соотношение степени сжатия и качества восстановленного изображения имеет короткое время распаковки; позволяет восстанавливать только часть изображения и любого размера; имеет широкие возможности в выборе параметров сжатия.

На современном этапе сжатие данных является важным как для скорости передачи, так и эффективности хранения. Он применяется в медицине для реконструкции изображений в компьютерной томографии, к тому же кроме многих видов коммерческого использования, технологии сжатия важны и для военных нужд. Итак, метод сжимающих отображений

имеет достаточно широкий круг использования и играет большую роль в нашей жизни. Одним из примеров его применения является фрактальное кодирование изображений.

Знание данного метода позволит специалистам по физико-математических специальностям применять его при решении прикладных задач, а будущие учителя смогут объяснить ученикам математический аппарат, на котором построены современные технологии во многих областях жизни.

Ключевые слова: метод сжимающих отображений, метод итераций, фрактальный сжатие изображений, неподвижная точка, математика, алгоритм фрактального кодирования, физико-математический факультет, студенты высших учебных заведений.

Lubenets Z., Martynenko O. Application of the method of compression mappings.

The article considered application of the method of compression mappings and the method of successive approximation on the example fractal compression of images, a general algorithm for fractal coding of images is indicated and its advantages and the importance of studying this issue by students of higher educational institutions, in particular students of the physics and mathematics faculties of pedagogical universities, is substantiated.

There are many problems in computational mathematics that can be reduced to finding a fixed point of reflection. To do this, use the method of sequential approximations (method of iterations), which is based on the principle of compression mappings. This principle is applied to the proof of the theorems on the existence and uniqueness of solutions of certain types of differential and integral equations; it also allows you to solve scientific problems in algebra, geometry, physics, medicine, computer science, fractal theory, and more.

Among the advantages of the fractal image compression method are the following: it is able to provide the best ratio of compression ratio and quality of the reconstructed image; has a short unpacking time; provides the ability to restore only part of the image and any size; has a wide range of compression options.

At the current stage, data compression is important for both transfer speed and storage efficiency. It is used in medicine for the reconstruction of images in computed tomography, and in addition to many commercial uses, compression technology is also important for military use. So, compression mapping has a wide range of uses and plays a big role in our lives. One example of its application is fractal image encoding.

Knowledge of this method will allow specialists in physical and mathematical specialties to apply it when solving applied problems, and future teachers will be able to explain to students the mathematical apparatus on which modern technologies in many branches of life are built.

Key words: *the method of compression mappings, iteration method, fractal compression of images, fixed point.mathematics, fractal coding algorithm, Faculty of Physics and Mathematics, students of higher education institutions.*

УДК 519.62

DOI 10.5281/zenodo.3547771

О. В. Мартиненко

ORCID ID 0000-0002-8287-0573

І. В. Міщенко

Сумський державний педагогічний
університет імені А.С. Макаренка

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РЕАЛЬНОЇ ДІЙСНОСТІ**

У статті розглянуто прикладне значення теорії диференціальних рівнянь першого порядку, зокрема, описано математичні моделі для розв'язування задач з хімії, фізики, екології та економічної моделі Еванса встановлення рівноважної ціни; показано важливість