УДК 512.544

Ф.Н.Лиман, М.Г.Друшляк
Сумский государственный педагогический университет имени А.С.Макаренко

О НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С НЕДЕДЕКИНДОВОЙ НОРМОЙ АБЕЛЕВЫХ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

Вивчаються неперіодичні групи без вільних абелевих підгруп рангу 2, норма абелевих нециклічних підгруп яких недедекіндова.

Одним из основных направлений теории групп является изучение строения групп с ограничениями, которые накладываются на некоторую выделенную систему подгрупп. Среди наиболее распространенных ограничений на данную систему подгрупп является условие нормальности подгрупп данной системы. С историей изучения групп с определенными системами нормальных подгрупп можно ознакомиться в работах С.Н.Черникова [1], Ф.Н.Лимана [2], Н.Н.Семко [3].

С условием нормальности и нормализаторным условием связано понятие нормы. Впервые понятие нормы ввел Р.Бер [4] в 1934 году. Согласно [4] нормой $N(G)$ группы G называется пересечение нормализаторов всех подгрупп группы G. Норму $N(G)$ группы активно изучали также Е.Шенкман [5], Л.Уос [6], Дж.Байдлеман, Х.Хайнекен, М.Невелл [7], Дж.Ван, С.Го [8].

Обобщая понятие нормы, получим понятие Σ-нормы, которая является пересечением нормализаторов всех подгрупп системы Σ (при условии, что система Σ не пуста). Введение понятия Σ-нормы дает возможность расширить список исследуемых характеристических подгрупп группы. В группе, которая совпадает со своей Σ-нормой, нормальными являются все подгруппы системы Σ. Таким образом, для многих систем Σ строение Σ-норм уже известно в случае совпадения Σ-нормы со всей группой. Интересным является направление по исследованию свойств групп при условии, что Σ-норма является собственной подгруппой группы.

Одно из возможных обобщений нормы группы – это норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G, которая впервые изучалась в работе [9]. Согласно [9] нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G называется пересечение нормализаторов всех абелевых нециклических подгрупп группы G при условии, что в группе G существует хотя бы одна такая подгруппа. Если норма N_G^A содержит абелевы нециклические подгруппы, то все они нормальны в ней. Поэтому норма N_G^A является или дедекиндовой группой, или недедекиндовой группой, все абелевы нециклические подгруппы которой нормальны ($\overline{HA}$–группой). Полное описание непериодических $\overline{HA}$–групп дает предложение 1.

Предложение 1 [10]. *Непериодические $\overline{HA}$-группы исчерпываются группами следующих типов:*

1) $G=\langle a\rangle\lambda\langle b\rangle$, где $|a|=p^n$, $n\geq 1$ (при $p=2$ $n>1$), $|b|=\infty$, $[a,b]=a^{p^{n-1}}$;

2) $G=H\times B$, где H – группа кватернионов, B – бесконечная циклическая группа или группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей;

3) $G=A\lambda\langle b\rangle$, где A – непериодическая абелева группа без инволюций, $|b|=2$, $b^{-1}ab=a^{-1}$ для любого элемента $a\in A$;

4) $G=A\langle b\rangle$, где A – непериодическая абелева группа, $|b|=4$, инволюция $b^2\in A$ единственная в группе, $b^{-1}ab=a^{-1}$ для любого элемента $a\in A$;

5) $G=A\lambda\langle b\rangle$, где A – группа, изоморфная аддитивной группе p-ичных дробей, $|b|=\infty$, $b^{-1}ab=a^m$, $m=\pm p^n$, $n\geq 1$ для любого элемента $a\in A$;

6) $G=A\lambda\langle b\rangle$, где A – бесконечная циклическая группа или группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей, $|b|=8$, $b^{-1}ab=a^{-1}$ для любого элемента $a\in A$;

7) $G=A\lambda\langle b\rangle$, где A – бесконечная циклическая группа или группа, изоморфная аддитивной группе p-ичных дробей ($p\neq 2$), $|b|=2p$, $b^{-1}ab=a^{-1}$ для любого элемента $a\in A$;

8) $G=(\langle a\rangle\lambda\langle c\rangle)\lambda\langle b\rangle$, где $|a|=p\neq 2$, $|b|=2$, $|c|=\infty$, $c^{-1}ac=a^{-1}$, $[a,b]=1$, $b^{-1}cb=c^{-1}$.

Отметим, что $\overline{HA}$-группы типов 3) и 4) предложения 1 являются также IH-группами, то есть группами, в которых все бесконечные абелевы подгруппы нормальны [1].

Свойства нормы N_G^A абелевых нециклических подгрупп непериодических групп, которые содержат свободную абелеву подгруппу ранга 2, изучались в [11]. В [11] было доказано, что если норма N_G^A недедекиндова, содержит хотя бы одну абелеву нециклическую подгруппу и не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2, то и группа G не содержит такой подгруппы.

В данной работе изучаются свойства непериодических локально разрешимых групп без свободной абелевой подгруппы ранга 2 в зависимости от свойств нормы N_G^A абелевых нециклических подгрупп.

Лемма 2. *Пусть G – непериодическая локально разрешимая группа, ее норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп недедекиндова и не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2. Тогда:*

1) если группа G содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу $\langle z\rangle$, то централизатор $C=C_G(\langle z\rangle)$ содержит все элементы бесконечного порядка группы G, все абелевы нециклические подгруппы группы G и периодическая часть $T(C)$ является нормальной подгруппой, а фактор-группа $C/T(C)$ – абелева без кручения ранга 1;

2) если норма N_G^A содержит нормальную в G абелеву нециклическую подгруппу A без кручения ранга 1 и $C = C_G(A)$ её централизатор, то фактор-группа C/A локально конечна, периодическая часть $T(C)$ является нормальной подгруппой и фактор-группа $C/T(C)$ – абелева без кручения ранга 1;

3) если норма N_G^A содержит нормальную в G абелеву нециклическую подгруппу A без кручения ранга 1, содержит нормальную конечную отличную от единичной подгруппу К, то централизатор $C = C_G(A)$ содержит все элементы бесконечного порядка группы G, все абелевы нециклические подгруппы группы G и $|G/C| \le 2$.

Доказательство. Рассмотрим каждый из отмеченных в лемме случаев.

1) Изучим строение централизатора $C = C_G(\langle z \rangle)$, где $|z| = \infty$, $\langle z \rangle \lhd G$. По теореме 1 из [11] $\langle z \rangle \cap N_G^A \ne E$. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать $z \in N_G^A$. По теореме 3 из [11] группа G не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2. Отсюда следует, что подгруппа C содержит все элементы бесконечного порядка группы G. В самом деле, если $x \in G \setminus C$ и $|x| = \infty$, то $x^{-1}zx = z^{-1}$, $x^{-2}zx^2 = z$ и потому $\langle x \rangle \cap \langle z \rangle \ne E$. Пусть $x^k = z^m$. Тогда $x^{-1}z^m x = z^{-m} = z^m$, $z^{2m} = 1$, что невозможно. Следовательно, C содержит все элементы бесконечного порядка группы и, более того, она ими порождается.

Отсюда и из условия локальной разрешимости группы G следует, что $C/\langle z \rangle$ – локально конечная группа. По предложению 3.9 [1] элементы конечного порядка группы C составляют нормальную подгруппу $T(C)$ и $C/T(C)$ – абелева группа без кручения ранга 1.

Подгруппа C содержит также все p-элементы при $p \ne 2$. Поэтому $G = C$, если группа G не содержит инволюций, или $G = C\langle y \rangle$, где $|y| = 2^k$, $k \ge 1$, $y^2 \in C$, если группа G содержит инволюции.

Покажем, что централизатор C содержит все абелевы нециклические подгруппы группы G. Если A – непериодическая абелева нециклическая подгруппа, то она порождается элементами бесконечного порядка и потому $A \subset C$. Если A – периодическая абелева нециклическая подгруппа, то она N_G^A-нормальна и $[A, \langle z \rangle] \subset A \cap \langle z \rangle = E$, $A \subset C$. Следовательно, подгруппа C содержит все абелевы нециклические подгруппы группы G.

2) Данное утверждение леммы следует непосредственно из предложения 3.9 и теоремы 2 [11].

3) Покажем, что централизатор $C = C_G(A)$ содержит все элементы бесконечного порядка группы G. Для этого предположим, что существует элемент $x \in G \setminus C$, $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \cap C = E$. По условию норма N_G^A содержит нормальную конечную подгруппу *К*. Поскольку $[G : C_G(K)] < \infty$, то

$x^{m} \in C_G(K)$ для некоторого целого числа m. Подгруппа $\langle x^m, K\rangle$ является N_G^A–нормальной и $\langle x^{m|K|}\rangle$ также N_G^A–нормальна. Тогда

$$\left[\langle x^{m|K|}\rangle, N_G^A\right] \subset \langle x^{m|K|}\rangle \cap N_G^A = E$$

и группа G содержит свободную абелеву подгруппу ранга 2, что противоречит условию леммы и поэтому $\langle x\rangle \cap C \neq E$.

Поскольку A является абелевой нециклической группой без кручения ранга 1, то фактор-группа G/C изоморфна подгруппе мультипликативной группы рациональных чисел. Значит, $|G/C| \leq 2$. Для любого элемента $a \in A$ $x^{-1}ax = a_1$, $a_1 \in A$. Поскольку фактор-группа C/A локально конечна, то $x^m = a^n$ для некоторых чисел m и n. Тогда $x^{-1}a^n x = a_1{}^n = a^n$, $a_1{}^n a^{-n} = 1$, $(a_1 a^{-1})^n = 1$. Так как $n \neq 0$, то $a_1 a^{-1} = 1$ и $a_1 = a$. Следовательно, $x \in C$ и централизатор C содержит все элементы бесконечного порядка группы G.

Покажем, что централизатор C содержит любую абелеву нециклическую подгруппу F группы G. Если F – периодическая абелева нециклическая подгруппа, то она N_G^A–нормальна и $[F, A] \subset F \cap A = E$. Если F – непериодическая абелева нециклическая подгруппа, то она порождается элементами бесконечного порядка и $F \subset C$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G – непериодическая группа, $N_G^A \neq E$ и группа G содержит отличную от единичной N_G^A–нормальную подгруппу H такую, что $N_G^A \cap H = E$. Если норма N_G^A непериодическая, то в ней нормальны все бесконечные циклические подгруппы. В частности, N_G^A дедекиндова, если для любого отличного от единицы элемента $y \in N_G^A$ найдется такой элемент $h \in H$, что $\langle y, h\rangle$ – нециклическая подгруппа.*

Доказательство. Так как H является N_G^A–нормальной и $N_G^A \lhd G$, то $HN_G^A = H \times N_G^A$. Пусть $x \in N_G^A$ и $|x| = \infty$. Тогда для $h \neq 1$ и $h \in H$ подгруппа $\langle x, h\rangle$ абелева нециклическая и потому N_G^A–нормальна. Отсюда $\langle x, h\rangle \cap N_G^A = \langle x\rangle \lhd N_G^A$, что и требовалось доказать. Если для произвольного элемента $y \in N_G^A$ и существует такой элемент $h \in H$, что $\langle y, h\rangle$ – нециклическая подгруппа, то $\langle y, h\rangle \cap N_G^A = \langle y\rangle \lhd N_G^A$ и подгруппа N_G^A дедекиндова. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть G – непериодическая локально разрешимая группа и ее норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп недедекиндова, является конечным расширением бесконечной циклической нормальной подгруппы и не является IH-группой. Тогда группа G также является конечным расширением бесконечной циклической нормальной подгруппы, централизатор которой содержит все элементы бесконечного порядка и является произведением* *рмальной циклической p-группы или группы кватернионов порядка 8 и бесконечной циклической группы.*

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов в зависимости от строения нормы N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G.

1. $N_G^A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, где $|a| = p^n$ (при $p = 2$ $n > 1$), $|b| = \infty$, $[a,b] = a^{p^{n-1}}$.

В этом случае $Z(N_G^A) = \langle a^p, b^p \rangle$ и характеристическая подгруппа $\langle b^{p^n} \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G$. Обозначим $C = C_G(\langle z \rangle)$. При этом по предложению 3.9 [1] периодическая часть централизатора $T(C) \triangleleft G$ и $C/T(C)$ – абелева группа без кручения ранга 1. Так как N_G^A по условию не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2, то по теореме 2 [11] фактор-группа $G/\langle z \rangle$ – периодическая локально конечная группа.

Так как N_G^A содержит ненормальные бесконечные циклические подгруппы, то по лемме 3 периодическая часть $T(C)$ имеет единственную подгруппу простого порядка $\langle a^{p^{n-1}} \rangle$. Поэтому $T(C)$ является либо локально циклической *p*-группой, либо кватернионнной 2-группой.

Покажем, что подгруппа $T(C)$ конечна. Пусть $T(C) \supset P$, где P - квазициклическая подгруппа. Пусть $d \in P$. Тогда

$$[b, zd] = [b, d] \in P \cap (\langle zd \rangle \times \langle a^{p^{n-1}} \rangle) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

Отсюда следует, что $[b, P] = E$ и потому $[b, a] = 1$, что противоречит условию. Следовательно, $|T(C)| < \infty$.

Пусть $T(C) = \langle c \rangle$. Тогда $T(C)N_G^A = \langle c \rangle \lambda \langle b \rangle$, где $\langle c \rangle \supseteq \langle a \rangle$. Если $\langle c \rangle \neq \langle a \rangle$, то $|[b, c]| > p$, так как иначе $[b, a] = 1$, что невозможно. С другой стороны,

$$[b, cz] = [b, c] \in \langle c \rangle \cap (\langle cz \rangle \times \langle a^{p^{n-1}} \rangle) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

Отсюда следует, что $\langle c \rangle = \langle a \rangle$ и $T(C)N_G^A = N_G^A$.

Пусть $T(C)$ – кватернионная группа. В этом в случае $p = 2$ и $|a| \geq 4$. Покажем, что $|T(C)| = 8$. Пусть $T(C) = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 2^k$, $k \geq 2$, $|h_2| = 4$, $h_1^{2^{k-1}} = h_2^2$, $h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1}$. Так как $\langle a \rangle \triangleleft G$, то можно считать, что $\langle a \rangle \subseteq \langle h_1 \rangle$. Если предположить, что $|h_1| > |a|$, то из условия N_G^A–нормальности подгруппы $\langle h_1, z \rangle$ следует N_G^A–нормальность ее характеристической подгруппы $\langle h_1 \rangle$. Тогда $|[h_1, b]| > 2$, иначе $[a, b] = 1$, что невозможно по условию. С другой стороны

$$[b, h_1 z] = [b, h_1] \in \langle h_1 \rangle \cap (\langle h_1, z \rangle \times \langle h_1^{2^{k-1}} \rangle) = \langle h_1^{2^{k-1}} \rangle.$$

получили противоречие и потому $|h_1| = |a|$. Так как $\langle h_2, z\rangle$ – N_G^A-нормальна, то и $\langle h_2\rangle$ - N_G^A–нормальна. Тогда $[a,h_2] \in \langle a\rangle \cap \langle h_2\rangle = \langle h_2^2\rangle$. Отсюда следует, что $|a| = 4$ и $T(C) = \langle a, h_2\rangle$ – группа кватернионов порядка 8.

Покажем, что группа G не содержит абелевых нециклических подгрупп без кручения ранга 1. Допустим, что X – максимальная абелева нециклическая подгруппа без кручения ранга 1 группы G. Подгруппа X является N_G^A–нормальной. По лемме 2 $X \subset C$ и $C/T(C)$ абелева. Тогда $C' \subseteq T(C)$. Поскольку $N_G^A \subseteq C$, то $[N_G^A, X] \subseteq T(C) \cap X = E$. Тогда $X \subset Z(X \cdot N_G^A)$ и $C_1 = X \cdot N_G^A$ является $\overline{HA}$–группой. Учитывая строение $\overline{HA}$–групп, $C_1 = H \times B$, где B – группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей. Поскольку $C_1 \supseteq T(C) \supseteq C'$, то $C_1 \triangleleft C$ и $C_1^{\ 4} = B \triangleleft C$.

Покажем, что подгруппа B содержится в централизаторе любой абелевой нециклической подгруппы A группы G. По лемме 2 $A \subset C$. Если A – непериодическая абелева нециклическая подгруппа, то она порождается элементами бесконечного порядка. Пусть $g \in A$ и $|g| = \infty$. Тогда $g \in C$ и $[g, B] \subset B$. Но, с другой стороны, $[g,B] \subseteq T(C)$ и потому $[g,B] = E$. Если A – периодическая абелева нециклическая подгруппа, то $A \subseteq T(C)$, что невозможно. Значит, $B \subseteq N_G^A$, что противоречит строению нормы N_G^A. Поэтому все абелевы подгруппы без кручения ранга 1 группы G циклические. Следовательно, $C/T(C)$ – циклическая группа и $C = T(C)\lambda\langle x\rangle$, где $|x| = \infty$. Поэтому централизатор C бесконечной циклической нормальной подгруппы $\langle z\rangle$ содержит все элементы бесконечного порядка и является произведением нормальной циклической *p*-группы или группы кватернионов порядка 8 и бесконечной циклической группы. Теорема в этом случае доказана.

2. $N_G^A = H \times \langle b\rangle$, где $H = \langle h_1, h_2\rangle$ - группа кватернионов порядка 8, $|b| = \infty$.

В этом случае $Z(N_G^A) = \langle h_1^2\rangle \times \langle b\rangle$ и потому $\langle b^2\rangle = \langle z\rangle \triangleleft G$. Централизатор $C = C_G(z)$ имеет индекс не выше 2 в группе G. При этом периодическая часть $T(C) \supset H$, $T(C) \triangleleft G$ и $C/T(C)$ – абелева группа без кручения ранга 1, а $G/\langle z\rangle$ - периодическая локально конечная группа.

Так как N_G^A содержит ненормальные бесконечные циклические подгруппы, то по лемме 3 $T(C)$ имеет единственную подгруппу простого порядка $\langle h_1^2\rangle$, причем $\langle h_1^2\rangle \subseteq Z(G)$. Поэтому $T(C)$ является кватернионной 2-группой.

Покажем, что $T(C) = H$. Пусть $T(C) \supset \langle c, d\rangle$, где $|c| = 8$, $|d| = 4$, $c^4 = d^2$, $d^{-1}cd = c^{-1}$. Тогда $H = \langle c^2, d\rangle$. Подгруппа $\langle cz\rangle \times \langle h_1^2\rangle$ является N_G^A–

нормальной. Поэтому ее характеристическая подгруппа $\langle c^2z^2 \rangle$ также N_G^A–нормальна. Тогда

$$[H, c^2z^2] = [H, c^2] \in H \cap \langle c^2z^2 \rangle = E,$$

что невозможно. Следовательно, $T(C) = H$.

Так как $N_G^A \subset C$ и $T(C) = H$, то аналогично предыдущему случаю доказывается, что группа G не содержит абелевых нециклических подгрупп ранга 1 без кручения. Тогда фактор-группа $C/T(C)$ является циклической подгруппой бесконечного порядка и $C = H\lambda\langle x \rangle$, где $|x| = \infty$. Отсюда $[H, \langle x, h_1^2 \rangle] \subseteq \langle h_1^2 \rangle$ и $C = H \times \langle y \rangle$, где $y = x$, или $y = xh_1$, или $y = xh_2$, или $y = xh_1h_2$. Следовательно, C является $\overline{HA}$–группой и централизатор C содержит все элементы бесконечного порядка и является произведением нормальной группы кватернионов порядка 8 и бесконечной циклической группы. Теорема в этом случае доказана.

3. $N_G^A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, где $|a| = \infty$, $|b| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

В этом случае коммутант N_G^A равен $\langle a^2 \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G$, $C = C_G(z) \neq G$ и $G = C\langle b \rangle$, $b^2 \in C$. Как и в предыдущих случаях доказывается, что подгруппа $T(C)$ конечна и имеет единственную подгруппу порядка 2.

Пусть $T(C)$ – кватернионная 2-группа, $T(C) = H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 2^n$, $n \geq 2$, $|h_2| = 4$, $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$. Так как $H \triangleleft G$, то можно рассмотреть подгруппу $\langle b \rangle H$. Если она содержит элементарную абелеву подгруппу $\langle b^2 \rangle \times \langle t \rangle$ порядка 4, то $t \notin C$ и далее, как и выше, приходим к противоречию. Если $\langle b \rangle H$ – кватернионная группа, то в ней нормальны все циклические подгруппы порядка больше 4. Тогда $\langle b \rangle \triangleleft \langle b \rangle H$ и H содержит такой элемент h порядка 4, что $h^{-1}bh = b^{-1}$. Но $\langle h, z \rangle$ является N_G^A–нормальной подгруппой и потому

$$b^{-2} = [b, h] \in \langle b \rangle \cap \langle h, z \rangle = \langle h^2 \rangle,$$

$|b^{-2}| = 2$, что невозможно. Следовательно, $T(C)$ – циклическая группа.

Пусть $T(C) = \langle c \rangle$. Тогда $b^2 \in \langle c \rangle$. Предположим, что $c_1 \in \langle c \rangle$ и $|c_1| = 8$. Так как $\langle c \rangle \triangleleft G$, то $\langle c_1 \rangle \langle b \rangle$ - 2-группа порядка 16, порожденная двумя элементами порядка 8. Тогда она содержит элементарную абелеву подгруппу $\langle b^4 \rangle \times \langle t \rangle$ порядка 4, причем $t \notin C$, что невозможно по лемме 3. Следовательно, $T(C) = \langle b^2 \rangle$.

Покажем, что группа G не содержит абелевых нециклических подгрупп без кручения ранга 1. Допустим, что X – максимальная абелева нециклическая подгруппа без кручения ранга 1 группы G. Подгруппа X является N_G^A–нормальной. Тогда $[(C \cap N_G^A), X] \subset X$. С другой стороны, по лемме 2 $X \subset C$ и $C/T(C)$ абелева. Тогда $C' \subseteq T(C)$ и $[(C \cap N_G^A), X] \subseteq T(C)$. Значит, $[(C \cap N_G^A), X] = E$.

Далее $[b, X] \subseteq X \cap N_G^A$, где $X \cap N_G^A$ – циклическая подгруппа. Поскольку X является N_G^A–нормальной, то для любого элемента $x \in X$ $b^{-1}xb = x^{-1}$ или $[b, x] = 1$. Если $b^{-1}xb = x^{-1}$, то $[b, X]$ – нециклическая подгруппа, что невозможно. Значит, $[b, x] = 1$. Но тогда $X \subset Z(X \cdot N_G^A)$ и $C_1 = X \cdot N_G^A$ является $\overline{HA}$–группой, что противоречит предложению 1. Таким образом, все абелевы подгруппы без кручения ранга 1 группы G циклические.

Тогда $C/T(C)$ - циклическая группа бесконечного порядка и $C = \langle b^2 \rangle \lambda \langle x \rangle$, $|x| = \infty$, $G = C\langle b \rangle = \langle x \rangle \langle b \rangle$ и группа G удовлетворяет условиям теоремы.

4. $N_G^A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, где $|a| = \infty$, $|b| = 2p$, $p \neq 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. В этом случае коммутант N_G^A равен $\langle a^2 \rangle = \langle z \rangle \lhd G$, $G \neq C = C_G(\langle z \rangle)$, $G = C\langle b \rangle = C\lambda\langle b^p \rangle$, $b^2 \in C$. Как и в предыдущем случае доказывается, что периодическая часть $T(C)$ имеет единственную подгруппу простого порядка $p \neq 2$ и является циклической p-группой: $T(C) = \langle c \rangle$. Пусть $|c| > p$ и $c_1 \in \langle c \rangle$, $|c_1| = p^2$. Так как подгруппа $\langle zc_1 \rangle \times \langle b^2 \rangle$ является N_G^A–нормальной, то $\langle z^p c_1^p \rangle$ также N_G^A–нормальна. Тогда

$$b^{-1}(z^p c_1^p)b = (z^p c_1^p)^{-1} = z^{-p} c_1^p,$$

$z^{2p} = 1$, что невозможно. С другой стороны, невозможно $b^{-1}(z^p c_1^p)b = z^p c_1^p$. Поэтому $T(C) = \langle c \rangle = \langle b^2 \rangle$.

Аналогично предыдущему случаю доказывается, что группа G не содержит абелевой нециклической подгруппы ранга 1 без кручения. Значит, $C = \langle b^2 \rangle \lambda \langle x \rangle$, где $|x| = \infty$, $G = C\langle b \rangle = \langle x \rangle \langle b \rangle$ и в этом случае группа G удовлетворяет условиям теоремы.

5. $N_G^A = (\langle a \rangle \lambda \langle c \rangle) \lambda \langle b \rangle$, где $|a| = p \neq 2$, $|b| = 2$, $|c| = \infty$, $c^{-1}ac = a^{-1}$, $[a, b] = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$. В этом случае коммутант $(N_G^A)' = \langle a, c^2 \rangle$, $\langle c^{2p} \rangle = \langle z \rangle \lhd G$, $C = C_G(z) \supset \langle a \rangle \lambda \langle c \rangle$, $b \notin C$, $G = C\lambda\langle b \rangle$.

Покажем, что $T(C) = \langle a \rangle$. В самом деле, пусть имеется $g \in T(C)$, $|g| = q$ - простое число и $\langle g \rangle \neq \langle a \rangle$. Так как подгруппа $(\langle z \rangle \times \langle g \rangle)$ – N_G^A-нормальна, то и подгруппа $\langle g \rangle$ будет N_G^A–нормальной. Тогда $G_1 = \langle g \rangle \times N_G^A$. Отсюда $[a, c] \in \langle a \rangle \cap \langle c, g \rangle = E$, что невозможно. Следовательно, $T(C)$ имеет

...инственную подгруппу простого порядка. Далее как и в предыдущих случаях доказывается, что $T(C)=\langle x\rangle$ – циклическая p-группа. Пусть $\langle x\rangle \supseteq \langle x_1\rangle$, $|x_1| = p^2$. Тогда $\langle zx_1\rangle \times \langle a\rangle$ – N_G^A-нормальна, $(zx_1)^p = \left\langle z^p x_1{}^p\right\rangle$ – N_G^A-нормальна и потому

$$b^{-1}(z^p x_1{}^p)b = z^{-p}x_1{}^p = (z^p x_1{}^p)^{-1}.$$

Отсюда $x_1^{2p} = 1$, что невозможно по условию. Следовательно, $T(C)=\langle a\rangle$.

Покажем, что группа G не содержит абелевых нециклических подгрупп без кручения ранга 1. Допустим, что X – максимальная абелева нециклическая подгруппа без кручения ранга 1 группы G. Подгруппа X является N_G^A–нормальной и потому $\left[(C\cap N_G^A), X\right] \subset X$. С другой стороны, по лемме 2 $X \subset C$ и $C/T(C)$ абелева. Тогда $C' \subseteq T(C)$ и $\left[(C\cap N_G^A), X\right] \subseteq T(C)$ и $\left[(C\cap N_G^A), X\right] = E$. Далее $X \subset Z(X\cdot(C\cap N_G^A))$ и $C_1 = X\cdot(C\cap N_G^A)$ является $\overline{HA}$–группой, что противоречит описанию таких групп. Значит, все абелевы подгруппы без кручения ранга 1 группы G циклические. Тогда $C=\langle a\rangle\lambda\langle y\rangle$, $|y|=\infty$, $G = C\lambda\langle b\rangle$ и группа G удовлетворяет условиям теоремы. Все варианты для нормы N_G^A рассмотрены и теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть G – непериодическая локально разрешимая группа и ее норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп смешанная, содержит абелевы нециклические подгруппы без кручения ранга 1 и не является IH-группой. Тогда G – конечное расширение нормальной абелевой нециклической подгруппы без кручения ранга 1, централизатор которой является прямым произведением циклической p-группы или группы кватернионов порядка 8 и абелевой нециклической подгруппы без кручения ранга 1.*

Доказательство. Поскольку норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп не является IH–группой, то по предложению 1 она не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2. Тогда по теореме 2 [11] и группа G не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2.

Разобьем доказательство на несколько шагов в зависимости от строения нормы N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G.

1. $N_G^A = H\times B$, где $H=\langle h_1, h_2\rangle$ – группа кватернионов порядка 8, B – группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей.

Так как $(N_G^A)^4 = B^4 = B$, то $B \triangleleft G$. Обозначим $C = C_G(B)$. Группа C не содержит элемента f простого порядка q, не принадлежащего H. В самом деле, пусть $|f| = q$ и $f \notin H$. Тогда $\langle f, B\rangle$ – N_G^A-нормальна и потому $\langle f\rangle \triangleleft N_G^A\langle f\rangle$. Тогда $G_1 = N_G^A \times \langle f\rangle$ является $\overline{HA}$-группой, что невозможно по их описанию. Значит, $T(C)\supset H$ и имеет единственную подгруппу простого порядка – инволюцию $\left\langle h^2\right\rangle$. Тогда $T(C)$ – кватернионная 2-группа. Пусть

$T(C) \supseteq \langle c, d \rangle$, где $|c| = 8$, $|d| = 4$, $c^4 = d^2$, $d^{-1}cd = c^{-1}$. Тогда $H = \langle c^2, d \rangle$. Подгруппа $\langle cb \rangle \times \langle d^2 \rangle$, где $b \in B$ и $|b| = \infty$ является N_G^A-нормальной. Поэтому ее характеристическая подгруппа $\langle c^2 b^2 \rangle$ также N_G^A-нормальна. Тогда

$$[H, c^2 b^2] = [H, c^2] \subset H \cap \langle c^2 b^2 \rangle = E,$$

что невозможно в группе кватернионов H. Следовательно, $T(C) = H$.

По лемме 2 C/B локально конечна, $C/T(C)$ – абелева группа без кручения ранга 1, $C \supseteq H \times B = N_G^A$, а централизатор C содержит все элементы бесконечного порядка группы G и все абелевы нециклические подгруппы группы G. Допустим, что $C \neq N_G^A$. Тогда существует элемент $x \in C \setminus N_G^A$ и $|x| = \infty$. Подгруппы $\langle x, B \rangle$ и $\langle x, h^2 \rangle$ являются N_G^A–нормальными. Если подгруппа $\langle x, B \rangle$ без кручения, то $\langle x, B \rangle \cap \langle x, h^2 \rangle = \langle x \rangle$ также N_G^A–нормальна. Если подгруппа $\langle x, B \rangle$ смешанная, то $\langle x, B \rangle = \langle h \rangle \times B_1$, где $|h| \le 4$, $B_1 \neq B$ и $x = hx_1$, $x_1 \in B_1$, $x_1 \notin N_G^A$. Подгруппы B_1 и $\langle x_1, h \rangle$ являются N_G^A–нормальными и $B_1 \cap \langle x_1, h \rangle = \langle x_1 \rangle$ также N_G^A–нормальна. Таким образом, если $C \neq N_G^A$, то можно указать такую N_G^A–нормальную подгруппу $\langle x \rangle$, что $x \in C \setminus N_G^A$.

Значит, для произвольного элемента $d \in N_G^A$ $d^{-1}xd = x^{\alpha}$. Поскольку фактор-группа C/B локально конечна, то $x^k \in B$ для некоторого целого числа k и $d^{-1}x^k d = x^{k\alpha} = x^k$. Тогда $\alpha = 1$, $x \in Z(\langle x \rangle N_G^A)$ и $C_1 = \langle x \rangle N_G^A$ является $\overline{HA}$–группой. Учитывая строение $\overline{HA}$–групп, $C_1 = H \times B_1$, где B_1 – группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей.

По лемме 2 фактор-группа $C/T(C)$ абелева и $C' \subseteq T(C)$. Поскольку $C_1 \supseteq T(C) \supseteq C'$, то $C_1 \lhd C$ и $C_1^{\,4} = B_1 \lhd C$. Покажем, что подгруппа B_1 содержится в централизаторе любой абелевой нециклической подгруппы A группы G. По лемме 2 $A \subset C$. Если A – непериодическая абелева нециклическая подгруппа, то она порождается элементами бесконечного порядка. Пусть $g \in A$ и $|g| = \infty$. Тогда $g \in C$ и $[g, B_1] \subset B_1$. Но, с другой стороны, $[g, B_1] \subseteq T(C)$ и потому $[g, B_1] = E$. Если A – периодическая абелева нециклическая подгруппа, то $A \subseteq T(C)$, что невозможно. Значит, $B_1 \subseteq N_G^A$, что противоречит выбору элемента x.

Значит, $C = N_G^A$ и C является прямым произведением абелевой нециклической подгруппы без кручения ранга 1 и группы кватернионов порядка 8. В этом случае теорема доказана.

2. $N_G^A = A\lambda\langle b \rangle$, где A – группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей, $|b| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.

Подгруппа $(N_G^A)' = A^2 = A$ – характеристическая в нормальной подгруппе N_G^A и $A \lhd G$. Обозначим $C = C_G(A) \lhd G$. По лемме 2 фактор-группа C/A локально конечна и $C/T(C)$ – абелева группа без кручения ранга 1.

Предположим, что $T(C)$ содержит элемент d простого порядка q, который не принадлежит $\langle b^2 \rangle$. Подгруппа $\langle d, A \rangle$ – N_G^A-нормальна и потому $\langle d \rangle \lhd N_G^A \langle d \rangle$. Тогда $N_G^A \times \langle d \rangle$ является $\overline{HA}$-группой, что противоречит их описанию. Значит, $T(C) \supset \langle b^2 \rangle$ и имеет единственную подгруппу простого порядка $\langle b^4 \rangle$.

Аналогично доказательству пункта 3 теоремы 4 доказывается, что $T(C) = \langle b^2 \rangle$. Так как $T(C) = \langle b^2 \rangle \subset N_G^A$ и $T(C) \lhd G$, то по лемме 2 фактор-группа G/C циклическая порядка 2 и $G = C\langle b \rangle$.

Обозначим $C_1 = C \cap N_G^A = A \times \langle b^2 \rangle$. Предположим, что $C \neq C_1$. Тогда существует элемент $x \in C \setminus N_G^A$ и $|x| = \infty$. Подгруппы $\langle x, A \rangle$ и $\langle x, b^2 \rangle$ являются N_G^A–нормальными. Если подгруппа $\langle x, A \rangle$ без кручения, то $\langle x, A \rangle \cap \langle x, b^2 \rangle = \langle x \rangle$ также N_G^A–нормальна. Тогда либо $[b, x] = 1$, либо $b^{-1}xb = x^{-1}$. Если $[b, x] = 1$, то подгруппа $\langle x, b \rangle$ – N_G^A–нормальна и $\langle b \rangle \lhd N_G^A$, что противоречит строению нормы N_G^A. Следовательно, $b^{-1}xb = x^{-1}$.

Тогда подгруппа $G_1 = A_1 \lambda \langle b \rangle$, где $A_1 = \langle x, A \rangle$, является $\overline{HA}$-группой. Учитывая строение $\overline{HA}$-групп, подгруппа A_1 является 2-полной. Тогда $\langle b^2, x, A \rangle = \langle b^2 \rangle \times A_1$ – абелева подгруппа централизатора *C*. По лемме 2 фактор-группа $C/T(C)$ абелева и $C' \subseteq T(C)$. Поскольку $\langle b^2 \rangle \times A_1 \supseteq T(C) \supseteq C'$, то $\langle b^2 \rangle \times A_1 \lhd C$. Так как подгруппа A_1 2-полная, то $(\langle b^2 \rangle \times A_1)^4 = A_1{}^4 = A_1 \lhd C$. Покажем, что подгруппа A_1 содержится в централизаторе любой абелевой нециклической подгруппы F группы G. По лемме 2 $F \subset C$. Если F – непериодическая абелева нециклическая подгруппа, то она порождается элементами бесконечного порядка. Пусть $f \in F$ и $|f| = \infty$. Тогда $f \in C$ и $[f, A_1] \subset A_1 \cap T(C) = E$. Если F – периодическая абелева нециклическая подгруппа, то $F \subseteq T(C)$, что невозможно. Значит, $A_1 \subseteq N_G^A$ и $A_1 \subseteq C_1$, что противоречит выбору элемента *x*.

Если подгруппа $\langle x, A \rangle$ смешанная, то $\langle x, A \rangle = \langle b^{2k} \rangle \times A_2$, где $|b^{2k}| \leq 4$, $A_2 \neq A$ и $x = b^{2k} x_1$, $x_1 \in A_2$, $x_1 \notin C_1$. Подгруппы A_2 и $\langle x_1, b^2 \rangle$ являются N_G^A–нормальными и $A_2 \cap \langle x_1, b^2 \rangle = \langle x_1 \rangle$ также N_G^A–нормальна. Снова получаем, что $b^{-1}x_1b = x_1^{-1}$ и подгруппа $G_2 = A_2\lambda\langle b\rangle$ является $\overline{HA}$-группой, причем подгруппа A_2 2-полная. По аналогии с рассуждениями предыдущего абзаца доказывается, что $A_2 \subseteq C_1$, что противоречит выбору элемента x.

Таким образом, $C = A\times\langle b^2\rangle$, $G = N_G^A$ и группа G удовлетворяет условиям теоремы.

3. $N_G^A = A\lambda\langle b\rangle$, где A – группа, изоморфная аддитивной группе p-ичных дробей ($p \neq 2$), $|b| = 2p$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.

Так как $(\langle A, b^2\rangle)^p = A^p = A$, то подгруппа A характеристическая в нормальной подгруппе N_G^A и поэтому $A \lhd G$. Обозначим $C = C_G(A) \lhd G$. По лемме 2 фактор-группа C/A локально конечна, а фактор-группа $C/T(C)$ абелева без кручения ранга 1.

Аналогично рассуждениям пункта 4 теоремы 4 и предыдущего пункта доказывается, что $T(C) = \langle b^2\rangle$ и $C = A\times\langle b^2\rangle$. Поэтому $G = N_G^A$ и группа G удовлетворяет условиям теоремы. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть G - непериодическая локально разрешимая группа и её норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп является неабелевой группой без кручения. Тогда $G = N_G^A$.*

Доказательство. По условию норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп $N_G^A = A\lambda\langle b\rangle$, где A – группа, изоморфная аддитивной группе p-ичных дробей, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^m$, $m = \pm p^n$, $n \geq 1$ для любого элемента $a \in A$.

Поскольку подгруппа A p-делимая, то $(N_G^A)' = A \lhd G$. Обозначим $C_G(A) = C \lhd G$. Фактор-группа G/C изоморфна подгруппе мультипликативной группы рациональных чисел, причем $b^k \notin C$ для любого натурального числа k.

Покажем, что централизатор C является группой без кручения. Допустим, что подгруппа C смешанная. Тогда C содержит подгруппу простого порядка $\langle d\rangle$. Подгруппа $\langle d, A\rangle$ является N_G^A–нормальной и $\langle d\rangle$ также N_G^A-нормальна как периодическая часть подгруппы $\langle d, A\rangle$. Тогда подгруппа $\langle d\rangle\times N_G^A$ является $\overline{HA}$–группой, что противоречит строению $\overline{HA}$–групп. Значит, централизатор C является группой без кручения.

По лемме 2 фактор-группа C/A локально конечна и фактор-группа $C/T(C)$ абелева группа без кручения ранга 1. Поскольку $T(C) = E$, то централизатор C является абелевой группой без кручения ранга 1.

Покажем, что фактор-группа G/C циклическая. Допустим, что она содержит подгруппу $G_1/C = \langle xC\rangle\times\langle yC\rangle$, где $|yC| = \infty$. Тогда $|xC| = \infty$ или $|xC| = 2$.

Если $|xC|=2$, то $x^2\in C$. Если $|x|<\infty$, то $|x|=2$, поскольку C группа без кручения. Если $|x|=\infty$ и $x^2\in C$, то существуют такие элементы $c,c_1\in C$, что $x^{-1}cx=c_1$, $c_1\neq c$. Но $x^{2k}=c^l$ для некоторых целых чисел k и l. Тогда $x^{-1}c^l x=c_1{}^l=c^l$ и потому $c_1=c$, что невозможно ввиду выбора элемента c. Таким образом, из условия $|xC|=2$ получаем $|x|=2$ и $x^{-1}cx=c^{-1}$ для произвольного элемента $c\in C$.

Поскольку $[c_1,x]\cdot[c_2,x]=[c_1c_2,x]$ для произвольных элементов $c_1,c_2\in C$, то множество элементов вида $[c,x]$, $c\in C$ образуют подгруппу C_1 группы C, которая является гомоморфным образом последней при отображении $c\to[c,x]$. Если ядро этого гомоморфизма не равно единичной подгруппе, то $C_1=E$. Но тогда $C\langle x\rangle$ – абелева группа, что невозможно по условию. Таким образом, ядро гомоморфизма равно E и $C_1\cong C$. Отсюда следует, что C_1 имеет конечный индекс в C и $C_1\lhd G$.

Обозначим C_2/C_1 централизатор подгруппы C/C_1 в группе G_1/C_1. Поскольку $[c,x]\in C_1$, то $x\in C_2$. Из изоморфизма

$$C_2/C\cong(C_2/C_1)/(C/C_1)$$

следует, что группа C_2/C_1 метабелева и $C_2/C=\langle xC\rangle\times\langle y^nC\rangle$, причем $n\neq 0$, так как в противном случае подгруппа C_2 будет иметь бесконечный индекс в G_1, поскольку $G_1/C_2\cong(G_1/C_1)/(C_2/C_1)$ – конечная группа. Дальше получаем $[xC_1,y^nC_1]\in C/C_1$, $[xC_1,y^nC_1]^k\in C_1$ для некоторого натурального k.

Отсюда и из метабелевости группы C_2/C_1 следует, что

$$[xC_1,y^nC_1]^k=[xC_1,y^{nk}C_1]=C_1,$$

то есть $[x,y^{nk}]\in C_1$. Тогда $[x,y^{nk}]=[c,x]$ для некоторого $c\in C$. Но

$$[x,y^{nk}c]=[x,c]\cdot c^{-1}\cdot[x,y^{nk}]\cdot c=[x,c]\cdot[x,y^{nk}]=1.$$

Кроме того, $\langle x\rangle\cap\langle y^{nk}c\rangle=E$, $|y^{nk}c|=\infty$. Поэтому G содержит свободную абелеву подгруппу ранга 2, что невозможно. Таким, образом, фактор-группа G/C циклическая.

Пусть $C\neq A$. Поскольку C является группой без кручения, а фактор-группа C/A локально конечна, то существует элемент $f\in C\setminus A$, $|f|=\infty$ и $f^k=a^l$ для некоторых натуральных чисел k и l. Подгруппа $\langle f,A\rangle$ является N_G^A-нормальной. Тогда $b^{-1}fb=f^\alpha a^\beta$, $a\in A$. Далее

$$b^{-1}f^k b=(f^\alpha a^\beta)^k=f^{\alpha k}a^{\beta k}.$$

С другой стороны,

$$b^{-1}f^k b=b^{-1}a^l b=a^{lm}=f^{km},$$

$$f^{\alpha k}a^{\beta k}=f^{km},\ a^{\beta k}=(f^{-\alpha}f^m)^k,\ a^\beta=f^{-\alpha}f^m.$$

Тогда

$$b^{-1}fb = f^{\alpha} f^{-\alpha} f^{m} = f^{m}$$

и G является $\overline{HA}$–группой, $G = N_G^A$, что противоречит выбору элемента f. Таким образом, $C = A$ и группа G удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие 7. *Если G – непериодическая локально разрешимая группа, норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп которой недедекиндова и не IH -группа, то* $1 \le \left[G : N_G^A\right] < \infty$.

Следующие примеры показывают, что в следствии 7 условие недедекиндовости нормы N_G^A является существенным.

Пример 1. $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times C$, где $|a| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, C – абелева группа, отличная от единичной. В этой группе $N_G^A = C$ и $\left[G : N_G^A\right] = \infty$.

Пример 2. $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times H$, где $|a| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, H – гамильтонова группа. В этой группе $N_G^A = H$ и $\left[G : N_G^A\right] = \infty$.

Библиографические ссылки

1. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384с.
2. **Лиман Ф.М.** Групи з обмеженнями на нормалізатори різних систем підгруп // Деп. в ДНТБ України 24.11.97, №577. – Ук.97. – 293с.
3. **Семко М.М.** Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285с.
4. **Baer R.** Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe/ Baer R. // Comp. Math. – 1934. –1.- S. 254 – 283.
5. **Schenkman E.** On Norm of a Group/ Schenkman E. // Ill. J. Math. - 1960. – 4.- S.150-152.
6. **Wos L.** On commutative prime power subgroups of the norm/ Wos L. // Ill. J. Math. - 1958. –2.- S.271-284.
7. **Beidleman J.C.** Centre and norm/ Beidleman J.C., Heineken H., Newell M. // Bull. Austral. Math. Soc. – 2004. - 69. – P.457-464.
8. **Wang J.** On the norm of finite groups/ Wang J., Guo X. // Algebra Colloquium. – 2007. – 14,4. – P. 605-612.
9. **Лукашова Т.Д.** Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних *p*-груп/ Лукашова Т.Д. // Вісник Київського університету, серія „Фіз.-мат. науки”. – 2004. - №3. - С. 35-39.
10. **Лиман Ф.Н.** Непериодические группы с некоторыми системами нормальных подгрупп/Лиман Ф.Н. // Алгебра и логика. – 1968. - т. 7 - № 4.- С.70-86.
11. **Друшляк М.Г.** Про норму абелевих нециклічних підгруп у неперіодичних групах/ Друшляк М.Г. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – 1. – С. 14-18.

Надійшла до редколегії .10