

# Про норму циклічних підгруп непростих порядків у неперіодичних групах

Лукашова Т.Д., Друшляк М.Г.

*Вивчаються неперіодичні групи, що мають недедекіндову норму циклічних підгруп непростих порядків. Встановлено, що такі групи є майже дедекіндовими і збігаються з вказаною нормою.*

*Non-periodic groups, which norm of cyclic subgroups of non-prime order is non-Dedekind, are studied. Such groups are almost Dedekind and coincide with given norm.*

У сучасній теорії груп важливе місце займають результати, пов'язані з вивченням груп залежно від властивостей різних систем їх підгруп. До цього напрямку відносяться також дослідження, в яких обмеження накладаються не власне на підгрупи, а на відповідні норми.  $\Sigma$ -нормою прийнято називати максимальну підгрупу, що нормалізує кожну підгрупу системи  $\Sigma \neq \emptyset$  всіх підгруп групи  $G$  з певною теоретико-груповою властивістю.

Поштовхом до розв'язування цієї проблеми стала низка досліджень щодо вивчення будови груп, які збігаються зі своїми  $\Sigma$ -нормами для заданої системи підгруп  $\Sigma$ , тобто груп, в яких кожна підгрупа системи  $\Sigma$  є інваріантною.

Уперше ситуацію, коли  $\Sigma$ -норма є власною підгрупою групи, було розглянуто Р.Бером [1] для системи  $\Sigma$ , що складалася з усіх підгруп даної групи. Ці дослідження було продовжено у роботах [2 - 12] для різних систем підгруп  $\Sigma$  та при різних обмеженнях, що накладалися на відповідні  $\Sigma$ -норми.

Авторами продовжується вивчення властивостей груп за заданими властивостями їх  $\Sigma$ -норм і розглядаються неперіодичні групи, в яких норма циклічних підгруп непростих порядків є недедекіндовою.

Нормою циклічних підгруп непростих порядків групи  $G$  будемо називати перетин нормалізаторів усіх циклічних підгруп групи  $G$ , що мають складений або нескінченний порядок, та позначатимемо її  $N_G(C_{\bar{p}})$ .

Зрозуміло, що в неперіодичній групі  $G$ , яка збігається зі своєю нормою  $N_G(C_{\bar{p}})$ , інваріантними є всі циклічні підгрупи складеного чи нескінченного порядку. Такі групи за умови їх недедекіндовості вивчалися в [13] і були названі майже дедекіндовими групами. Будову неперіодичних майже дедекіндових груп описує наступне твердження.

**Твердження 1.** ([13]) *Неперіодична група  $G$  є майже дедекіндовою тоді і тільки тоді, коли  $G = C\lambda\langle b \rangle$ , де  $C$  - неперіодична абелева група,  $|b| = 2$ ,  $b^{-1}cb = c^{-1}$  для будь-якого елемента  $c \in C$ .*

Безпосередньо з твердження 1 випливає, що в довільній неперіодичній групі без інволюцій норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  абелева.

Оскільки норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  неперіодичної групи нормалізує кожну нескінченну циклічну підгрупу групи  $G$ , то  $N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_G(C_{\infty})$ , де  $N_G(C_{\infty})$  - норма нескінченних циклічних підгруп групи (див. [9]). Окрім того, в групах без скруту  $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_{\infty})$ , тому, враховуючи результати роботи [9], встановлені для норми  $N_G(C_{\infty})$ , мають місце твердження.

**Теорема 1.** Якщо  $G$  - група без скруту, то її норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  є центральною підгрупою і збігається з нормою  $N_G(C_{\infty})$ .

**Доведення.** Нехай  $G$  - група без скруту, тоді вона не містить циклічних підгруп складеного порядку, а значить  $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_{\infty})$ . За теоремою 1 [9]  $N_G(C_{\infty}) = Z(G)$ . Отже, й  $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$ . Теорему доведено.

**Наслідок 1.** Довільна група  $G$  без скруту, що є скінченним розширенням норми  $N_G(C_{\bar{p}})$ , абелева.

**Доведення.** Нехай  $[G : N_G(C_{\bar{p}})] < \infty$ . Тоді  $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$ ,  $[G : Z(G)] < \infty$  і за лемою Шура  $|G'| < \infty$ . Оскільки  $G$  - група без скруту, це можливо лише за умови  $G' = E$ . Отже, група  $G$  абелева.

Перейдемо до вивчення мішаних неперіодичних груп. Наступні приклади підтверджують, що норма  $N_G(C_{\bar{p}})$ , яка є власною підгрупою мішаної неперіодичної групи  $G$ , може як співпадати з нормою  $N_G(C_{\infty})$ , так і бути відмінною від неї.

**Приклад 1.**  $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$ ,  $|a| = |b| = \infty$ ,  $|c| = 3$ ,  $c^{-1}ac = b$ ,  $c^{-1}bc = a^{-1}b^{-1}$ .

У цій групі і  $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_{\infty}) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$  і  $N_G(C_{\bar{p}})$  породжується всіма елементами нескінченного порядку групи.

**Приклад 2.**  $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$ ,  $|a| = |b| = \infty$ ,  $|c| = 6$ ,  $c^{-1}ac = ab$ ,  $c^{-1}bc = a^{-1}$ .

У цьому випадку  $N_G(C_{\infty}) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c^3 \rangle$ , а  $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G) = E$ . Отже,  $N_G(C_{\bar{p}}) \neq N_G(C_{\infty})$ .

**Лема 1.** Якщо центр  $Z(G)$  неперіодичної групи  $G$  містить елементи нескінченного порядку, то норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  абелева і збігається з центром  $Z(G)$ .

**Доведення.** Нехай у центрі  $Z(G)$  групи міститься елемент нескінченного порядку. Тоді за лемою 2 роботи [9] норма  $N_G(C_{\infty})$  нескінченних циклічних підгруп групи  $G$  абелева і збігається з центром групи. Враховуючи включення  $N_G(C_{\infty}) \supseteq N_G(C_{\bar{p}})$ , одержимо, що  $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$ . Лему доведено.

**Наслідок 2.** Будь-яка неперіодична група  $G$ , що є скінченним розширенням центра  $Z(G)$ , має абелеву норму  $N_G(C_{\bar{p}})$ .

**Лема 2.** Якщо норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  неперіодичної групи  $G$  не містить елементів нескінченного порядку, то вона абелева.

**Доведення.** Нехай норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  періодична. Тоді для довільного елемента  $x \in G$  нескінченного порядку  $\langle x \rangle \cap N_G(C_{\bar{p}}) = E$ . Оскільки у групі  $G_1 = \langle x \rangle N_G(C_{\bar{p}})$  підгрупи  $\langle x \rangle$  та  $N_G(C_{\bar{p}})$  є інваріантними, то  $G_1 = \langle x \rangle \times N_G(C_{\bar{p}})$  і  $x \in Z(G_1)$ . За лемою 1 норма  $N_{G_1}(C_{\bar{p}})$  групи  $G_1$  абелева, отже й норма  $N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_{G_1}(C_{\bar{p}})$  також буде абелевою. Лему доведено.

**Наслідок 3.** Якщо  $G$  - мішана неперіодична група, то її норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  циклічних підгруп простих порядків є або абелевою (періодичною чи неперіодичною), або неперіодичною неабелевою групою.

**Лема 3.** Якщо центр  $Z(G)$  неперіодичної групи  $G$  містить елементи складеного порядку, то її норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  абелева.

**Доведення.** Враховуючи лему 2, достатньо розглянути випадок, коли норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  неперіодична.

Припустимо, що підгрупа  $N_G(C_{\bar{p}})$  неабелева. Тоді  $N_G(C_{\bar{p}})$  - неперіодична майже дедекіндова група (див. твердження 1). Оскільки центр такої групи не містить елементів складеного порядку, припущення невірне і норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  абелева. Лему доведено.

**Наслідок 4.** Якщо в неперіодичній групі  $G$  існує така циклічна підгрупа  $\langle x \rangle$  нескінченного чи складеного порядку, що  $\langle x \rangle \cap N_G(C_{\bar{p}}) = E$ , то норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  абелева.

**Доведення.** Нехай підгрупа  $\langle x \rangle$  задовольняє умови наслідку. Тоді підгрупи  $\langle x \rangle$  та  $N_G(C_{\bar{p}})$  є інваріантними в групі  $G_1 = \langle x \rangle N_G(C_{\bar{p}}) = \langle x \rangle \times N_G(C_{\bar{p}})$  і  $x \in Z(G_1)$ . За лемами 1 та 3 норма  $N_{G_1}(C_{\bar{p}})$  групи  $G_1$  абелева, тому абелевою буде й норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  групи  $G$ .

**Наслідок 5.** У неперіодичній групі  $G$  з неабелевою нормою  $N_G(C_{\bar{p}})$ , довільна циклічна підгрупа  $\langle x \rangle$  нескінченного чи складеного порядку має неединичний перетин з нормою  $N_G(C_{\bar{p}})$ .

Далі будемо розглядати лише мішані неперіодичні групи, в яких норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  неабелева, тобто є неперіодичною майже дедекіндовою групою. За твердженням 1  $N_G(C_{\bar{p}}) = C\lambda\langle b \rangle$ , де  $C$  - неперіодична абелева група,  $|b| = 2$ ,  $b^{-1}cb = c^{-1}$  для будь-якого елемента  $c \in C$ .

Позначимо  $A$  - підгрупу, породжену всіма елементами нескінченного порядку групи  $G$ .

**Лема 4.** Якщо неперіодична група  $G$  має неабелеву норму  $N_G(C_{\bar{p}})$ , то підгрупа  $A$ , породжена всіма елементами нескінченного порядку групи  $G$ , абелева і містить усі елементи складеного порядку даної групи.

**Доведення.** Доведемо спочатку, що  $C \subseteq Z(A)$ . Візьмемо довільні елементи  $c \in C$  та  $a \in A$  такі, що  $[c, a] \neq 1$ . Без порушень загальності можна вважати  $|a| = |c| = \infty$ . Оскільки  $\langle a \rangle \triangleleft G_1 = \langle a \rangle N_G(C_{\bar{p}})$ , то  $c^{-1}ac = a^{-1}$ , звідки  $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = E$ . Отже,  $[c^2, a] = 1$ ,  $|c^2a| = \infty$  і  $\langle c^2a \rangle$  є  $c$ -інваріантною підгрупою. Але тоді  $c^{-1}(c^2a)c = c^{-2}a^{-1} = c^2a^{-1}$  і  $c^4 = 1$ , всупереч вибору елемента  $c$ . Отже,  $C \subseteq Z(A)$ .

Покажемо, що підгрупа  $A$  містить також всі елементи складеного порядку групи  $G$ . Нехай  $y \in G$  - довільний елемент складеного порядку. Тоді  $\langle y \rangle \triangleleft G_1 = \langle y \rangle N_G(C_{\bar{p}})$  і  $[G_1 : C_{G_1}(y)] < \infty$ . Отже, знайдеться елемент  $c \in C$ ,  $|c| = \infty$  такий, що  $[c, y] = 1$ . Тоді  $|cy| = \infty$ ,  $cy \in A$  і  $y \in A$ , що й треба було довести.

З'ясуємо тепер, як діє елемент  $b$  на елементи підгрупи  $A$ . Для будь-якого елемента  $a \in A$ ,  $|a| = \infty$  маємо  $\langle a \rangle \triangleleft G_1 = \langle a \rangle N_G(C_{\bar{p}})$ . Тому якщо  $[a, b] = 1$ , то  $|ba| = \infty$ , звідки  $ba \in A$  і за доведеним  $[c, ab] = 1$  для довільного елемента  $c \in C$ ,  $|c| = \infty$ , що неможливо. Отже,  $b^{-1}ab = a^{-1}$ , де  $a \in A$  - довільний елемент нескінченного порядку.

Нехай тепер  $a$  - елемент скінченного порядку з  $A$ . Тоді  $|ca| = \infty$ , де  $c \in C$ ,  $|c| = \infty$  і  $b^{-1}(ca)b = (ca)^{-1} = c^{-1}a^{-1} = c^{-1}b^{-1}ab$ , тобто і в цьому випадку  $b^{-1}ab = a^{-1}$ .

Позначимо  $x$  та  $y$  - довільні елементи групи  $A$  такі, що  $[x, y] \neq 1$ . Тоді  $b^{-1}(xy)b = y^{-1}x^{-1} = b^{-1}xb^{-1}yb = x^{-1}y^{-1}$ , звідки  $[x, y] = 1$ , всупереч їх вибору. Таким чином, підгрупа  $A$  абелева.

**Теорема 2.** Неперіодична група  $G$  має неабелеву норму  $N_G(C_{\bar{p}})$  циклічних підгруп простих порядків тоді і тільки тоді, коли всі елементи нескінченного порядку групи породжують інваріантну абелеву підгрупу  $A$ , яка містить усі елементи простих порядків групи  $G$ , і існує елемент  $b$  порядку 2 такий, що  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для довільного елемента  $a \in A$ . При цьому  $N_G(C_{\bar{p}}) = A\lambda\langle b \rangle$ .

**Доведення.** Достатність умов теореми очевидна. Їх необхідність випливає з доведення леми 4.

**Наслідок 6.** Якщо норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  неперіодичної групи  $G$  неабелева, то факторгрупа  $G/N_G(C_{\bar{p}})$  періодична і не містить елементів непростих порядків.

**Наслідок 7.** Якщо в неперіодичній групі  $G$  норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  неабелева і існує нескінченна циклічна підгрупа  $\langle x \rangle$ , інваріантна в  $G$ , то  $N_G(C_{\bar{p}}) = G$ .

**Доведення.** За умовою  $N_G(C_{\bar{p}}) = A\lambda\langle b \rangle$ , де  $A$  - неперіодична абелева група,  $|b| = 2$  і  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для довільного елемента  $a \in A$  і  $\langle x \rangle \triangleleft G$ ,  $|x| = \infty$ . Тоді за теоремою 2,  $x \in A$ ,  $b^{-1}xb = x^{-1}$ ,  $[G : C_G(\langle x \rangle)] = 2$  і  $G = C_G(\langle x \rangle)\lambda\langle b \rangle$ .

Нехай  $y$  - довільний елемент непростого порядку з  $C_G(\langle x \rangle)$ . Тоді за лемою 4  $y \in A$ . Якщо ж  $y \in C_G(\langle x \rangle)$ ,  $|y| = p$ , де  $p$  - просте число, то враховуючи, що  $[x, y] = 1$ , одержимо  $|xy| = \infty$ . Отже,  $xy \in A$  і  $y \in A$ . Таким чином,  $C_G(\langle x \rangle) = A$  і  $N_G(C_{\bar{p}}) = G$ , що й треба було довести.

**Теорема 3.** Будь-яка неперіодична група  $G$ , що має неабелеву норму  $N_G(C_{\bar{p}})$  циклічних підгруп непростих порядків, є майже дедекіндовою групою і збігається з нормою  $N_G(C_{\bar{p}})$ .

**Доведення.** Нехай норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  циклічних підгруп непростих порядків неперіодичної групи  $G$  неабелева. Тоді  $N_G(C_{\bar{p}}) = A\lambda\langle b \rangle$ , причому за теоремою 2 підгрупа  $A$  містить усі елементи нескінченного та складеного порядку групи  $G$ ,  $|b| = 2$  і  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для будь-якого елемента  $a \in A$ .

Припустимо, що  $N_G(C_{\bar{p}}) \neq G$  і  $x$  - довільний елемент групи  $G$ , що не належить нормі  $N_G(C_{\bar{p}})$ . Тоді  $|x| = p$ , де  $p$  - деяке просте число.

Нехай  $p \neq 2$ . У фактор-групі  $\bar{G} = G/A$ ,  $|\bar{b}| = 2$ ,  $\bar{b} \in Z(\bar{G})$  і тому елемент  $\bar{x}\bar{b}$  матиме порядок, рівний  $2p$ . З цього випливає, що  $xb$  також є елементом непростого порядку. За теоремою 2  $xb \in N_G(C_{\bar{p}})$ , звідки  $x \in N_G(C_{\bar{p}})$ , що суперечить його вибору.

Нехай тепер  $p = 2$ , тобто  $|x| = 2$ . Тоді  $|xb| = 2$  і  $[x, b] = 1$ . За лемою 4 для довільного елемента  $a \in A$ ,  $|a| = \infty$ ,  $[x, a] \neq 1$ . Тому, враховуючи умови  $A \triangleleft G$  та  $[A, \langle x \rangle] \subseteq A$ , покладемо  $x^{-1}ax = ac$ ,  $c \in A$ . Оскільки  $|x| = 2$ , то  $[x^2, a] = 1$ ,  $a = x^{-2}ax^2 = acx^{-1}cx$  і  $x^{-1}cx = c^{-1}$ . Якщо  $|c| > 2$ , то  $[xb, c] = 1$ ,  $|xbc| > 2$  і за лемою 4  $xbc \in A$ , звідки  $x \in N_G(C_{\bar{p}})$ , що неможливо. Отже,  $|c| = 2$ . Але тоді  $[a^2, x] = 1$ ,  $|a^2x| = \infty$  і знову  $a^2x \in A$ ,  $x \in A$ . Отже, припущення невірне,  $G = N_G(C_{\bar{p}})$  і теорему доведено.

**Наслідок 8.** Якщо норма  $N_G(C_{\bar{p}})$  циклічних підгруп непростих порядків неперіодичної групи  $G$  неабелева, то вона збігається з нормою  $N_G(C_{\infty})$  нескінченних циклічних підгруп цієї групи.

## Література

- [1 ] Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. - 1934. -1.- S. 254 - 283.
- [2 ] Kappe W. Die A-Norm einer Gruppe//Ill. J. Math. - 1961. - 5, №2. - S. 187 -197.
- [3 ] Wielandt H. Uber der Normalisator der Subnormalen Untergruppen // Mat. Z. - 1958. - 69, №5. - S. 463-465.
- [4 ] Лиман Ф.Н. О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс // Укр. мат. журн. - 1997.- 49, №5. - С. 678 - 684.

- [5 ] Лукашова Т.Д. Локально скінченні  $p$ -групи ( $p \neq 2$ ) з неабелевою нормою нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія фіз-мат. науки. -2001.- №1. - С. 43-53.
- [6 ] Лукашова Т.Д. Про нециклічну норму нескінченних локально скінченних груп // Укр. мат. журн. - 2002. - 54, №3. - С.342-348.
- [7 ] Лукашова Т.Д. Конечные 2-группы с недедекиндовой нормой нециклических подгрупп // Известия Гомельского гос-го ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. - 2001. -№3(6). - С. 139-150.
- [8 ] Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про норму нескінченних абелевих підгруп неперіодичних груп // Матеріали III Міжнар. алгебр. конф. в Україні, Суми, 2-8 липня 2001 р. - Суми: Сумський держав. пед. ун-т ім. А.С. Макаренка. - 2001.- С.205-207.
- [9 ] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. О норме бесконечных циклических подгрупп неперіодических групп // Вестник ВГУ имени П.М.Машерова. - Витебск. - 2006. - №4. - С. 108-111.
- [10 ] Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп // Укр. мат. журн. - 2001. - 53, №5. - С. 625-630.
- [11 ] Лукашова Т.Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних  $p$ -груп // Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки". - 2004. - №3. - С. 35-39.
- [12 ] Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки". - 2005. - №1. - С.56-64.
- [13 ] Лелеченко Т.Г., Лиман Ф.Н. Группы с инвариантными максимальными абелевыми подгруппами ранга 1 непростых порядков // Подгрупповая характеристика групп. - К.: Институт математики. - 1982. - С.85-92.