

Ф. М. Лиман
Т. Д. Лукашова
М. Г. Друшляк

Узагальнені норми груп

УДК 512.542/.544
Л58

*Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради
Сумського державного педагогічного університету
імені А. С. Макаренка
(протокол № 11 від 20 червня 2019 р.)*

Рецензенти

Курдаченко Л. А., доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

Семко М. М., доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри вищої математики Національного університету державної фіскальної служби України

Лиман Ф. М., Лукашова Т. Д., Друшляк М. Г.

Л58 Узагальнені норми груп: монографія / Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова, М. Г. Друшляк. — Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2019. — 316 с.

У монографії досліджуються групи залежно від властивостей їх узагальнених норм.

Для фахівців у галузі алгебри та студентів математичних спеціальностей.
Бібліогр.: 160 назв.

ISBN 978-966-698-276-9

© Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова, М. Г. Друшляк, 2019

ЗМІСТ

Передмова	5
Вступ	6
1 Нескінченні групи із заданими властивостями Σ-норм деяких систем нескінченних підгруп	29
1.1 Неперіодичні групи із заданими властивостями норми нескінченних циклічних підгруп	29
1.2 Неперіодичні групи із заданими властивостями норми нескінченних абелевих підгруп	35
1.3 Нескінченні локально скінченні групи із заданими властивостями норми нескінченних абелевих підгруп	39
1.4 Неперіодичні групи із заданими властивостями норми нескінченних підгруп	43
1.5 Нескінченні локально скінченні групи із заданими властивостями норми нескінченних підгруп	46
1.6 Неперіодичні групи з неабелевою нормою циклічних підгруп непростих порядків	51
2 Групи з обмеженнями на норму нециклічних підгруп	57
2.1 Деякі допоміжні результати	57
2.2 Нескінченні групи, нециклічна норма яких має скінченний індекс у групі	62
2.3 Локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп	72
2.4 Локально скінченні 2-групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп	84
2.5 Непримарні локально скінченні групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп	114

2.6	Неперіодичні майже локально розв'язні групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп	147
3	Групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп	155
3.1	Деякі допоміжні результати	155
3.2	Локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою абелевих нециклічних підгруп	159
3.3	Нескінченні локально скінченні 2-групи, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова	173
3.4	Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп	181
3.5	Скінченні 2-групи з циклічним центром і недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп	196
3.6	Періодичні непримарні локально скінченні групи з локально нільпотентною недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп	219
3.7	Неперіодичні групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп	228
4	Групи з обмеженнями на норму розкладних підгруп групи	253
4.1	Деякі допоміжні результати	253
4.2	Про взаємозв'язки між нормами абелевих нециклічних та розкладних підгруп у локально скінчених групах	256
4.3	Локально нільпотентні періодичні групи з недедекіндовою нормою розкладних підгруп	264
4.4	Нескінченні локально скінченні групи з локально нільпотентною недедекіндовою нормою розкладних підгруп	267
4.5	Властивості неперіодичних груп, в яких норма розкладних підгруп недедекіндова	272
4.6	Про неперіодичні групи, в яких норма розкладних підгруп є недедекіндовою локально нільпотентною групою	277
4.7	Про взаємозв'язки між нормами абелевих нециклічних та розкладних підгруп у неперіодичних локально розв'язних групах	292
	Перелік основних позначень	298
	ЛІТЕРАТУРА	303

ПЕРЕДМОВА

У теорії груп особливе місце займають результати, що стосуються вивчення груп за властивостями заданих систем їх підгруп. До цього напрямку можна віднести й дослідження груп за властивостями різноманітних характеристичних підгруп групи (її центра, комутанта тощо). Список таких характеристичних підгруп значною мірою може бути поповнений за рахунок так званих Σ -норм групи (де Σ – система усіх підгруп групи з певною теоретико-груповою властивістю).

У багатьох випадках вплив обмежень, яким задовольняють Σ -норми, на властивості групи є настільки сильним, що дозволяє конструктивно описати будову групи. Тому, починаючи з 30-х років XX століття, інтерес до вивчення Σ -норм групи для різних систем підгруп Σ та впливу цих норм на властивості групи невинно зростає. Дослідженню груп за властивостями їх Σ -норм для деяких систем нескінченних, нециклічних та розкладних підгруп присвячено й дану монографію.

Автори висловлюють щире подяку рецензентам і всім, хто підтримував їх упродовж багатьох років роботи над монографією і сподіваються, що монографія буде з увагою сприйнята спеціалістами з теорії груп як за новизною одержаних результатів, так і за перспективою їх узагальнень.

Суми, травень 2019 року

Ф. М. Лиман

Т. Д. Лукашова

М. Г. Друшляк

ВСТУП

У теорії груп особливе місце займають результати, що стосуються вивчення характеристичних підгруп (зокрема, центра, комутанта, підгрупи Фратіні тощо), а також впливу властивостей цих підгруп на структуру самої групи. У наш час список таких характеристичних підгруп у значній мірі може бути поповнений за рахунок різноманітних Σ -норм групи.

Нехай Σ — система усіх підгруп групи, що мають певну теоретико-групову властивість. Наприклад, Σ може складатися з усіх підгруп групи, усіх циклічних (нециклічних), усіх абелевих (неабелевих), усіх субнормальних, усіх максимальних, усіх нескінченних підгруп групи тощо.

Σ -нормою групи G назвемо перетин нормалізаторів усіх підгруп групи, що належать системі Σ та позначимо її $N_\Sigma(G)$. У випадку $\Sigma = \emptyset$ будемо вважати, що $G = N_\Sigma(G)$.

З означення Σ -норми випливає, що вона є характеристичною підгрупою групи та містить центр групи. Окрім того, $N_\Sigma(G)$ є максимальною підгрупою групи, що нормалізує усі Σ -підгрупи групи. Тому усі підгрупи Σ -норми, що належать системі Σ , є нормальними в $N_\Sigma(G)$ (хоча таких підгруп може й не бути).

При розгляді Σ -норм постає ряд питань, пов'язаних із дослідженням властивостей групи при заданій системі підгруп Σ та певних обмеженнях, яким задовольняє Σ -норма. Конкретні задачі такого роду розв'язувались багатьма алгебраїстами в залежності від вибору системи Σ та властивостей самої Σ -норми.

Знаючи будову Σ -норми, природу її вкладення у групу, у багатьох випадках можна охарактеризувати властивості самої групи. Наприклад, якщо Σ -норма збігається з групою і $\Sigma \neq \emptyset$, то у групі нормальними є усі підгрупи з системи Σ . Уперше неабелеві групи з такою властивістю були розглянуті наприкінці XIX століття Р. Дедекіндом [35], який дав повний опис скінченних неабелевих груп, усі підгрупи яких нормальні, і назвав їх гамільтоновими групами. Нескінченні гамільтонові групи були описані у 1933 році Р. Бером [11]. Об'єднання множин абелевих і гамільтонових груп у наш час називають множиною дедекіндових груп.

Проте, дослідження груп з іншими системами Σ нормальних підгруп були продовжені лише у другій половині ХХ століття, що певним чином пригальмувало вивчення самих Σ -норм. До таких досліджень відносяться, перш за все, дослідження С. М. Чернікова та його учнів (див., наприклад, [109, 111–118, 120, 137, 138, 140, 140, 141, 152–155]). Отже, у наш час для багатьох систем підгруп Σ будова груп, що збігаються з нормою $N_{\Sigma}(G)$, відома. Тому природно постає питання про вивчення властивостей груп, у яких Σ -норма є власною підгрупою.

Уперше задача дослідження властивостей груп, що мають Σ -норму, відмінну від самої групи, була сформульована Р. Бером ще у 30-х роках минулого століття. У роботі [3] він увів до розгляду підгрупу $N(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх підгруп групи і назвав її *нормою групи G* . Зрозуміло, що норма $N(G)$ є Σ -нормою групи для системи Σ , що складається з усіх підгруп групи. Норма $N(G)$ міститься в усіх інших Σ -нормах, а їх у свою чергу можна вважати її узагальненнями. Зрозуміло також, що дедекіндові групи збігаються зі своїми нормами, тому індекс норми у групі може слугувати певною "мірою" дедекіндовості групи.

Норма групи вивчалась як самим Р. Бером [2–12], так і рядом інших авторів [14, 18, 22–26, 39, 77–79, 86, 91, 93, 97]. У свій час Р. Бером було помічено, що обмеження, які накладаються на норму групи, певним чином впливають і на будову самої групи. Зокрема, було встановлено, що за умови гамільтоновості норми $N(G)$, група G є періодичною й не містить елементів, порядок яких ділиться на 8. Окрім того, усі елементи групи G , що мають порядок кратний 4, можна подати у вигляді za , $a \in N(G)$, $|a| = 4$, $z \in C_G(N(G))$, а будь-який елемент, порядок якого не ділиться на 4, міститься у централізаторі $C_G(N(G))$ норми групи.

Вивчаючи зв'язки між нормою та центром групи, Р. Бер показав, що норма збігається з центром групи, якщо вона містить елементи нескінченного порядку. [10] було встановлено ще один важливий результат, який характеризує взаємозв'язки центра групи та її норми: в групах без центру норма $N(G)$ є одиничною підгрупою і навпаки.

Продовжуючи вивчення властивостей норми групи, Л. Уосом [97] було встановлено, що норма $N(G)$ міститься в третьому гіперцентрі групи, а група автоморфізмів, яку індукує G на підгрупі $N(G)$, нільпотентна класу не вище 2. Окрім того, у [97] було доведено, що норма групи міститься в другому гіперцентрі тоді і тільки тоді, коли група автоморфізмів, індукованих на $N(G)$ групою G , комутативна. Цей результат було суттєво уточнено Е. Шенкманом, який у роботі [79] довів, що норма $N(G)$ групи G міститься у другому гіперцентрі G , а комутант групи є підгрупою централізатора норми $N(G)$ у G . Отже, група автоморфізмів, яку індукує G на $N(G)$, завжди абелева.

У роботах [7, 8] досліджувалися властивості періодичних груп, що мають абелеву фактор-групу за нормою $N(G)$. Зокрема, у [8] було встановлено, що p -група ($p > 3$), яка має абелеву фактор-групу за нормою $N(G)$ ($N(G) \neq Z(G)$) та централізатор $C_G(N(G))$ скінченної експоненти, також є групою скінченної експоненти. У такій групі фактор-група $N(G)/Z(G)$ циклічна, а її порядок дорівнює експоненті групи автоморфізмів, яку індукує G на $N(G)$. Було наведено приклади відповідних груп (див. [7]), які підтверджують, що обмеження $p > 3$ є істотними.

Дослідження груп з абелевою фактор-групою за нормою групи було продовжено у 2016 році Дж. Ваном. У [91] було розглянуто скінченні групи, які мають циклічну фактор-групу за нормою $N(G)$. Виявилося, що в скінченній групі G фактор-група $G/N(G)$ циклічна тоді і тільки тоді, коли група G нільпотентна з циклічними факторами $P/N(P)$ по кожній силовській підгрупі P групи G . До того ж, у [7] було доведено, що періодична група G , в якій фактор-група $G/N(G)$ абелева і $N(G) \neq Z(G)$, є прямим добутком своїх примарних компонент, а її норма $N(G)$ — прямим добутком норм цих компонент.

У зв'язку з цим зауважимо, що на відміну від деяких інших характеристик підгруп (центра групи, її комутанта, підгрупи Фіттинга та інших), норма прямого добутку довільних підгруп, взагалі кажучи, не дорівнює прямому добутку норм відповідних компонент. Наприклад, у групі

$$G = Q \times B,$$

де B — неперіодична абелева група рангу 1, Q — група кватерніонів порядку 8, норма $N(G) = Q^2 \times B \neq N(Q) \times N(B) = G$. Питання знаходження норм прямих добутків груп вивчалось Дж. Еваном у [39].

В останні роки увага до вивчення норми $N(G)$ групи не зменшується, про що свідчить цілий ряд робіт [14, 18, 21–26, 39, 47, 62, 68, 77, 78, 86, 91, 93], присвячених дослідженню її властивостей. Зокрема, у роботах [25, 26] Р. Брайсом та Дж. Коссі розглядалися ряди норм

$$1 = N_0(G) \subseteq N_1(G) \subseteq \dots \subseteq N_i(G) \subseteq \dots,$$

де $N_i(G)/N_{i-1}(G) = N(G/N_{i-1}(G))$ для $i \geq 1$.

Було встановлено, що у класі 2-груп з гамільтоновості фактор-групи

$$N_{i+1}(G)/N_i(G)$$

впливає рівність $N_{i+1}(G) = G$. Більш того, скінченна 2-група, у якій фактор-група $G/N(G)$ гамільтонова, проте жоден з факторів $N_i(G)/N_{i-1}(G)$ не є гамільтоновим, має порядок 27 і визначається однозначно з точністю до ізоморфізму [26].

Починаючи від робіт Р. Бера, Л. Уоса і Е. Шенкмана, значна частина досліджень норми $N(G)$ стосувалася її зв'язків із центром групи. Зокрема, у роботі [14] Дж. Байдлеманом, Г. Хайнекенем та М. Ньюеллом було доведено, що в довільній p -групі G або фактор-група $G/Z(G)$, або група $[G, N(G)]$ є циклічними. У цій же роботі розглядалося питання впливу властивостей норми групи та її центра на сприйнятливості групи G .

Група G називається *сприйнятливою*, якщо вона є групою внутрішніх автоморфізмів деякої групи H , тобто

$$G \cong H/Z(H).$$

Групи з такою властивістю уперше почав вивчати Р. Бер у [4], де було охарактеризовано сприйнятливі скінченно породжені абелеві групи виду

$$G = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \dots \oplus Z_{n_k},$$

де $n_{i+1}:n_i$, $n_i \in N \cup \{0\}$, а $Z_{n_i} = Z$ — нескінченна циклічна група при $n_i = 0$. Виявилося, що група G є сприйнятливою тоді і тільки тоді, коли $k \geq 2$ і $n_{k-1} = n_k$. Для вказаного класу сприйнятливих груп характеристика Бера залишається єдиною повною й завершеною і до сьогодні.

Продовжуючи дослідження властивостей норми у сприйнятливих групах, у 2012 році К. Го та К. Жаном [52] було встановлено необхідні та достатні умови співпадання норми групи з її центром, а також досліджено властивості норми $N(G)$ у класі нільпотентних груп із циклічним комутантом.

У 2005 році Н. Гавіолі, Л. Легаррета, С. Сіка, М. Тота [47] розглядали зв'язки між центром $Z(G)$, нормою $N(G)$ та другим гіперцентром $Z_2(G)$ залежно від числа $v(G)$ класів спряжених ненормальних підгруп та числа $w(G)$ класів спряжених підгруп таких, що є нормалізаторами заданих підгруп, у скінченних p -групах ($p \neq 2$) класу нільпотентності c .

У 2008 році Ф. Руссо [77] досліджував зв'язки між центром $Z(G)$, нормою $N(G)$, квазіцентром $Q(G)$ та гіперквазіцентром $Q^*(G)$ груп, скінченних над квазіцентром. Нагадаємо, що *квазіцентром* $Q(G)$ групи G називається підгрупа, породжена всіма елементами x групи G такими, що підгрупа $\langle x \rangle$ переставна в групі G (з іншими підгрупами). Відповідно, *гіперквазіцентром* $Q^*(G)$ групи G називається найбільший член ланцюга нормальних підгруп

$$E = Q_0(G) \leq Q_1(G) = Q(G) \leq \dots \leq Q_\alpha \leq Q_{\alpha+1} \leq \dots,$$

де α — порядкове число і $Q_{\alpha+1}(G)/Q_\alpha(G) = Q(G/Q_\alpha(G))$.

Зв'язки між нормою $N(G)$ та центром $Z(G)$ у класі скінченних груп вивчалися також І. В. Лемешевим у [62]. Отримані ним результати доповнюють результати Бера для скінченних груп.

Досить плідними виявились дослідження скінченних груп, в яких норма Бера $N(G)$ має певний індекс. Зокрема, у роботі [92] Дж. Ваном та С. Го розглядалися скінченні p -групи, в яких норма має простий індекс, а в [93] — скінченні групи, в яких норма є підгрупою індексу p або pq , де p і q — різні прості числа.

У роботі [53] С. Го та Дж. Ван, вивчали будову груп, в яких кожна циклічна підгрупа нормальна або нормалізує всі підгрупи групи. Відзначимо також роботу Дж. Сміта [89], де досліджено групи, в яких кожна підгрупа норми є нормальною у групі.

Оскільки підгрупи довільної групи можна розглядати як елементи деякої структури підгруп $L(G)$ відносно операцій об'єднання та перетину, що впорядковані за включенням, то у такому сенсі норму $N(G)$ групи можна визначити наступним чином [78]:

$$N(G) = \bigcap_{X \in L(G)} N_G(X).$$

У цьому контексті у [78] було досліджено зв'язок між нециклічністю норми $N(G)$, з одного боку, та структурою $L(G)$ підгруп групи G і узагальненим ступенем комутативності групи G , з іншого.

Виникає природне питання: чому, враховуючи просте означення норми та її важливість при вивченні груп, ця характеристична підгрупа, на відміну від центра та комутанта, не отримала належної уваги на етапі раннього розвитку теорії груп. Г. Міллер у [68] пояснює це тим, що у той час перед алгеброю стояли інші завдання і основна увага теорії груп була спрямована на дослідження розв'язків алгебраїчних рівнянь (в цьому напрямку досліджень фундаментальну роль відіграють прості групи, в той час як норма простої групи складеного порядку одинична). Норма не відігравала важливої ролі й при вивченні груп підстановок малих степенів, які використовувалися у той час у теорії алгебраїчних рівнянь. Найменший степінь групи підстановок, для якої існує норма простого індексу, дорівнює 8, до того ж тільки одна з 200 груп цього порядку має норму простого індексу. І, мабуть, саме з цих причин лише в 1934 році Р. Бер звернув увагу на цю підгрупу.

Розглядаючи перетини нормалізаторів окремих підгруп групи, можна отримати підгрупи, у тій чи іншій мірі пов'язані з нормою Бера. До них можна віднести перетини нормалізаторів усіх підгруп, що містяться у виділеній підгрупі [80, 146, 147], або, навпаки, перетини нормалізаторів, що містять цю підгрупу [40]. Зокрема, близьким до поняття норми $N(G)$ групи G є введені І. Я. Субботіним поняття інваріатора $I_G(A)$ підгрупи A в групі G .

Інваріатором (квазіцентралізатором [80]) $I_G(A)$ підгрупи A у групі G [147] називається перетин нормалізаторів в G усіх підгруп групи A . Таку

підгрупу можна також назвати нормою підгрупи A в групі G [60]. У випадку, коли підгрупа A збігається з усією групою G , інваріатор $I_G(G)$ — це в точності норма $N(G)$ групи G .

У 1990 році Х. Белл, Ф. Гузман, Л.-Ш. Каппе [17] досліджували так зване ядро Бера, що є аналогом норми групи для кілець. Ядром Бера кільця K називається множина

$$B(K) = \{a \in K \mid \forall y \in K \exists r \in s \in N(ay = y^r a \wedge ya = ay^s)\}.$$

У 2001 році М. Д. Фалко, Ф. Д. Джованні, С. Музелла [40] ввели поняття H -норми групи G для деякої підгрупи H групи G . H -нормою групи G називається підгрупа $\ker(G : H)$, що складається з усіх елементів таких, що нормалізують кожну підгрупу X з G , що містить H . Очевидно, що

$$H \leq \ker(G : H) \leq N_G(H), \ker(G : H) \leq \ker(G : K),$$

якщо $H \leq K \leq G$. Зазначимо, що E -норма, де E — одинична підгрупа групи G , збігається з нормою $N(G)$ групи G .

Зрозуміло, що норму $N(G)$ можна визначити як підгрупу групи G , що складається з усіх елементів даної групи, які нормалізують кожну підгрупу в G . Замінивши умову нормальності на пронормальність, отримаємо у деякій мірі аналог норми групи для пронормальності — так звану пронорму $P(G)$ [48].

Нагадаємо, що елемент x групи G пронормалізує підгрупу H групи G , якщо підгрупи H та H^x спряжені в $\langle H, H^x \rangle$. Відповідно, *пронормою* $P(G)$ групи G називається множина всіх елементів групи G , що пронормалізують кожну підгрупу групи.

На відміну від норми групи пронорма не завжди є підгрупою групи. У роботі [75] було досліджено деякі класи груп, у яких множина усіх елементів групи G , що пронормалізують кожну підгрупу групи утворює підгрупу. У [48] було доведено, що пронорма $P(G)$ є підгрупою групи G , якщо G — поліциклічна група або локально розв'язна FC -група.

У деяких дослідженнях, що стосуються груп з обмеженнями на нормалізатори вибраних систем підгруп, розглядаються підгрупи, породжені нормалізаторами вибраних підгруп. У цьому контексті відзначимо роботу алгебраїста Дж. Сміта [88], який вивчав підгрупу $R(G)$, породжену всіма власними нормалізаторами, названу ним *конормою* групи. Якщо в групі G немає власних нормалізаторів, то група G дедекіндова і $R(G) = E$.

У 2010 році М. Р. Діксон, Л. А. Курдаченко, Д. Отал використовували так звану норму підпростору в лінійних групах при дослідженні лінійних груп з орбітами скінченних розмірностей [36].

Нехай A — векторний простір над полем F , $GL(F, A)$ — група всіх автоморфізмів простору A , G — підгрупа групи

$GL(F, A)$, B – підпростір простору A . Нормою підпростору B в групі називається перетин нормалізаторів усіх F -підпросторів в B :

$$Norm_G(B) = \bigcap_{b \in B} N_G(bF).$$

Відомо, що у випадку, коли група G збігається з нормою $Norm_G(B)$, то група G ізоморфна підгрупі мультиплікативної групи $U(F)$. Якщо група G має орбіти скінченних розмірностей над A , то A містить FG -підмодуль D скінченної розмірності $\dim_F(D)$. Більш того, якщо G -орбіти кожного підпростору з A є скінченними, то простір A містить FG -підмодуль B такий, що $\dim_F(A/B)$ і $|G : Norm_G(B)|$ також скінченні.

Отже, дослідження, присвячені вивченню норми групи та близьких до неї підгруп, складають досить важливий та цікавий напрямок у теорії груп. В той же час існує досить багато запитань щодо структурних характеристик групи залежно від будови її норми, щодо умов співпадання норми групи та її центра тощо.

Як зазначалося вище, норма $N(G)$ є Σ -нормою групи, в якій у якості системи Σ обирається система усіх підгруп даної групи. Звужуючи систему усіх підгруп, наприклад, до системи усіх абелевих чи усіх максимальних підгруп групи, будемо отримувати нові Σ -норми, які можна розглядати як узагальнення норми $N(G)$.

Перші узагальнення такого роду з'явилися ще у 50-х роках ХХ століття. Зокрема, у 1953 році Р. Бер [5] розглядав перетин $H(G)$ нормалізаторів усіх силовських підгруп групи G і назвав цей перетин *гіперцентром групи G* . Зрозуміло, що гіперцентр $H(G)$ є Σ -нормою, де система складається з усіх силовських підгруп групи. Р. Бер довів, що $H(G)$ збігається з перетином усіх її максимальних нільпотентних підгруп, а фактор-група $G/H(G)$ є групою без центра. Окрім того, було встановлено, що нормальна підгрупа належить гіперцентру тоді і тільки тоді, коли її елементи порядку p^n породжують циклічні підгрупи індекса p^n .

У 1968 році Б. Хупперт [54] узагальнив поняття гіперцентра, ввівши до розгляду \mathfrak{F} -гіперцентр. Нехай \mathfrak{F} – клас скінченних груп, які можна подати у вигляді прямого добутку своїх холлівських π -підгруп відносно деякого розбиття непорожньої множини π простих чисел. Головний фактор H/K групи G називається \mathfrak{F} -центральним [158], якщо

$$H/K \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}.$$

Добуток всіх нормальних підгруп з G , в яких G -головні фактори є \mathfrak{F} -центральними називається \mathfrak{F} -гіперцентром $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ групи G [38]. Той факт, що \mathfrak{F} -гіперцентр тісно пов'язаний з нормою Бера, підтверджують результати

В. І. Мурашки [69], який з властивостей \mathfrak{Z} -гіперцентра отримав деякі результати Бера про норму групи.

Ще одним узагальненням норми групи є так звана A -норма, уведена до розгляду у 1961 році В. Каппе [55]. A -нормою $N_A(G)$ скінченної групи G називається перетин нормалізаторів усіх максимальних абелевих підгруп групи.

Очевидно, що A -норма групи містить норму групи $N(G)$ та її центр. У роботі [55] було показано, що норма $N_A(G)$ містить другий гіперцентр групи G , а група автоморфізмів, яку індукує G на нормі $N_A(G)$ нільпотентна класа не вище 2. Ці твердження є досить широкими узагальненнями результатів Л. Уоса [97] і Шенкмана [79], отриманими щодо норми $N(G)$ групи.

Ще одна цікава властивість A -норми групи (див. [55]) полягає у тому, що кожен її елемент переставний зі своїми спряженими (такі групи вивчалися, зокрема, у роботі Ф. Леві [63]). Окрім того, норма $N_A(G)$ є близькою до підгрупи правих енгелевих елементів довжини 2, що дозволило використати її у дослідженні енгелевих груп.

Нагадаємо, (див., наприклад, [110]), що елемент $x \in G$ називається правим енгелевим елементом довжини 2, якщо для довільного елемента $g \in G$ має місце співвідношення

$$[[x, g], g] = 1.$$

Нехай $R(G)$ — підгрупа групи G , породжена всіма правими енгелевими елементами довжини 2 групи G . У [55] було встановлено, що A -норма групи G міститься у $R(G)$, а фактор-група $R(G)/N_A(G)$ — елементарна абелева експоненти не вище 2. Окрім того, для довільного елемента x непарного порядку групи G наступні твердження еквівалентні:

- 1) $x \in N_A(G)$;
- 2) x — правий енгелевий елемент довжини 2 у G ;
- 3) якщо $\langle x \rangle \triangleleft G$ і U — група автоморфізмів, яку індукує G на $\langle x \rangle$, то x належить A -нормі групи $\langle x \rangle U$.

Згодом В. Каппе [56]–[58] узагальнив поняття A -норми групи та увів до розгляду E -норму, яку визначив як перетин нормалізаторів усіх максимальних підгруп групи із заданою теоретико-груповою властивістю E . Очевидно, що перетин довільної підгрупи групи G з E -нормою групи міститься в E -нормі цієї підгрупи. До того ж

$$N_E(N_E(G)) = N_E(G).$$

З поняттям E -норми пов'язана підгрупа $\Delta(G)$, яка вивчалася В. Гашюцем [45] і була визначена як перетин нормалізаторів усіх максимальних підгруп групи. Зрозуміло, що підгрупу Гашюца $\Delta(G)$ можна розглядати як Σ -

норму групи для системи Σ , що складається з ненормальних в G максимальних підгруп. У [45] було встановлено, що $\Delta(G)$ нільпотентна і

$$\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G)),$$

де $\Phi(G)$ — підгрупа Фраттіні.

У 1958 році, вивчаючи властивості нормалізаторів субнормальних підгруп, Г. Віландт [96] ввів до розгляду підгрупу $W(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи. Зрозуміло, що підгрупа Віландта $W(G)$ водночас є нормою субнормальних підгруп групи.

Цілком очевидно, що у нільпотентній групі субнормальна норма збігається з нормою $N(G)$. За теоремою 13.3.7 [72] підгрупа Віландта $W(G)$ містить будь-яку просту неабелеву субнормальну підгрупу групи G , а також кожну мінімальну нормальну підгрупу групи G , що задовольняє умову мінімальності для субнормальних підгруп. Тому в скінченній групі G підгрупа $W(G)$ неединична [96].

Аналогічний результат для деяких класів нескінченних груп незалежно один від одного отримали Д. Робінсон [73] та Дж. Роузблед [76]. Вони з'ясували, що фактор-група $G/W(G)$ скінченна, якщо група G задовольняє умову мінімальності для субнормальних підгруп. Ці результати було узагальнено алгебраїстом Дж. Коссі [34] для поліциклічних груп та встановлено, що такі групи мають скінченну фактор-групу $G/C_G(W(G))$.

Підгрупа Віланда та її узагальнення активно вивчалися цілим рядом дослідників, зокрема: О. Кегелем [59], Дж. Коссі, Р. Брайсом [27–29], Р. Брендлом, Ф. Джованні, С. Франціозі [20], А. Каміна [30], К. Касоло [31,32], Е. Ормерод [71], С. Весереллом [94, 95], К. Жаном та К. Го [53, 99].

У роботі [27] було встановлено, що у скінченно породженій майже розв'язній групі скінченного рангу субнормальна норма $W(G)$ міститься у FC -центрі. Окрім того, якщо норма $W(G)$ збігається з усією групою, то в останній нормальними є усі субнормальні підгрупи, тобто нормальність є транзитивним відношенням. Групи з такою властивістю вивчалися Д. Робінсоном в [74] і були названі T -групами. Якщо G — скінченна розв'язна T -група і G/L єдина максимальна нільпотентна фактор-група групи G , то фактор-група G/L — абелева або гамільтонова, а L — абелева група.

У 1989 році Дж. Коссі, Р. Брайс [27] ввели до розгляду локальну підгрупу Віландта $W^p(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх p' -досконалих субнормальних підгруп групи G . Нагадаємо, що p' -досконалою називається група, яка не має нетривіальних фактор-груп порядків взаємно простих з p .

У 1990 році Р. Брайсом [29] було розглянуто ще одне узагальнення підгрупи Віландта — так звана m -підгрупа Віландта $U_m(G)$ групи G , що є перетином нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи G з дефектом не

більше m для цілого $m \geq 1$ та досліджено полінільпотентну структуру скінченних розв'язних груп на мові m -довжини Віландта.

При цьому широко використовувалось поняття m -ряду Віландта групи, який визначається наступним чином:

для кожного натурального числа $m \geq 1$

$$U_{m,0}(G) = E;$$

якщо $i \geq 1$, то $U_{m,i}(G)$ визначається з умови

$$U_{m,i}(G)/U_{m,i-1}(G) = U_m(G/U_{m,i-1}(G)).$$

Якщо для деякого цілого числа n має місце рівність $U_{m,n}(G) = G$, то мінімальне число n називається m -довжиною Віландта. Р. Брайс довів, що існують межі комутаторної довжини і довжини Фіттинга скінченних розв'язних груп на мові m -довжини Віландта ($m \geq 2$), а також визначив найкраще таке обмеження. Властивості m -підгрупи Віландта $U_m(G)$ вивчалися також у роботах К. Франчі [43, 44].

У 1992 році К. Касоло [32] вивчав спеціальну підгрупу групи $W(G)$, яку назвав сильною підгрупою Віландта $\overline{W}(G)$, та визначив її як перетин централізаторів нільпотентних субнормальних фактор-груп групи G :

$$\overline{W}(G) = \{g \in G \mid [S, g] \leq S^R \text{ для всіх } S \ll G\},$$

де S^R — нільпотентний резидуал підгрупи S або найменша нормальна підгрупа N в S така, що фактор-група S/N нільпотентна. У роботі [32] було доведено, що у скінченній групі сильна підгрупа Віландта $\overline{W}(G)$ нетривіальна. Властивості підгрупи $\overline{W}(G)$ досліджувались також С. Весереллом у [94, 95].

У 2019 році М. Левіс та М. Зарін [64] розглядали норму $B_n(G)$, яка є перетином всіх нормалізаторів не n -субнормальних підгруп групи G . Нагадаємо, що підгрупа K групи G є n -субнормальною в G , якщо існує ряд підгруп в G таких, що

$$K = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_n = G.$$

Зокрема, нормальна підгрупа — це 1-субнормальна підгрупа, тому $B_1(G)$ — перетин нормалізаторів всіх ненормальних підгруп групи G і $B_1(G) = N(G)$.

У 1995 році Дж. Байдлеманом, М. Діксоном, Д. Робінсоном [15, 16] було розглянуто ще одну Σ -норму групи — узагальнену підгрупу Віландта $IW(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх нескінченних субнормальних підгруп групи. Зрозуміло, що $IW(G)$ є характеристичною підгрупою та містить субнормальну норму $W(G)$. Якщо $IW(G)$, то в групі G нормальні всі нескінченні субнормальні підгрупи. Такі групи вивчалися Ф. Джованні, С. Франчіозі [49] і отримали назву IT -груп. В роботі [15] досліджується структура

групи G за умови, що $IW(G) \neq W(G)$, а також структура фактор-групи $IW(G)/W(G)$.

У роботі [67] Ф. Марі, Ф. Джованні було введено нову Σ -норму, у якій систему Σ складають усі несубнормальні підгрупи групи. Цю норму несубнормальних підгруп групи автори позначили $W^*(G)$. Зрозуміло, що в групах з умовою $W^*(G) = G$ усі підгрупи є субнормальними. Більш того, якщо G — група зі скінченною кількістю нормалізаторів несубнормальних підгруп, то фактор-група $G/W^*(G)$ скінченна [67].

Серед робіт, присвячених дослідженню узагальнень підгрупи Віландта, відзначимо також роботу [1], в якій розглянуто так звану узагальнену N -підгрупу Віландта $W_N(G)$, що складається з усіх елементів групи G , які нормалізують усі субнормальні підгрупи з N . Це нормальна підгрупа і в загальному випадку може відрізнятися від N .

Зрозуміло, що $W(G) \subseteq W_N(G)$, зокрема, $W(G) = W_N(G)$, якщо $N = G$, або $N = W(G)$, або N — єдина максимальна нормальна підгрупа. Якщо G є T -групою і N нормальна підгрупа в групі G , то $W_N(G) = G$. Наступний приклад підтверджує, що обернене твердження не має місця. Так у групі

$$G = D_8 = \langle x, y \rangle, x^8 = y^2 = (xy)^2 = 1, N_1 = \langle x^2 \rangle, N_2 = \langle x \rangle.$$

Тоді

$$W_{N_1}(G) = W_{N_2}(G) = G,$$

але G не є T -групою [1].

Цілий ряд досліджень присвячено вивченню Σ -норм, в яких у якості системи Σ обирається система певних характеристичних підгруп. Одна з таких Σ -норм — $D(G)$ — була розглянута Ш. Лі та Ж. Шеном [65, 83] для системи Σ комутантів усіх підгруп скінченної групи G . Було доведено, що група G є розв'язною з довжиною Фіттинга не більше 3, якщо норма $D(G)$ містить усі елементи простих порядків групи. У випадку, коли $G = D(G)$, комутант G' нільпотентний, а G'' є групою, клас нільпотентності якої не більше 2.

Продовжуючи вивчення Σ -норм характеристичних підгруп, Л. Гон, Л. Жао та К. Го у 2016 році [50] досліджували підгрупи $\omega^A(G)$ та $\theta^A(G)$, що є нормами комутантів усіх субнормальних підгруп та, відповідно, комутантів усіх несубнормальних підгруп в скінченній групі G й зв'язки між ними.

Ж. Шен, Дж. Чен та Ш. Лі [84] вивчали норму $CS(G)$ всіх підгруп комутанта групи G . Якщо $G = CS(G)$, то всі підгрупи комутанта G' будуть нормальними в групі G . Такі групи вперше вивчав І. Я. Субботін [146], саме тому автори і назвали такі групи CS -групами (групи Чернікова-Субботіна). Такою групою є, наприклад, симетрична група S_3 . Для симетричної групи S_4 норма $CS(G)$ одинична. Випадок $CS(G) \neq G$ також досягається, наприклад, для групи

$$G = Q_8 \rtimes D_8,$$

що є напівпрямим добутком групи кватерніонів Q_8 порядку 8 та групи дієдра D_8 порядку 8.

Ще один клас підгруп, які мають значний вплив на структуру групи, є клас централізаторів. Це мотивувало М.Заріна [98] ввести до розгляду узагальнену норму $C(G)$, яку він визначає як перетин нормалізаторів всіх централізаторів групи G :

$$C(G) = \bigcap_{a \in G} N_G(C_G(a)).$$

Ціла низка досліджень, які проводяться у останній час, стосується норм різних систем резидуалів. Зокрема, Ж. Шен, В. Ши та Ж. Кван [85] досліджували норму $S(G)$ нільпотентних резидуалів всіх підгруп простого порядку. Було доведено, що скінченна група G є розв'язною, якщо всі елементи простого порядку цієї групи містяться у нормі $S(G)$.

Продовжуючи цей напрямок, Л. Гон та К. Го у [50] ввели до розгляду норму нільпотентних резидуалів всіх підгруп скінченної групи. Н. Су та Я. Ван [90] досліджували норму $D^{\mathfrak{F}}(G)$ \mathfrak{F} -резидуалів $G^{\mathfrak{F}}$ всіх підгруп групи G та норму $D_p^{\mathfrak{F}}(G)\mathfrak{H}^{\mathfrak{F}}O_{p'}(G)$ всіх підгруп H скінченної групи G , де \mathfrak{F} — формація. Нагадаємо, що \mathfrak{F} -резидуал $G^{\mathfrak{F}}$ групи G — це найменша нормальна підгрупа N групи G така, що $G/N \in \mathfrak{F}$.

К. Чен та В. Го [33] досліджували $\mathfrak{h}\mathfrak{F}$ -норму $N_{\mathfrak{h}\mathfrak{F}}(G)$ групи G — перетин нормалізаторів добутків \mathfrak{F} -резидуалів всіх підгруп групи G та \mathfrak{h} -радикала групи G

$$N_{\mathfrak{h}\mathfrak{F}}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{h}}),$$

де \mathfrak{h} — клас Фіттинга, \mathfrak{F} — формація. Нагадаємо, що \mathfrak{h} -радикалом $G_{\mathfrak{h}}$ групи називається максимальна нормальна \mathfrak{h} -підгрупа групи G .

Якщо $\mathfrak{h} = 1$, то підгрупа $N_{1,\mathfrak{F}}(G)$ називається \mathfrak{F} -нормою $N_{\mathfrak{F}}(G)$ групи G і визначається як

$$N_{\mathfrak{F}}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{F}}).$$

Якщо $\mathfrak{h} = \mathfrak{G}_{\pi}$, де \mathfrak{G}_{π} — клас скінченних π -розв'язних груп, то підгрупа $N_{\mathfrak{G}_{\pi},\mathfrak{F}}(G)$ називається $\pi\mathfrak{F}$ -нормою $N_{\pi\mathfrak{F}}(G)$ групи G і визначається як

$$N_{\pi\mathfrak{F}}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{F}}O_{\pi}(G)).$$

У [33] було досліджено властивості $\mathfrak{h}\mathfrak{F}$ -норми, зокрема, $\pi\mathfrak{F}$ -норми скінченної групи G , а також зв'язки між $\pi'\mathfrak{F}$ -нормою та $\pi\mathfrak{F}$ -гіперцентром групи G .

У 2014 році А. Балістер-Болінше, Дж. Коссі, Л. Жан [13] запропонували ще один підхід до визначення Σ -норм. C -нормою $kC(G)$ скінченної групи G

було названо перетин нормалізаторів всіх підгруп групи G , які не входять до класу C

$$k_C(G) = \bigcap_{H \notin C} N_G(H)$$

за умови, що $k_C(G) = G$, якщо $G \in C$. При такому підході норму $N(G)$ Бера можна розуміти як норму $k_C(G)$, де C - клас груп порядку 1. Групи, для яких $k_C(G) = G$, отримали назву C -дедекіндових.

У [13] описано структуру нільпотентних C -дедекіндових груп для класу нільпотентних груп. Показано також, що ті групи, для яких C -норма не є гіперцентральною, мають досить чітку структуру. Авторами наведено класифікацію нільпотентних класів, замкнених відносно взяття підгруп, факторгруп, прямих добутків груп взаємно простих порядків і показано, що відомі класифікації можуть бути виведені з даної. Виявилось, що якщо $k_C(G)$ містить нецентральний головний фактор-групи G , то $k_C(G)$ містить тільки один нецентральний головний фактор (в головному ряді групи G по $k_C(G)$) і якщо p - простий дільник порядку цього головного фактора, то холлівська p' -підгрупа групи $G \in C$ -групою і G нільпотентна класу не більше 3.

Відзначимо також роботу Р. Лауе [61], в якій було розглянуто підгрупу, "близьку" до Σ -норми

$$A(\Sigma) = \bigcap_{X \in \Sigma} N_{\text{Aut}(G)}(X),$$

що складається з автоморфізмів, які нормалізують кожну підгрупу множини Σ -підгруп групи G .

У 2005 році Ф. Марі, Ф. Джованні [67] було уведено поняття неабелевої норми $N^*(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх неабелевих підгруп групи. Якщо $N^*(G) = G$, то в групі нормальні всі неабелеві підгрупи. Такі групи спочатку вивчалися Г. М. Ромалісом та Н. Ф. Сесекінім [140–142] і були названі метагамільтоновими. У подальшому метагамільтонові групи досліджувалися В. Т. Нагребецьким [138], О. А. Махньовим [137], С. М. Черніковим [152], М. М. Семком та М. Ф. Кузенним [109]. У роботі [67] встановлено результати, що узагальнюють теорему Шура [103] про скінченність комутанта в групах, скінченних над центром, а саме, якщо G є локально ступінчатою групою і фактор-група $G/N^*(G)$ скінченна, то комутант G' скінченний.

Дослідження норми неабелевих підгруп було продовжено у 2018 році алгебраїстами М. Фалько, Ф. Джованні, Л. Курдаченко, С. Музелою. У роботі [41] вказану норму автори називають *метанормою* $M(G)$. Було встановлено, що локально скінченна група G метагамільтонова за умови нільпотентності і метаабелевості її метанорми $M(G)$. До того ж $|M(G)'| = p^2$, де p — просте число. Продовженням цих досліджень стала робота [42], в якій

доведено, що для локально ступінчатої групи G підгрупа $[M(G), G]$ періодична, підгрупа $M(G)''$ міститься у центрі $Z(G)$, а $M(G)/M(G)'$ міститься у центрі $Z(G/M(G)')$.

У 2018 році В. М. Селькін [81] досліджував π -розкладну норму $N_\pi(G)$ скінченної групи G . π -розкладна норма $N_\pi(G)$ є перетином нормалізаторів π -розкладних резидуалів всіх підгруп скінченної групи G . Нагадаємо, що скінченна група називається π -розкладною, якщо

$$G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G).$$

У вказаній роботі було встановлено, що скінченна група G є мета π -розкладною тоді і тільки тоді, коли фактор-група $G/N_\pi(G)$ є π -розкладною.

У тому ж 2018 році В. М. Селькін та Н. С. Козенок [82] ввели до розгляду π -спеціальну норму $N_{\pi sp}(G)$ скінченної групи G , яка є перетином нормалізаторів π -спеціальних резидуалів усіх підгруп групи G . Нагадаємо, що скінченна група G називається π -спеціальною, якщо

$$G = O_{p_1}(G) \times O_{p_2}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G), \pi = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq P.$$

Доведено, що скінченна група G є мета π -спеціальною тоді і тільки тоді, коли фактор-група $G/N_{\pi sp}(G)$ є мета π -спеціальною.

Накладаючи додаткові обмеження на ту чи іншу узагальнену норму групи, можна одержувати різні розширення уже відомих класів груп. Наприклад, в дедекіндових групах норма $N(G)$ збігається з усією групою. Розглядаючи ситуацію, коли така норма має скінченний індекс у нескінченній групі, одержимо розширення класу нескінченних дедекіндових груп. При цьому можна досліджувати зв'язки між цим класом груп та класом груп, в яких кожна підгрупа майже нормальна.

Аналогічно, можна поставити задачу дослідження груп, в яких та чи інша Σ -норма недедекіндова та є власною підгрупою групи. У цій роботі така задача (за певних обмежень) розв'язується для наступних систем підгруп Σ : системи усіх нециклічних, усіх абелевих нециклічних, усіх нескінченних, усіх нескінченних абелевих, усіх нескінченних циклічних, усіх циклічних підгруп простого порядку та усіх розкладних підгруп групи.

Перейдемо до короткого огляду змісту роботи. У ній вивчаються групи із заданими властивостями вказаних вище Σ -норм та досліджується вплив обмежень, яким задовольняє певна Σ -норма групи, на властивості самої групи. У якості визначальних обмежень було вибрано недедекіндовість відповідної Σ -норми або скінченність її індексу у групі.

Вивчення нескінченних груп з наперед заданими обмеженнями на нормалізатори різних систем нескінченних підгруп Σ тривалий час були і зали-

шаються об'єктом багатьох теоретико-групових досліджень. Тому при дослідженні нескінченних груп з обмеженнями на Σ -норми природньо у якості системи Σ вибрати одну із систем нескінченних підгруп.

У розділі 1 "Нескінченні групи із заданими властивостями Σ -норм деяких систем нескінченних підгруп" досліджуються взаємозв'язки між властивостями груп та їх Σ -норм, для наступних систем підгруп Σ : системи усіх нескінченних, усіх нескінченних абелевих, усіх нескінченних циклічних та усіх циклічних підгруп простих порядків групи за умови, що вказані системи підгруп непорожні. Відповідні Σ -норми були позначені наступним чином:

- $N_G(\infty)$ – норма нескінченних підгруп;
- $N_G(A_\infty)$ – норма нескінченних абелевих підгруп;
- $N_G(C_\infty)$ – норма нескінченних циклічних підгруп
- $N_G(C_{\bar{p}})$ норма циклічних підгруп простих порядків групи G . Вказані норми вивчалися авторами у роботах [123, 125, 128, 129, 136].

З означень норм $N_G(\infty)$, $N_G(A_\infty)$, $N_G(C_\infty)$ та $N_G(C_{\bar{p}})$ випливає наступне співвідношення

$$Z(G) \subseteq N(G) \subseteq N_G(\infty) \subseteq N_G(A_\infty) \subseteq N_G(C_\infty).$$

Зазначимо, що в неперіодичній групі G вказані норми збігаються

$$N(G) = N_G(\infty) = N_G(A_\infty) = N_G(C_\infty),$$

якщо центр групи G містить елементи нескінченного порядку. За цієї ж умови усі вказані норми збігаються з центром групи. Останнє твердження є певним узагальненням результатів Р.Бера [3] щодо взаємозв'язків між нормою групи $N(G)$ та її центром.

Якщо група G збігається з якоюсь із цих Σ -норм, то враховуючи, що вказані системи підгруп Σ непорожні, усі Σ -підгрупи групи є нормальними. Нескінченні неабелеві групи, в яких нормальними є усі нескінченні або усі нескінченні абелеві підгрупи за умови існування таких підгруп у групі (або групи з умовою $N_G(\infty) = G$ та $N_G(A_\infty) = G$), вивчалися С. М. Черніковим [152, 154] і були названі відповідно INH -групами та IH -групами відповідно.

Групи, в яких нормальними є усі підгрупи простого (у тому числі й нескінченного) порядку, було досліджено Т. Г. Лелеченко та Ф. М. Лиманом [111] й названо майже дедекіндовими групами. Отже, будова і властивості груп, що збігаються з нормами $N_G(A_\infty)$, $N_G(\infty)$ та $N_G(C_{\bar{p}})$, фактично відомі. Тому природним є дослідження властивостей груп, в яких ці Σ -норми є недедекіндовими підгрупами або ж мають скінченний неединичний індекс у групі.

Природним узагальненням норми Бера для неперіодичних груп є норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп. Дослідження цієї норми та її впли-

ву на властивості групи було проведено у підрозділі 1.1. Встановлено, що в групах без скруту норма $N_G(C_\infty)$ збігається з центром групи, а будь-яка скінченна над нормою $N_G(C_\infty)$ група без скруту абелева (теорема 1.1.2 та її наслідок). З іншого боку, у мішаній неперіодичній групі норма нескінченних циклічних підгруп може бути неабелевою і, навіть, негамільтоновою. У теоремі 1.1.3 встановлено, що неперіодична група G тоді і тільки тоді має неабелеву норму $N_G(C_\infty)$, коли усі елементи нескінченного порядку цієї групи породжують нормальну абелеву підгрупу й існує елемент b порядку 2 або 4, такий що $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$. При цьому $N_G(C_\infty) = A\langle b \rangle$.

Будову нескінченних груп, в яких норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп є неабелевою IH -групою, описано у підрозділах 1.2 та 1.3. Встановлено, що неперіодична група G тоді і тільки тоді має неабелеву норму $N_G(A_\infty)$, коли усі елементи нескінченного порядку групи G породжують нормальну абелеву підгрупу D , яка містить кожну нескінченну абелеву підгрупу групи G , й існує елемент b порядку 2 або 4, такий що $b^{-1}db = d^{-1}$ для довільного елемента $d \in D$. При цьому за теоремою 1.2.2

$$N_G(A_\infty) = D\langle b \rangle.$$

Отже, норма $N_G(A_\infty)$ неперіодичної групи без інволюцій завжди абелева.

Слід звернути увагу, що з неабелевості норми $N_G(A_\infty)$ у неперіодичній групі впливає неабелевість норми $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп. Більш того, у цьому випадку $N_G(C_\infty) = N_G(A_\infty)$. Проте, обернене твердження місця не має: існують неперіодичні групи, в яких норма $N_G(C_\infty)$ неабелева, а норма $N_G(A_\infty)$ — абелева підгрупа. У теоремі 1.2.3 наведено умови, за яких норми $N_G(A_\infty)$ та $N_G(C_\infty)$ неперіодичної групи G збігаються.

У зв'язку з існуванням груп О. Ю. Ольшанського [139], періодичні групи з недедекіндовою нормою нескінченних абелевих підгруп вивчалися за умови їх локальної скінченності. У теоремі 1.3.1 стверджується, що такі групи задовольняють умову мінімальності для підгруп тоді і тільки тоді, коли цю умову задовольняє підгрупа $N_G(A_\infty)$. Більш того, якщо $N_G(A_\infty)$ є групою з умовою мінімальності для підгруп, то G є скінченим розширенням її повної частини і тому

$$[G : N_G(A_\infty)] < \infty.$$

У підрозділах 1.4 та 1.5 розглядається ще одне узагальнення норми групи — норма нескінченних підгруп $N_G(\infty)$ групи G та вивчаються нескінченні групи з обмеженнями на цю норму. Було встановлено, що неперіодичні неабелеві групи, в яких норма $N_G(\infty)$ має скінченний індекс, є мішаними і вичерпуються скінченими розширеннями своїх центрів. Встановлено також, що норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп неперіодичної групи абелева і

збігається з центром групи, якщо вона містить елементи нескінченного порядку. Цей результат узагальнює теорему Бера [10] про співпадання норми групи $N(G)$ та її центра у випадку неперіодичності $N(G)$.

Відносно властивостей нескінченних локально скінченних груп, в яких норма $N_G(\infty)$ недедекіндова, було встановлено, що такі групи є скінченними розширенням квазіциклічної підгрупи, яка є повною частиною норми $N_G(\infty)$ (теорема 1.5.1). У цьому ж пункті досліджено властивості нескінченних локально скінченних груп, які є скінченними над нормою $N_G(\infty)$ (теореми 1.5.3 та 1.5.4). Встановлено, що такі групи є або скінченними над центром, або мають скінченний центр та є скінченними розширеннями прямого добутку скінченного числа квазіциклічних p -підгруп за одним і тим же простим числом p .

Зазначимо, що норму Бера $N(G)$ можна розглядати як перетин нормалізаторів усіх циклічних підгруп групи. У зв'язку з цим природно постає питання розглянути Σ -норму у випадку, коли систему Σ складають усі циклічні підгрупи непростих порядків даної групи. Така норма була розглянута у підрозділі 1.6 для класу неперіодичних груп і була названа нормою $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків групи G [136].

Зрозуміло, що у неперіодичній групі G , яка збігається з нормою $N_G(C_{\bar{p}})$, інваріантними є всі циклічні підгрупи складеного чи нескінченного порядку. Такі групи за умови їх недедекіндовості вивчалися Т. Г. Лелеченко, Ф. М. Лиманом [111] і були названі майже дедекіндовими групами.

Оскільки в неперіодичних групах норма $N_G(C_{\bar{p}})$ нормалізує кожен нескінченну циклічну підгрупу групи G , то $N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_G(C_\infty)$. Очевидно, що вказані норми збігаються в групах без скруту. Доведено також, що $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_\infty)$, якщо норма циклічних підгруп непростих порядків неабелева (наслідок 1.6.9).

У теоремах 1.6.2 та 1.6.3 стверджується, що будь-яка неперіодична група G , норма $N_G(C_{\bar{p}})$ якої неабелева, є майже дедекіндовою групою і збігається з цією нормою. При цьому

$$G = A \rtimes \langle b \rangle,$$

де A — нормальна абелева підгрупа, яка містить усі елементи непростих порядків групи G , $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Звуження системи Σ всіх підгруп групи G до системи усіх абелевих і навіть усіх циклічних підгруп, не приводить до розширення норми $N(G)$. Проте при виборі у якості Σ системи усіх нециклічних підгруп (за умови, що такі підгрупи в групі існують), відповідна Σ -норма (її було названо нормою нециклічних підгруп або нециклічною нормою групи) буде, взагалі кажучи, відмінною від норми $N(G)$.

Можливість вивчати норму $N(G)$ нециклічних підгруп дали досліджен-

ня Ф. М. Лимана [115, 116, 118], який отримав опис досить широких класів неабелевих груп, в яких усі нециклічні підгрупи є нормальними. Такі групи були названі \overline{H} -групами (\overline{H}_p -групами у випадку p -груп).

У розділі 2 "Групи з обмеженнями на норму нециклічних підгруп групи" вивчаються групи, в яких норма нециклічних підгруп недедекіндова або ж має скінченний індекс у групі. Поняття нециклічної норми N_G групи як перетину нормалізаторів усіх нециклічних підгруп групи було введено Ф. М. Лиманом [119].

У підрозділі 2.2 досліджувалися нескінченні групи, нециклічна норма яких локально ступінчаста і має у групі скінченний індекс. У зв'язку з існуванням нескінченних груп О. Ю. Ольшанського [139], всі підгрупи яких циклічні, і які водночас є нормами своїх нециклічних підгруп, періодичні групи розглядалися за умови їх локальної скінченності.

Було встановлено, що нескінченна група G , нециклічна норма якої локально ступінчаста і має у групі скінченний неодиначний індекс, нециклічна і скінченна над центром (теорема 2.2.1), а сама норма N_G є дедекіндовою підгрупою у класі нескінченних локально скінченних груп (теорема 2.2.2) та абелевою у класі неперіодичних майже локально розв'язних груп (теорема 2.2.4).

Доведено, що клас нескінченних локально скінченних p -груп ($p \neq 2$), нециклічна норма N_G яких неабелева, збігається з класом неабелевих p -груп, в яких усі нециклічні підгрупи нормальні. У той же час існують нескінченні локально скінченні 2-групи, що мають власну недедекіндову норму нециклічних підгруп. У теоремах 2.3.1 та 2.4.1 описано будову локально скінченних p -груп (p — довільне просте число), в яких норма N_G недедекіндова.

Продовжуючи вивчення локально скінченних груп з недедекіндовою нециклічною нормою, було встановлено, що будь-яка нескінченна непримарна локально скінченна група з вказаними обмеженнями на норму N_G є локально нільпотентною (теорема 2.5.1), а довільна скінченна нільпотентна група є групою виду:

$$G = G_p \times \langle y \rangle,$$

де G_p — силовська p -підгрупа групи G , що є скінченною групою з нетривіальною нормою N_{G_p} та $(|y|, p) = 1$ (теорема 2.5.2). Окрім того, виявилось, що у класі локально скінченних груп з ненільпотентності нециклічної норми N_G впливає нормальність усіх нециклічних підгруп у групі (теорема 2.5.4). Повний опис будови локально скінченних непримарних груп з недедекіндовою нециклічною нормою N_G наведено у теоремах 2.5.1–2.5.4.

У підрозділі 2.6 вивчалися властивості неперіодичних майже локально розв'язних груп з недедекіндовою нециклічною нормою N_G . Було встановлено, що будь-яка неперіодична майже локально розв'язна група G з вка-

заними обмеженнями на норму $N_G \in \overline{H}$ -групою і збігається з цією нормою. Отже, для даного класу груп з недедекіндовості нециклічної норми впливає нормальність усіх нециклічних підгруп у групі.

Звернемо увагу на те, що з опису локально скінченних або неперіодичних майже локально розв'язних груп з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп впливає, що вони розв'язні ступеня не вище 3.

Вивченням властивостей норми нециклічних підгруп N_G у класі скінченних груп та дослідженням її впливу на групу також займалися Ж. Шен, В. Ши, Дж. Жан [86, 87]. Ними було встановлено, що норма нециклічних підгруп скінченної групи розв'язна. Зауважимо, що це твердження є прямим наслідком з опису скінченних \overline{H} -груп (див. [115, 116, 118]). Доведено також, що скінченна група є розв'язною, якщо всі її елементи простого порядку містяться у нормі N_G нециклічних підгруп. Окрім того, встановлено, що комутант групи нільпотентний, якщо усі елементи простого порядку чи порядку 4 з групи містяться у N_G [85].

Розділ 3 присвячено вивченню властивостей норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп та дослідженню її впливу на властивості самої групи. Зрозуміло, що у групі G , яка збігається з нормою N_G^A , нормальні усі абелеві нециклічні підгрупи (за умови існування хоча б однієї такої підгрупи). Неабелеві групи з такою властивістю були повністю описані у [114, 117, 120] та названі \overline{HA} -групами (\overline{HA}_p -групами у випадку p -груп).

У підрозділах 3.2–3.4 розглянуто локально скінченні p -групи (p – довільне просте число), в яких норма N_G^A недедекіндова та містить хоча б одну абелеву нециклічну підгрупу. Доведено, що за таких умов будь-яка нескінченна локально скінченна p -група є скінченням розширенням квазіциклічної підгрупи (лема 3.2.5). Встановлено також, що при $p \neq 2$ з нескінченності та недедекіндовості норми N_G^A впливає нормальність усіх абелевих нециклічних підгруп у групі, тобто у цьому випадку $G = N_G^A$ (теорема 3.2.2). Звернемо увагу на те, що у класі нескінченних локально скінченних 2-груп твердження теореми 3.2.2 не виконується — існують нескінченні 2-групи, що не збігаються з нормою N_G^A .

Відповідь на питання про будову скінченних p -груп ($p \neq 2$), що мають неабелеву норму N_G^A , дає теорема 3.2.3, в якій наведено повний опис груп з такою властивістю. Зазначимо також, що у класі локально скінченних p -груп ($p \neq 2$) норми нециклічних та абелевих нециклічних підгруп групи збігаються, якщо нециклічна норма неабелева (теорема 3.2.2).

Вивченню властивостей і будови скінченних 2-груп з недедекіндовою нормою N_G^A присвячено підрозділи 3.4 та 3.5. Доведено, що довільна 2-група з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A не містить підгрупи кватерніонів тоді і тільки тоді, коли такої підгрупи не містить норма N_G^A . За

цих умов норми N_G^A та N_G збігаються.

У підрозділі 3.6 вивчалися властивості нескінченних періодичних груп, в яких норма N_G^A є недедекіндовою локально нільпотентною підгрупою. Було встановлено, що такі групи задовольняють умову мінімальності для абелевих підгруп і є групами Чернікова. При цьому нескінченна періодична локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп, коли

$$G = G_p \times G_{p'},$$

де G_p — нескінченна силовська p -підгрупа групи G з недедекіндовою нормою $N_{G_p}^A$ абелевих нециклічних підгруп (де $p \in \pi(G)$), а $G_{p'}$ — скінченна p' -підгрупа, усі абелеві підгрупи якої циклічні (теорема 3.6.1).

Будову нескінченних локально скінченних не локально нільпотентних груп, що мають локально нільпотентну недедекіндову норму N_G^A , охарактеризовано у теоремах 3.6.2 та 3.6.3.

Дослідження норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп у класі неперіодичних груп продовжено у підрозділі 3.7. Було розглянуто неперіодичні групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп залежно від наявності [105] чи відсутності [121] в них вільної абелевої підгрупи рангу 2.

Доведено, що якщо неперіодична група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклічну підгрупу та скінченну абелеву інваріантну в групі G підгрупу F і централізатор містить всі елементи нескінченного порядку групи, то

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = B \langle d \rangle,$$

де B — абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G , $|d| = 2$ або $|d| = 4$, $d^2 \in B$, d^2 є єдиною інволюцією в групі G і $d^{-1}bd = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

Встановлено також, що неперіодична група G не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, якщо її норма N_G^A є негамільтоновою \overline{HA} -групою і не містить таких підгруп.

У розділі 4 досліджувалося ще одне узагальнення норми $N(G)$ групи — норма N_G^d розкладних підгруп, яка визначається як перетин нормалізаторів усіх розкладних підгруп групи і яке було введено до розгляду у 2015 році авторами [124]. У випадку, коли група не містить розкладних підгруп, можна вважати, що $N_G^d = G$. Будову локально розв'язних груп, в яких система розкладних підгруп порожня, а також груп, у яких кожна розкладна підгрупа є нормальною (тобто, груп з умовою $N_G^d = G$), було описано у роботі [112].

Зрозуміло, що група містить розкладні підгрупи тоді і тільки тоді, коли вона містить розкладні абелеві підгрупи. Тому дослідження норми розклад-

них підгруп проводились залежно від існування у групі тих чи інших систем розкладних абелевих підгруп.

Цей факт дає підстави вважати, що норма N_G^d розкладних підгруп тісно пов'язана з нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Зокрема, було доведено, що в класі локально скінченних p -груп вказані норми збігаються (теорема 4.2.1). У класах скінченних непримарних, а також нескінченних періодичних локально нільпотентних непримарних груп має місце включення $N_G^A \supseteq N_G^d$, причому нерівність $N_G^A \neq N_G^d$ досягається [124].

У підрозділі 4.3 розглядалися періодичні локально нільпотентні групи з недедекіндовою нормою розкладних підгруп. Було встановлено, що довільна періодична локально нільпотентна група G , яка містить абелеву нециклічну підгрупу, тоді і тільки тоді має недедекіндову норму N_G^d , коли G — локально скінченна p -група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп (теорема 4.3.2).

Дослідження впливу норми N_G^d розкладних підгруп на властивості групи було продовжено і для неперіодичних груп. Зокрема, було встановлено, що неперіодична група G тоді і тільки тоді не містить розкладних підгруп, коли їх не містить норма N_G^d цієї групи. Відповідно, неперіодична група G тоді і тільки тоді містить вільну абелеву підгрупу рангу $r \geq 2$, коли вільну абелеву підгрупу такого ж рангу містить її норма N_G^d [126].

Встановлено також, що у класі неперіодичних локально розв'язних груп має місце лише одне з включень $N_G^A \supseteq N_G^d$ або $N_G^A \subseteq N_G^d$ за умови, що хоча б одна з розглядуваних норм недедекіндова, а норма N_G^d нескінченна.

Закінчуючи на цьому огляд змісту роботи, звернемо увагу на можливі напрямки досліджень груп за властивостями їх Σ -норм:

- вивчення властивостей груп, що збігаються зі своїми Σ -нормами;
- дослідження груп, в яких Σ -норми є одиничними підгрупами;
- вивчення властивостей груп, в яких Σ -норми є дедекіндовими (відповідно, недедекіндовими) підгрупами;
- дослідженням умов, за яких Σ -норми збігаються з центром групи;
- вивчення умов, за яких Σ -норми мають у групі скінченний неединичний індекс;
- дослідженням взаємозв'язків між Σ -нормами різних систем підгруп Σ (зокрема, встановлення умов, за яких ці норми збігаються).

НЕСКІНЧЕННІ ГРУПИ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ Σ -НОРМ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕСКІНЧЕННИХ ПІДГРУП

1.1 Неперіодичні групи із заданими властивостями норми нескінченних циклічних підгруп

Вивчення нескінченних груп з наперед заданими обмеженнями на нормалізатори різних систем нескінченних підгруп є об'єктом багатьох теоретико-групових досліджень. Зокрема, у роботах [153], [152], [155] вивчалися нескінченні групи з нормалізаторною умовою для нескінченних підгруп, у [144]–[145] — нескінченні групи, в яких нормалізатори усіх нескінченних підгруп мають скінченний індекс у групі.

Вивченню груп з умовою нормальності для різних систем нескінченних підгруп Σ , тобто груп, які збігаються зі своїми Σ -нормами, присвячено роботи [137], [153], [109], [154], [152], [111]. Тому природно розглянути загальнішу ситуацію та дослідити групи, в яких Σ -норми є власними підгрупами.

У цьому розділі вивчаються взаємозв'язки між властивостями групи та відповідної Σ -норми для наступних систем підгруп Σ : системи усіх нескінченних циклічних, усіх нескінченних абелевих, усіх нескінченних та усіх циклічних підгруп простих порядків групи за умови, що вказані системи підгруп непорожні. У якості визначальних обмежень обирається недедекіндовість відповідної Σ -норми або ж скінченність її індексу в групі.

У зв'язку з існуванням груп О.Ю. Ольшанського, тобто нескінченних періодичних простих груп, всі власні підгрупи яких циклічні, які водночас виступають нормами вказаних систем підгруп, періодичні групи вивчаються за умови їх локальної скінченності.

Перетин нормалізаторів усіх нескінченних циклічних підгруп неперіодич-

ної групи G будемо називати *нормою нескінченних циклічних підгруп* групи і позначатимемо її $N_G(C_\infty)$.

Якщо група G збігається зі своєю нормою $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп, то в G нормальна будь-яка нескінченна циклічна підгрупа. Будову неперіодичних неабелевих груп, що мають таку властивість, описує наступне твердження.

Теорема 1.1.1. *В неабелевій неперіодичній групі G будь-яка нескінченна циклічна підгрупа нормальна тоді і тільки тоді, коли*

$$G = A\langle b \rangle,$$

де A — неперіодична абелева група, $b^4 = 1$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Доведення. Нехай у групі G нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи. Візьмемо довільний елемент $a \in G$, $|a| = \infty$ та позначимо $A = C_G(a)$ його централізатор в G . Зрозуміло, що $A \triangleleft G$ та $[G : A] \leq 2$.

Нехай $x, y \in A$ і $|x| = |y| = \infty$. Тоді з умов $\langle x \rangle \triangleleft G$, $\langle y \rangle \triangleleft G$ випливає, що $[x, y] = 1$. Якщо $|y| < \infty$, то $|ya| = \infty$ і за доведеним

$$[x, ya] = [y, x] = 1.$$

Отже, A — абелева група. Враховуючи неабелевість групи G , робимо висновки, що жоден з елементів нескінченного порядку групи G не міститься у її центрі, а отже $[G : A] = 2$.

Візьмемо довільний елемент $b \in G$, що не належить A . Тоді $b^2 \in A$ і за доведеним $|b| < \infty$. Нехай $x \in A$ і $|x| = \infty$. Оскільки $\langle x \rangle \triangleleft G$ та $x \notin Z(G)$, то $b^{-1}xb = x^{-1}$. Якщо ж $|x| < \infty$, то $|xa| = \infty$ і

$$b^{-1}xab = (xa)^{-1} = b^{-1}xba^{-1} = x^{-1}a^{-1},$$

звідки $b^{-1}xb = x^{-1}$. Отже, для будь-якого елемента $x \in A$ маємо

$$b^{-1}xb = x^{-1}.$$

Позначимо z — довільний елемент центра $Z(G)$. Тоді з умов $|za| = \infty$,

$$b^{-1}zab = (za)^{-1} = za^{-1}$$

впливає, що $|z| \leq 2$. Отже, $|b| \leq 4$ і необхідність умов леми доведено. Їх достатність випливає з того, що будь-яка нескінченна циклічна підгрупа групи G міститься в A . \square

Наслідок 1.1.1. *Будь-яка неперіодична група без інволюцій, в якій кожна нескінченна циклічна підгрупа є нормальною, абелева.*

Оскільки кожна нескінченна циклічна підгрупа є нескінченною абелевою підгрупою групи, то клас неперіодичних груп, в яких інваріантні усі нескінченні циклічні підгрупи, містить клас неперіодичних груп, в яких інваріантними є усі нескінченні абелеві підгрупи. Нескінченні неабелеві групи, в яких кожна нескінченна абелева підгрупа нормальна, вивчалися С. М. Черніковим у [154] і були названі IH -групами. Будову неперіодичних IH -груп описує наступне твердження (теорема 1.1 [154]).

Твердження 1.1.1. *Неперіодична неабелева група тоді і тільки тоді є IH -групою, коли її центр скінченний і вона містить таку нормальну абелеву підгрупу A , що*

$$G = A\langle b \rangle,$$

де $b^4 = 1$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

З теореми 1.1.1 та твердження 1.1.1 випливає, що неперіодичні неабелеві групи, в яких нормальні усі нескінченні циклічні підгрупи, є IH -групами тоді і тільки тоді, коли вони мають скінченний центр.

Перейдемо до вивчення властивостей норми нескінченних циклічних підгруп. З теореми 1.1.1 випливає, що в групах без скруту така норма абелева. Покажемо, що вона збігається з центром групи.

Теорема 1.1.2. *Якщо G — група без скруту, то*

$$N_G(C_\infty) = Z(G).$$

Доведення. Припустимо, що $N_G(C_\infty) \neq Z(G)$. Тоді існують такі елементи $x \in N_G(C_\infty)$ та $y \in G$, що $[x, y] \neq 1$. Звідси, враховуючи означення підгрупи $N_G(C_\infty)$, одержимо $x^{-1}yx = y^{-1}$. Тому $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = E$ і оскільки $[x^2, y] = 1$, то $\langle x^2y \rangle$ є x -інваріантною підгрупою, звідки

$$x^{-1}x^2yx = x^{-2}y^{-1} = x^2y^{-1}.$$

Але у такому випадку $x^4 = 1$, що суперечить умові. □

Наслідок 1.1.2. *Будь-яка група G без скруту, що є скінченною над нормою $N_G(C_\infty)$, абелева.*

Доведення. Оскільки за теоремою 1.1.2 $N_G(C_\infty) = Z(G)$, то

$$[G : Z(G)] < \infty.$$

Відомо, що у такому випадку $|G'| < \infty$, звідки $G' = E$ і G — абелева група. □

Перейдемо до дослідження мішаних неперіодичних груп. Наступні приклади показують, що у таких групах норма нескінченних циклічних підгруп може бути власною підгрупою, яка є або центральною або абелевою нецентральною, або недедекіндовою групою.

Приклад 1.1.1. $G = H \times \langle a \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|a| = \infty$.

Неважко переконатись, що у цій групі $N_G(C_\infty) = Z(G) = \langle h_1^2 \rangle \times \langle a \rangle$.

Приклад 1.1.2. $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|a| = |b| = \infty$, $|c| = 3$, $c^{-1}ac = b$, $c^{-1}bc = a^{-1}b^{-1}$.

У цій групі $Z(G) = E$ й усі нескінченні циклічні підгрупи містяться в групі $\langle a, b \rangle$. Оскільки $\langle c \rangle \notin N_G(\langle a \rangle)$, то $\langle c \rangle \notin N_G(C_\infty)$ і

$$N_G(C_\infty) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$$

— нецентральна абелева група.

Приклад 1.1.3. $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|a| = |b| = \infty$, $|c| = 6$, $c^{-1}ac = ab$, $c^{-1}bc = a^{-1}$.

У цьому випадку $Z(G) = E$ і

$$N_G(C_\infty) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c^3 \rangle$$

— неперіодична недедекіндова група, а всі нескінченні циклічні підгрупи містяться в підгрупі $\langle a, b \rangle$.

Наступне твердження визначає достатні умови центральності норми $N_G(C_\infty)$.

Лема 1.1.1. *Якщо центр $Z(G)$ неперіодичної групи G містить елементи нескінченного порядку, то норма нескінченних циклічних підгруп $N_G(C_\infty)$ абелева і збігається з $Z(G)$.*

Доведення. З теореми 1.1.1 та умови леми випливає, що норма $N_G(C_\infty)$ абелева. Покажемо, що кожен елемент з $N_G(C_\infty)$ переставний з усіма елементами нескінченного порядку групи G .

Нехай $x \in N_G(C_\infty)$, $y \in G$, $|y| = \infty$ і $[x, y] \neq 1$. Оскільки $N_G(C_\infty)$ — неперіодична абелева група, то вона породжується елементами нескінченного порядку. Отже, можна вважати, що $|x| = \infty$. Тоді $x^{-1}yx = y^{-1}$ і $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = E$. Враховуючи, що $[x^2, y] = 1$ і підгрупа $\langle x^2y \rangle$ є x -інваріантною, одержимо

$$x^{-1}x^2yx = x^{-2}y^{-1} = x^2y^{-1},$$

звідки $x^4 = 1$, всупереч його вибору. Отже, $[x, y] = 1$ для довільного елемента $x \in N_G(C_\infty)$ і $y \in G$, $|y| = \infty$.

Нехай $y \in G$, $|y| < \infty$. Тоді $|yz| = \infty$, де $z \in Z(G)$, $|z| = \infty$. Повторюючи наведені вище міркування, знову приходимо до висновку, що

$$[\langle y \rangle, N_G(C_\infty)] = E.$$

Отже, $N_G(C_\infty) = Z(G)$ і лему доведено. \square

Безпосереднім наслідком леми 1.1.1 є наступне твердження.

Лема 1.1.2. *Якщо неперіодична група G містить нескінченну циклічну підгрупу $\langle x \rangle$ таку, що*

$$\langle x \rangle \cap N_G(C_\infty) = E,$$

то норма $N_G(C_\infty)$ абелева.

Доведення. Нехай $x \in G$, $|x| = \infty$ і $\langle x \rangle \cap N_G(C_\infty) = E$. Тоді підгрупи $\langle x \rangle$ і $N_G(C_\infty)$ нормальні в групі

$$G_1 = N_G(C_\infty)\langle x \rangle = N_G(C_\infty) \times \langle x \rangle.$$

Отже, $x \in Z(G)$ і за лемою 1.1.1 норма $N_{G_1}(C_\infty)$ абелева. Тому й норма

$$N_G(C_\infty) \subseteq N_{G_1}(C_\infty)$$

абелева, що й треба було довести. \square

Застосовуючи лему 1.1.3 до неперіодичних груп, в яких норма нескінченних циклічних підгруп періодична, приходимо до наступного висновку.

Наслідок 1.1.3. *Норма $N_G(C_\infty)$ неперіодичної групи G абелева, якщо вона не містить елементів нескінченного порядку.*

З наслідку 1.1.3 та прикладів 1.1.1 – 1.1.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 1.1.4. *Нехай G – мішана неперіодична група. Тоді її норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп є абелевою (періодичною чи неперіодичною) або неперіодичною недедекіндовою групою.*

Перейдемо до розгляду неперіодичних груп, у яких норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп неабелева. У цьому випадку за теоремою 1.1.1

$$N_G(C_\infty) = A\langle b \rangle,$$

де A – неперіодична абелева група, $b^4 = 1$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Позначимо D – підгрупу, породжену всіма елементами нескінченного порядку групи G . Тоді має місце наступне твердження.

Лема 1.1.3. *Підгрупа D абелева, містить будь-яку нескінченну циклічну підгрупу групи G і збігається з підгрупою $A \subset N_G(C_\infty)$.*

Доведення. Нехай G — неперіодична група і $N_G(C_\infty) = A\langle b \rangle$ — її норма нескінченних циклічних підгруп. Покажемо, що

$$A \leq Z(D).$$

Справді, нехай існують такі елементи $a \in A$ і $d \in D$, $|a| = |d| = \infty$, що $[a, d] \neq 1$. Тоді $a^{-1}da = d^{-1}$ і $\langle a \rangle \cap \langle d \rangle = E$.

Оскільки $[a^2, d] = 1$, то $|a^2d| = \infty$, і $\langle a^2d \rangle$ є a -інваріантною підгрупою. Звідси

$$a^{-1}a^2da = a^{-2}d^{-1} = a^2d^{-1}$$

і $a^4 = 1$, всупереч вибору елемента $a \in A$. Отже, $A \leq Z(D)$.

Враховуючи, що $N_G(C_\infty)$ — неперіодична група та використовуючи попередні міркування, приходимо до висновку, що елемент b непереставний з жодним елементом $d \in D$ нескінченного порядку. Тому $b^{-1}db = d^{-1}$.

Неважко переконатись, що $b^{-1}hb = h^{-1}$ і для довільного елемента $h \in D$, $|h| < \infty$. Справді, якщо $|h| < \infty$, то $|hz| = \infty$, де $z \in A$ і $|z| = \infty$. Оскільки $\langle hz \rangle$ є b -інваріантною підгрупою, то

$$b^{-1}hzb = hz^{-1} = h^{-1}z^{-1} = b^{-1}hbz^{-1}.$$

Звідси $b^{-1}hb = h^{-1}$.

Припустимо, що існують такі елементи $x \in D$ і $y \in D$, що $[x, y] \neq 1$. Тоді

$$b^{-1}xyb = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, b^{-1}xyb = b^{-1}xbb^{-1}yb = x^{-1}y^{-1}.$$

З цього випливає, що

$$x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

і $[x, y] = 1$, що неможливо за припущенням. Отже, підгрупа D абелева. Враховуючи попередні міркування, $D = A$ □

Теорема 1.1.3. *Неперіодична група G тоді і тільки тоді має неабелеву норму $N_G(C_\infty)$, коли всі елементи нескінченного порядку групи G породжують нормальну абелеву підгрупу D й існує елемент b порядку 2 або 4, такий що $b^{-1}db = d^{-1}$ для довільного елемента $d \in D$. При цьому*

$$N_G(C_\infty) = D\langle b \rangle.$$

Необхідність умов теореми випливає з леми 1.1.3. Їх достатність очевидна.

Наслідок 1.1.5. *Будь-яка неперіодична скінченна над нормою $N_G(C_\infty)$ група G майже абелева.*

Наслідок 1.1.6. *Якщо G — неперіодична група з неабелевою нормою $N_G(C_\infty)$, то фактор-група $G/N_G(C_\infty)$ періодична.*

1.2 Неперіодичні групи із заданими властивостями норми нескінченних абелевих підгруп

Нехай G — група, що містить хоча б одну нескінченну абелеву підгрупу. Перетин нормалізаторів усіх нескінченних абелевих підгруп групи G будемо називати *нормою нескінченних абелевих підгруп* цієї групи й позначати-
 мемо її $N_G(A_\infty)$.

Якщо $N_G(A_\infty)$ містить принаймні одну нескінченну абелеву підгрупу, то кожна така підгрупа нормальна в ній. Нескінченні неабелеві групи з такою властивістю вивчалися С. М. Черніковим у [153]– [154] і були названі там IH -групами.

Як зазначалося у попередньому пункті, будь-яка неперіодична IH -група має скінченний центр та містить таку нормальну абелеву підгрупу A , що

$$G = A\langle b \rangle, b^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$$

для довільного елемента $a \in A$ (твердження 1.1.1).

Оскільки будь-яка нескінченна циклічна підгрупа водночас є нескінченною абелевою підгрупою групи G , то у класі неперіодичних груп має місце включення

$$N_G(A_\infty) \leq N_G(C_\infty).$$

Тому враховуючи результати попереднього підрозділу, приходимо до наступного результату.

Теорема 1.2.1. *Якщо G — група без скруту, то її норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп збігається з центром групи $Z(G)$ та нормою $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп.*

Наслідок 1.2.1. *Будь-яка група без скруту, що є скінченною над нормою $N_G(A_\infty)$, абелева.*

Доведення наслідку випливає з теореми 1.2.1 та наслідку 1.1.2.

Наступна лема фактично повторює результат леми 1.1.1, який стосувався норми нескінченних циклічних груп неперіодичної групи G .

Лема 1.2.1. *Нехай G — неперіодична група, центр якої містить елементи нескінченного порядку. Тоді норма $N_G(A_\infty)$ абелева і збігається з центром групи.*

Доведення. За лемою 1.1.1 $N_G(C_\infty) = Z(G)$, тому враховуючи включення

$$N_G(A_\infty) \leq N_G(C_\infty) = Z(G)$$

й умову $N_G(A_\infty) \geq Z(G)$, одержимо $N_G(A_\infty) = Z(G)$. □

Таким чином, як і для норми нескінченних циклічних підгруп, неперіодичність центру групи є достатньою умовою центральності норми $N_G(A_\infty)$.

Наслідок 1.2.2. *Якщо центр групи G містить елементи нескінченного порядку, то*

$$N_G(A_\infty) = N_G(C_\infty) = Z(G).$$

Лема 1.2.2. *Якщо нескінченна група G містить таку нескінченну абелеву підгрупу M , що*

$$N_G(A_\infty) \cap M = E,$$

то норма $N_G(A_\infty)$ дедекіндова (а в неперіодичній групі G — відповідно, абелева) підгрупа.

Доведення. Нехай x — довільний елемент норми $N_G(A_\infty)$ і M — нескінченна абелева підгрупа, що задовольняє умови леми.

Розглянемо групу $G_1 = M \cdot N_G(A_\infty)$. Підгрупа

$$\langle x, M \rangle = \langle x \rangle \times M$$

— нескінченна абелева, а значить, нормальна в G_1 . Оскільки

$$\langle x \rangle = (\langle x \rangle \times M) \cap N_G(A_\infty) \triangleleft G_1,$$

то $\langle x \rangle \triangleleft N_G(A_\infty)$. Отже, норма $N_G(A_\infty)$ — дедекіндова група.

Покажемо, що в неперіодичній групі G норма нескінченних абелевих підгруп завжди абелева. Враховуючи доведене, це очевидно, якщо норма $N_G(A_\infty)$ неперіодична. Розглянемо випадок, коли $N_G(A_\infty)$ — періодична підгрупа.

Нехай $y \in G$ — довільний елемент нескінченного порядку. Тоді

$$\langle y \rangle \cap N_G(A_\infty) = E$$

і

$$\langle y \rangle \triangleleft G_1 = \langle y \rangle N_G(A_\infty).$$

Отже, $[G_1 : Z(G_1)] < \infty$ і за лемою 1.2.1 $N_{G_1}(A_\infty)$ абелева, а значить абелевою буде й норма $N_G(A_\infty) \leq N_{G_1}(A_\infty)$. \square

Наслідок 1.2.3. *Норма $N_G(A_\infty)$ неперіодичної групи G абелева, якщо вона не містить елементів нескінченного порядку.*

З леми 1.2.2 та її наслідку випливає наступне твердження, що характеризує будову норми нескінченних абелевих підгруп неперіодичної групи G .

Наслідок 1.2.4. *Норма нескінченних абелевих підгруп неперіодичної групи G є або абелевою (періодичною чи неперіодичною), або неперіодичною ІН-групою.*

Існування груп, що мають неперіодичну недедекіндову норму $N_G(A_\infty)$ підтверджує приклад 1.1.3, оскільки у наведеній там групі

$$N_G(A_\infty) = N_G(C_\infty).$$

Дослідимо тепер неперіодичні групи, в яких норма $N_G(A_\infty)$ неабелева. З останнього наслідку та твердження 1.1.1 випливає, що

$$N_G(A_\infty) = A\langle b \rangle,$$

де A — неперіодична абелева група, $|Z(N_G(A_\infty))| < \infty$, $b^4 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Позначимо D — підгрупу групи G , породжену всіма елементами нескінченного порядку групи G .

Лема 1.2.3. *Підгрупа D абелева.*

Доведення. Нехай G — неперіодична група і

$$N_G(A_\infty) = A\langle b \rangle$$

— її норма нескінченних абелевих підгруп. Покажемо, що $A \subseteq Z(D)$. Справді, інакше існують такі елементи $a \in A$ та $x \in D$, $|a| = |x| = \infty$, що $[a, x] \neq 1$. Тоді $a^{-1}xa = x^{-1}$ і $[a^2, x] = 1$. Оскільки $\langle a^2x \rangle$ є a -інваріантною підгрупою, то

$$a^{-1}(a^2x)a = (a^2x)^{-1} = a^{-2}x^{-1} = a^2x^{-1}.$$

Звідси $a^4 = 1$, що неможливо. Отже, $A \subseteq Z(D)$.

Враховуючи, що $N_G(A_\infty)$ неперіодична група та використовуючи попередні міркування, неважко впевнитися, що $b^{-1}db = d^{-1}$ для довільного елемента $d \in D$.

Доведемо тепер, що підгрупа D абелева. Припустимо, що всупереч цьому існують елементи $x, y \in D$ такі, що $[x, y] \neq 1$. Оскільки

$$b^{-1}xyb = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1},$$

то $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ та $[x, y] = 1$, що неможливо за припущенням. Отже, підгрупа D абелева. \square

Лема 1.2.4. *Підгрупа D містить будь-яку нескінченну абелеву підгрупу групи G і збігається з A .*

Доведення. Нехай M — довільна нескінченна абелева підгрупа групи G . Якщо M містить елементи нескінченного порядку, то вона породжується ними і тому $M \subseteq D$. Отже, далі можна вважати, що M — періодична група.

Покладемо $G_1 = M \cdot A_1$, де $A_1 = (N_G(A_\infty))'$. Оскільки

$$G'_1 \subseteq M \bigcap A_1 \subseteq Z(G_1),$$

то G_1 — не більш як 2-ступінно нільпотентна група.

Нехай $a \in A_1$, $|a| = \infty$ та $x \in M$. Тоді $[a, x] = z \in Z(G_1)$ і, оскільки $|z| = k < \infty$, то

$$[a^k, x] = [a, x]^k = 1.$$

Звідси $|a^k x| = \infty$, $a^k x \in D$ і $x \in D$. Тому знову $M \subseteq D$.

Враховуючи, що група D містить усі нескінченні абелеві підгрупи з G і є абелевою групою за лемою 1.2.3, робимо висновок, що $A = D$. \square

Наслідок 1.2.5. *Якщо G — неперіодична група, що має неабелеву норму $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп, то фактор-група $G/N_G(A_\infty)$ періодична.*

Теорема 1.2.2. *Неперіодична група G тоді і тільки тоді має неабелеву норму $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп, коли $Z(N_G(A_\infty))$ скінченний й усі елементи нескінченного порядку з G породжують нормальну абелеву підгрупу D , що містить кожну нескінченну абелеву підгрупу групи G , та існує такий елемент b порядку 2 або 4, що $b^{-1}db = d^{-1}$ для довільного елемента $x \in D$. При цьому*

$$N_G(A_\infty) = D\langle b \rangle.$$

Достатність умов теореми очевидна. Їх необхідність випливає з лем 1.2.3 та 1.2.4.

Наслідок 1.2.6. *В неперіодичній групі без інволюцій норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп абелева.*

Співставляючи твердження теорем 1.1.3 та 1.2.2, що описують властивості неперіодичних груп з недедекіндовими нормами нескінченних циклічних та нескінченних абелевих підгруп відповідно, бачимо, що такі групи мають багато спільного. Зрозуміло, що з неабелевості норми $N_G(A_\infty)$ випливає неабелевість норми $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп. Більш того, у цьому випадку

$$N_G(C_\infty) = N_G(A_\infty) = D\langle b \rangle.$$

Обернене твердження, як показує наступний приклад, місця не має.

Приклад 1.2.1. $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \times C$, $|a| = \infty$, $|b| = 2$, C — нескінченна елементарна абелева 2-група, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Неважко переконатись, що у цій групі усі нескінченні підгрупи нормальні, тому $N_G(C_\infty) = G$. З іншого боку, $N_G(A_\infty) = C$ і $N_G(A_\infty) \neq N_G(C_\infty)$. Нехай підгрупа $N_G(C_\infty)$ неабелева.

З'ясуємо умови, при яких підгрупи $N_G(A_\infty)$ та $N_G(C_\infty)$ збігаються.

Теорема 1.2.3. *Нехай G — неперіодична група, норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп якої неабелева. Підгрупи $N_G(C_\infty)$ та $N_G(A_\infty)$ збігаються тоді і тільки тоді, коли $N_G(C_\infty)$ має скінченний центр та містить кожен нескінченну абелеву підгрупу групи G .*

Доведення. Нехай $N_G(C_\infty) = N_G(A_\infty)$. За теоремою 1.2.2 підгрупа $N_G(A_\infty)$, а разом з нею й $N_G(C_\infty)$ має скінченний центр і містить будь-яку нескінченну абелеву підгрупу, що й доводить пряме твердження теореми.

Доведемо обернене твердження. Нехай $|Z(N_G(C_\infty))| < \infty$ та $N_G(C_\infty)$ містить будь-яку нескінченну абелеву підгрупу групи G . Тоді, враховуючи теореми 1.1.3 і 1.2.2 та означення норми абелевих нескінченних підгруп, одержимо $N_G(C_\infty) = N_G(A_\infty)$. □

1.3 Нескінченні локально скінченні групи із заданими властивостями норми нескінченних абелевих підгруп

У цьому підрозділі будемо розглядати нескінченні локально скінченні групи, в яких норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп недедекіндова.

Якщо норма $N_G(A_\infty)$ неабелева і містить хоча б одну нескінченну абелеву підгрупу, то усі такі підгрупи нормальні в ній, отже вона є IH -групою [154]. Будову періодичних негамільтонових IH -груп описують наступні твердження (теореми 3.1 — 3.2 [154]).

Твердження 1.3.1. *Періодична IH -група G з нескінченним центром тоді і тільки тоді негамільтонова, коли вона є або прямим добутком квазіскінченної IH -групи першого роду, що є силовською p -підгрупою даної групи за непарним простим p , та скінченної дедекіндової групи, або прямим добутком квазіскінченної IH -групи першого чи другого роду, що є силовською 2-підгрупою групи G , та скінченної абелевої групи.*

Неабелеві p -групи, що є центральними розширеннями квазіциклічної p -групи (відповідно, 2-групи) за допомогою скінченної абелевої (відповідно, гамільтонової) групи, називають квазіскінченними IH -групами першого (відповідно, другого) роду.

Твердження 1.3.2. *Будь-яка періодична ІН-група G зі скінченним центром, містить таку інваріантну абелеву або інваріантну ІН-підгрупу A , що має нескінченний центр та визначає нетривіальну циклічну фактор-групу G/A , й задовольняє наступні умови:*

1) G не має відмінних від A інваріантних підгруп з нескінченним центром, що містять A ;

2) якщо група G не є скінченним розширенням квазіциклічної групи, то усі циклічні підгрупи з A інваріантні в групі G ;

3) якщо група G є скінченним розширенням квазіциклічної групи P , то усі циклічні підгрупи фактор-групи A/P інваріантні в G/P .

З твердження 1.3.2 випливає, що у випадку, коли періодична ІН-група група G зі скінченним центром містить нескінченну абелеву підгрупу, яка є прямим добутком циклічних підгруп простих порядків або прямим добутком двох квазіциклічних підгруп, то вона є розширенням дедекіндової групи A за допомогою неединичної циклічної групи.

Отже, якщо норма нескінченних абелевих підгруп нескінченна й недедекіндова, то вона є ІН-групою одного з типів, вказаних у твердженнях 1.3.1 та 1.3.2.

Доведемо, що норма $N_G(A_\infty)$ не може бути скінченною недедекіндовою підгрупою групи.

Лема 1.3.1. *Якщо норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп нескінченної локально скінченної групи G є скінченною підгрупою, то вона дедекіндова.*

Доведення. Нехай всупереч твердженню леми підгрупа $N_G(A_\infty)$ недедекіндова. Покажемо, що за таких умов група G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп.

Припустимо, що G містить нескінченну абелеву підгрупу A , що є прямим добутком циклічних груп простих порядків. Позначимо

$$A \cap N_G(A_\infty) = A_1,$$

де $A = A_1 \times A_2$. Оскільки $|A_1| < \infty$, то $|A_2| = \infty$ і G містить нескінченну абелеву підгрупу, що має одиничний перетин з нормою $N_G(A_\infty)$. За лемою 1.2.2 $N_G(A_\infty)$ має бути дедекіндовою, що суперечить припущенню.

Отже, G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп, і за [160] є скінченним розширенням своєї повної частини P . Оскільки

$$[P : C_P(N_G(A_\infty))] < \infty$$

і P не має власних підгруп скінченного індекса, то $[N_G(A_\infty), P] = E$.

Застосовуючи твердження 1.3.1 до підгрупи $G_2 = PN_G(A_\infty)$, приходимо до висновку, що P — квазіциклічна група. Зрозуміло, що за таких умов будь-яка нескінченна абелева підгрупа групи G містить P і тому $P \subseteq N_G(A_\infty)$, що неможливо. Отже, припущення невірне. \square

Теорема 1.3.1. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних підгруп якої недедекіндова. Група G тоді і тільки тоді задовольняє умову мінімальності для підгруп, коли цю умову задовольняє норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп.*

Доведення. Необхідність умов теореми очевидна. Доведемо їх достатність.

Нехай група $N_G(A_\infty)$ задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Тоді за [160] $N_G(A_\infty)$ є скінченним розширенням своєї повної частини P .

Припустимо, що група G не задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Тоді в G міститься нескінченна абелева підгрупа B , яка є прямим добутком циклічних підгруп простих порядків.

Оскільки $|N_G(A_\infty) \cap B| < \infty$, то існує така нескінченна підгрупа $B_1 \leq B$, що

$$B_1 \cap N_G(A_\infty) = E.$$

З означення норми $N_G(A_\infty)$ випливає, що

$$B_1 \triangleleft G_1 = B \cdot N_G(A_\infty).$$

Тоді

$$G_1 = N_G(A_\infty) \times B_1$$

і $B_1 \leq Z(G)$. За лемою 1.2.2 група $N_G(A_\infty)$ має бути дедекіндовою, що неможливо за умовою. Отже, G задовольняє умову мінімальності для абелевих, а за [160] і для всіх підгруп групи.

Позначимо P_1 — повну частину групи G і припустимо, що $P_1 \neq P$. Розглянемо групу $G_1 = N_G(A_\infty)P_1$. Оскільки фактор-група

$$G_1/N_G(A_\infty) \cong P_1/P_1 \cap N_G(A_\infty)$$

— повна абелева, то за теоремою 1.16 [153] центр $Z(G_1)$ групи G_1 містить таку повну абелеву підгрупу P_2 , що $|P_2 \cap N_G(A_\infty)| < \infty$. Звідси, враховуючи опис періодичних IH -груп з нескінченним центром, що задовольняють умову мінімальності для підгруп (твердження 1.3.1, 1.3.2), приходимо до протиріччя.

Отже, $P = P_1$ і G є скінченним розширенням прямого добутку P скінченного числа квазіциклічних підгруп, що є повною частиною норми $N_G(A_\infty)$. \square

Наслідок 1.3.1. Нехай G — нескінченна локально скінченна група, що має недедекіндову норму $N_G(A_\infty)$. Якщо підгрупа $N_G(A_\infty)$ задовольняє умову мінімальності для підгруп, то G є скінченним розширенням абелевої групи P , яка є повною частиною норми $N_G(A_\infty)$.

Доведення наслідку впливає з доведення теореми 1.3.1.

Наслідок 1.3.2. Якщо норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп нескінченної локально скінченної групи G недедекіндова і є скінченним розширенням центру $Z(N_G(A_\infty))$, то G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи P .

Доведення наслідку 1.3.2 впливає з теореми 1.3.1 та твердження 1.3.1.

Наслідок 1.3.3. Якщо нескінченна локально скінченна група G має недедекіндову норму $N_G(A_\infty)$, що задовольняє умову мінімальності для підгруп, то група G є скінченним розширенням норми $N_G(A_\infty)$.

Наведемо ще одне твердження, яке характеризує нескінченні локально скінченні групи, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова.

Теорема 1.3.2. Нехай G — нескінченна локально скінченна група, що має недедекіндову норму $N_G(A_\infty)$. Якщо M — довільна нескінченна абелева підгрупа групи G , то

$$[M : M \bigcap N_G(A_\infty)] < \infty.$$

Доведення. Нехай G — досліджувана група і $N_G(A_\infty)$ — її норма нескінченних абелевих підгруп.

Якщо підгрупа $N_G(A_\infty)$ задовольняє умову мінімальності для підгруп, то твердження леми впливає з доведення теореми 1.3.1. Тому далі будемо вважати, $N_G(A_\infty)$ не задовольняє умову мінімальності для підгруп. За твердженням 1.3.2

$$N_G(A_\infty) = A\langle b \rangle,$$

де A — дедекіндова підгрупа, що містить усі нескінченні абелеві підгрупи з $N_G(A_\infty)$, $|b| < \infty$, $|Z(N_G(A_\infty))| < \infty$ і кожна циклічна підгрупа групи A нормальна в $N_G(A_\infty)$.

Нехай M — квазіциклічна підгрупа з G , $M \not\subseteq N_G(A_\infty)$. За лемою 1.2.2 $M \bigcap N_G(A_\infty) \neq E$, тому враховуючи, що M не містить власних підгруп скінченного індексу, маємо

$$|M \bigcap N_G(A_\infty)| < \infty.$$

Тоді

$$[N_G(A_\infty), M] \subseteq M \bigcap N_G(A_\infty)$$

і оскільки $M\langle b \rangle$ — локально нормальна група, то $[M, \langle b \rangle] = E$.

З іншого боку, MA — також локально нормальна підгрупа і тому за лемою 3.1. [153] MA — абелева група. Отже, $M \subseteq Z(G_1)$, де

$$G_1 = N_G(A_\infty) \cdot M.$$

Це неможливо, бо $G_1 \in IH$ -групою, що не задовольняє умову мінімальності та має нескінченний центр. Отже, всі повні абелеві групи з G містяться у $N_G(A_\infty)$.

Нехай M — довільна абелева підгрупа з G , така що

$$[M : (M \cap N_G(A_\infty))] = \infty.$$

Враховуючи, що $M \setminus (M \cap N_G(A_\infty))$ не має елементів нескінченної висоти, неважко бачити, що M містить нескінченну абелеву підгрупу M_1 , таку що

$$M_1 \cap N_G(A_\infty) = E.$$

Маємо протиріччя з лемою 1.2.2. □

Наступний приклад підтверджує, що норма $N_G(A_\infty)$ локально скінченної групи G може не містити усіх нескінченних абелевих підгруп групи, як це було у неперіодичному випадку.

Приклад 1.3.1. $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times ((\langle d \rangle \times \langle f \rangle) \rtimes \langle h \rangle)$, A — квазіциклічна p -підгрупа, $|b| = |c| = |d| = |f| = |h| = p \neq 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$, $[f, h] = d$, $[d, h] = 1$.

У цій групі $N_G(A_\infty) = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times \langle d \rangle$ і $N_G(A_\infty)$ не містить усіх нескінченних абелевих підгруп.

1.4 Неперіодичні групи із заданими властивостями норми нескінченних підгруп

Нехай G — нескінченна група. Перетин нормалізаторів усіх нескінченних підгруп групи G будемо називати *нормою нескінченних підгруп* групи G і позначатимемо її $N_G(\infty)$.

Якщо $G = N_G(\infty)$, то в G нормальні усі нескінченні підгрупи. Нескінченні неабелеві групи з такою властивістю вивчалися С. М. Черніковим [153] за умови існування в них нескінченної абелевої підгрупи і були названі *INH*-групами. Тому далі будемо вважати, що $N_G(\infty) \neq G$.

Будову розв'язних *INH*-груп описує наступне твердження (теорема 6.10 [153]).

Твердження 1.4.1. *Розв'язні INH -групи вичерпуються нескінченними гамільтоновими групами і такими неабелевими негамільтоновими групами, що є скінченними розширеннями квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп.*

З твердження 1.4.1 випливає, що будь-яка неперіодична розв'язна група, в якій кожна нескінченна підгрупа є нормальною, абелева.

Лема 1.4.1. *Якщо нескінченна група G містить таку нескінченну підгрупу M , що*

$$N_G(\infty) \cap M = E,$$

то норма $N_G(\infty)$ дедекіндова (а в неперіодичній групі – абелева) група.

Доведення. Нехай x – довільний елемент норми $N_G(\infty)$ і M – нескінченна підгрупа така, що $N_G(\infty) \cap M = E$. Тоді підгрупа

$$\langle x, M \rangle = \langle x \rangle \times M$$

нескінченна, а значить, нормальна в групі $G_1 = M \cdot N_G(\infty)$.

Оскільки

$$\langle x \rangle = (\langle x \rangle \times M) \cap N_G(\infty) \triangleleft G_1,$$

то $\langle x \rangle \triangleleft N_G(\infty)$. Отже, норма $N_G(\infty)$ – дедекіндова група.

Застосовуючи міркування, аналогічні тим, що використовувались у доведенні леми 1.2.2, неважко показати, що в неперіодичній групі норма $N_G(\infty)$ абелева. \square

Дослідимо тепер властивості норми нескінченних підгруп в неперіодичних групах. Має місце наступне твердження.

Теорема 1.4.1. *В неперіодичній групі G норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп абелева й збігається з центром групи, якщо містить елементи нескінченного порядку.*

Доведення. Якщо підгрупа $N_G(\infty)$ періодична, то її абелевість випливає з леми 1.4.1. Нехай $N_G(\infty)$ – неперіодична група. Тоді вона абелева за твердженням 1.4.1. Покажемо, що у цьому випадку $N_G(\infty) = Z(G)$.

Припустимо, що існують елементи $a \in N_G(\infty)$ та $x \in G$ такі, що $[a, x] \neq 1$. Нехай спочатку $|x| = \infty$. Тоді у групі

$$G_1 = \langle x \rangle \cdot N_G(\infty)$$

маємо $\langle x \rangle \triangleleft G_1$. Оскільки за умовою $[a, x] \neq 1$, то

$$N_G(\infty) \cap \langle x \rangle \neq E.$$

З цього слідує, що $x^k \in N_G(\infty)$ для деякого натурального числа k . Тому

$$a^{-1}x^ka = x^{-k} = x^k$$

і $x^{2k} = 1$, що неможливо за вибором елемента x . Отже,

$$N_G(\infty) \subseteq C_G(x)$$

для довільного елемента x нескінченного порядку групи G .

Нехай тепер $|x| < \infty$ і $|a| = \infty$. Розглянемо нормальне замикання

$$A = \langle a \rangle^{\langle x \rangle}$$

підгрупи $\langle a \rangle$ у групі $G_1 = \langle x \rangle N_G(\infty)$. Підгрупа A — неперіодична абелева, зі скінченним числом твірних елементів. Її періодична частина $T(A)$ скінченна, тому $A^{|T(A)|} = A_1$ — абелева група без скруту скінченного рангу і $A_1 \triangleleft G_1$.

Оскільки

$$\langle x \rangle A_1^n \triangleleft G_1$$

для будь-якого натурального числа n , то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x \rangle A_1^n = \langle x \rangle \triangleleft G_1$$

і тому $[A_1, \langle x \rangle] = E$.

Нехай $a_1 \in A_1$ і $|a_1| = \infty$. Тоді $|a_1x| = \infty$ і за доведеним вище

$$N_G(\infty) \subseteq C_G(a_1x).$$

З цього випливає, що $N_G(\infty) \subseteq C_G(x)$, тобто $N_G(\infty) \subseteq Z(G)$ і тому $N_G(\infty) = Z(G)$. \square

Наступний приклад підтверджує, що у теоремі 1.4.1 при доведенні рівності $N_G(\infty) = Z(G)$ не можна відмовитися від неперіодичності групи $N_G(\infty)$.

Приклад 1.4.1. $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $|a| = |c| = 4$, $|b| = \infty$, $c^2 = a^2$, $c^{-1}ac = a^{-1}$, $c^{-1}bc = b^{-1}$.

У цій групі

$$N_G(\infty) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} N_G(\langle c, b^{4n} \rangle) = \langle a, c \rangle,$$

$$N_G(\infty) \subseteq N_G(\langle b^4, bc \rangle) = \langle b^2, bc, a \rangle.$$

Отже,

$$N_G(\infty) \subseteq \langle a, c \rangle \bigcap \langle b^2, bc, a \rangle = \langle a \rangle.$$

З іншого боку, елемент a міститься у нормалізаторі кожної нескінченної підгрупи, тому $N_G(\infty) = \langle a \rangle$ — періодична абелева група й відмінна від центра $Z(G) = \langle a^2 \rangle$ групи.

Наслідок 1.4.1. *Якщо G — група без скруту, то $N_G(\infty) = Z(G)$.*

Наслідок 1.4.2. *Якщо норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп неперіодичної групи G має в G скінченний індекс, то $N_G(\infty) = Z(G)$.*

Наслідок 1.4.3. *Якщо норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп неперіодичної групи G відмінна від центра групи, то норма $N_G(\infty)$ періодична.*

Теорема 1.4.2. *В неперіодичній неабелевій групі G норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп тоді і тільки тоді має скінченний індекс, коли група G неабелева мішана й скінченна над центром.*

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Доведемо їх необхідність.

Нехай група G неперіодична і норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп має в G скінченний індекс. За теоремою 1.4.1

$$N_G(\infty) = Z(G).$$

Отже, група G скінченна над центром. Тоді, як відомо, її комутант скінченний. Оскільки група G — неабелева, то вона мішана. \square

Наслідок 1.4.4. *Будь-яка група G без скруту, що є скінченним розширенням норми $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп, абелева.*

1.5 Нескінченні локально скінченні групи із заданими властивостями норми нескінченних підгруп

Перейдемо до розгляду норми нескінченних підгруп у нескінченних локально скінченних групах.

Теорема 1.5.1. *Якщо норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп нескінченної локально скінченної групи G недедекіндова, то G є скінченним розширенням квазіциклічної групи, яка є повною частиною норми $N_G(\infty)$.*

Доведення. Нехай норма $N_G(\infty)$ нескінченної локально скінченної групи G нескінченна. Тоді за твердженням 1.4.1 вона є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи P , тобто

$$N_G(\infty) = PF,$$

де F — скінченна підгрупа, породжена представниками усіх суміжних класів підгрупи $N_G(\infty)$ за підгрупою P , взятих по одному з кожного класу.

Припустимо, що G містить нескінченну абелеву підгрупу B , всі силовські підгрупи якої мають просту експоненту і розглянемо підгрупу

$$G_1 = BN_G(\infty).$$

Оскільки $B \triangleleft G_1$, $BF \triangleleft G_1$ як нескінченні групи, що нормалізуються підгрупою $N_G(\infty)$, то

$$G'_1 \subseteq (BF \cap N_G(\infty)).$$

Далі з умови $|BF \cap N_G(\infty)| < \infty$ робимо висновок, що $|G'_1| < \infty$. Отже, G_1 — локально нормальна група.

Враховуючи тепер, що підгрупа P міститься у централізаторі будь-якої скінченної нормальної підгрупи групи G_1 , маємо $P \subseteq Z(G)$. Аналогічно отримуємо $C_G(FG'_1) \subseteq Z(G_1)$. Тому

$$PC_G(FG'_1) \subseteq Z(G_1)$$

і $|G_1/Z(G_1)| < \infty$. З цього випливає, що норма нескінченних підгруп групи G_1 має скінченний індекс у групі G_1 і не задовольняє умову мінімальності. За твердженням 1.4.1 підгрупа G_1 дедекіндова, що суперечить умові. Отже, G задовольняє умову мінімальності для абелевих, а за [160] і для всіх підгруп.

Припустимо, що G містить прямий добуток $(P \times P_1)$, де P_1 — квазіциклічна підгрупа, і розглянемо групу $G_2 = P_1 N_G(\infty)$. Оскільки $P_1 \triangleleft G_2$, то

$$G'_2 \subseteq (P \cdot F \cap P_1 \cdot F)$$

і тому $|G'_2| < \infty$.

Отже, $(P \times P_1) \subseteq Z(G_2)$ і $|G_2/Z(G_2)| < \infty$. З цього випливає, що норма $N_{G_2}(\infty)$ нескінченних підгруп групи G_2 має в ній скінченний індекс і містить підгрупу $(P \times P_1)$. За твердженням 1.4.1 підгрупа $N_{G_2}(\infty)$ дедекіндова і оскільки $N_G(\infty) \subseteq N_{G_2}(\infty)$, то дедекіндовою буде й норма $N_G(\infty)$, що суперечить умові. Отже, G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи P і $|G/N_G(\infty)| < \infty$.

Зауважимо, що за умов теореми норма $N_G(\infty)$ не може бути скінченною групою. В іншому випадку, застосовуючи наведені вище міркування, можна переконатись, що G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи P . Оскільки P міститься у кожній нескінченній підгрупі групи G , то $P \subseteq N_G(\infty)$, що неможливо. \square

У цій теоремі відмовитись від недедекіндовості норми $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп неможна, що підтверджує наступний приклад.

Приклад 1.5.1. $G = A \times A_1 \langle b \rangle$, де A і A_1 — квазіциклічні p -групи ($p \neq 2$), $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A_1$.

У цій групі $N_G(\infty) = A$, бо

$$A \langle b \rangle = N_G(A \langle b \rangle), A \langle ab \rangle = N_G(A \langle ab \rangle)$$

для довільного елемента $a \in A$, $a \neq 1$ і $A \langle ab \rangle \cap A \langle b \rangle = A$. Водночас група G не є скінченним розширенням квазіциклічної p -групи.

Перейдемо тепер до вивчення властивостей локально скінченних груп, у яких норма нескінченних підгруп має скінченний індекс.

Теорема 1.5.2. *Нескінченна локально скінченна неабелева група G задовольняє умову мінімальності для підгруп, якщо вона нескінченна над центром $Z(G)$ і скінченна над нормою $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп.*

Доведення. За умовою $N_G(\infty)$ нескінченна локально скінченна і тому містить нескінченну абелеву підгрупу. За означенням у ній нормальні всі нескінченні підгрупи і тому за твердженням 1.4.1 підгрупа $N_G(\infty)$ або дедекіндова, або недедекіндова і є скінченим розширенням квазіциклічної групи. У другому випадку група G задовольняє умову мінімальності для підгруп. У першому випадку центр $Z_1 = Z(N_G(\infty))$ підгрупи $N_G(\infty)$ має в ній індекс 1 або 4 і тому

$$[G : Z_1] < \infty.$$

Позначимо H підгрупу, породжену представниками усіх суміжних класів групи G за підгрупою Z_1 , взятих по одному з кожного класу. Тоді $|H| < \infty$ і $G = Z_1 H$.

Припустимо, що група Z_1 не задовольняє умову мінімальності для підгруп. Тоді її підгрупа A , породжена всіма елементами простих порядків, нескінченна і $A \triangleleft G$. Доведемо, що за таких умов

$$[G : Z(G)] < \infty.$$

Нехай $a \in A$, $h \in H$ і $[a, h] \neq 1$. Розглянемо підгрупу $G_1 = A\langle h \rangle$. Нормальне замикання $\langle a \rangle^{(h)}$ в A — скінченна і доповнювана в A підгрупа A_1 , тобто

$$G_1 = (A_1 \times B_1)\langle h \rangle,$$

де $|A_1| < \infty$, $A_1 \triangleleft G_1$.

Аналогічно, в нескінченній підгрупі B_1 виділимо нормальну в G_1 скінченну підгрупу A_2 . Продовжуючи цей процес, одержимо дві нескінченні нормальні в G_1 підгрупи K_1 і K_2 з умовою

$$K_1 \cap K_2 = E,$$

$$K_1 K_2 \cap H = E.$$

Оскільки $\langle h \rangle K_i \triangleleft G_1$ ($i = 1, 2$) як нескінченні підгрупи, що містять підгрупу $\langle h \rangle$, то

$$\langle h \rangle K_1 \cap \langle h \rangle K_2 = \langle h \rangle \triangleleft G_1.$$

Тому $[G_1 : C_{G_1}(\langle h \rangle)] < \infty$ і $[A : C_A(\langle h \rangle)] < \infty$. Отже, підгрупа

$$C = \bigcap_{h \in H} C_A(\langle h \rangle) \subseteq Z(G)$$

центральна і має в A скінченний індекс. Тоді в C можна виділити дві нескінченні підгрупи C_1 і C_2 з умовою

$$C_1 \cap C_2 = E, C_1 C_2 \cap H = E.$$

Далі отримаємо

$$C_1 H \cap C_2 H = H \triangleleft G, [G : C_{Z_1}(H)] < \infty,$$

звідки $C_{Z_1}(H) \subseteq Z(G)$, що суперечить умові. \square

Теорема 1.5.3. *Якщо нескінченна локально скінченна група G скінченна над нормою $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп, то або центр $Z(G)$ групи G скінченний, або група G скінченна над центром.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо $[G : Z(G)] < \infty$, то теорему доведено. Тому надалі будемо вважати, що група G нескінченна над центром $Z(G)$. Тоді за теоремою 1.5.2 група G задовольняє умову мінімальності для підгруп і є скінченним розширенням повної абелевої підгрупи P з норми $N_G(\infty)$. Отже,

$$G = P \cdot H,$$

де $|H| < \infty$.

Припустимо, що $|Z(G)| = \infty$. Тоді центр $Z(G)$ містить квазіциклічну підгрупу A і $AH \triangleleft G$. Оскільки $G/(A \cdot H)$ — повна абелева група, то, використовуючи теорему 1.16 [153] приходимо до висновку, що $Z(G)$ містить таку повну абелеву підгрупу A_1 , що

$$G = A_1 \cdot AH$$

і $|A_1 \cap AH| < \infty$. Оскільки $A_1 A \subseteq Z(G)$, то $|G/A_1 A| < \infty$, що суперечить припущенню. \square

Нагадаємо, що нетотожний автоморфізм нескінченної p -групи G , що є прямим добутком скінченного числа квазіциклічних груп, називається *незвідним*, якщо група G не містить допустимих відносно нього власних нескінченних повних підгруп (див. [153], означення 5.2).

Теорема 1.5.4. *Нескінченна локально скінченна група G , тоді і тільки тоді скінченна над нормою $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп, коли група*

G або скінченна над центром, або її центр скінченний і вона є скінченним розширенням прямого добутку P скінченного числа квазіциклічних p -груп за одним і тим же p , причому P — мінімальна повна нескінченна нормальна підгрупа групи G і кожний елемент з групи G , що не належить централізатору підгрупи P , індукує на P незвідний автоморфізм.

Доведення. Необхідність. Нехай група G задовольняє умову теореми. Враховуючи теорему 1.5.3 достатньо розглянути випадок, коли $|Z(G)| < \infty$. У такому випадку за теоремою 1.5.2 група G черніковська та є скінченним розширенням повної абелевої підгрупи P , тобто $G = PH$.

Припустимо спочатку, що

$$P = A_p \times A_{p'},$$

де $A_p \neq E$, $A_{p'} \neq E$. Зрозуміло, що $A_p H \triangleleft G$, $A_{p'} H \triangleleft G$, тому

$$A_p H \cap A_{p'} H = H \triangleleft G.$$

З цього випливає, що централізатор $C_P(H) \subseteq Z(G)$ і має в G скінченний індекс, що неможливо за умовою. Отже, P є p -групою для деякого простого числа p .

Припустимо, що P містить власну нескінченну нормальну в G підгрупу B . Тоді $BH \triangleleft G$ і G/BH — повна абелева група. За теоремою 1.16 [153] маємо

$$G = P_1 B H,$$

де $P_1 \subseteq Z(G)$ і $|P_1 \cap BH| < \infty$. Але у такому випадку

$$|P_1 H \cap BH| < \infty$$

і $|G/Z(G)| < \infty$, що неможливо. Таким чином, P — мінімальна нескінченна нормальна в G підгрупа.

Покажемо, що кожний елемент $x \in G \setminus C_G(P)$ діє на P незвідно. Розглянемо підгрупу $G_1 = P\langle x \rangle$, де $x \in G \setminus C_G(P)$ і припустимо, що P має власну нескінченну x -інваріантну підгрупу B . Аналогічно попереднім міркуванням одержимо

$$G_1 = P_1 B \langle x \rangle,$$

де $P_1 \subseteq Z(G_1)$ і $|P_1 \langle x \rangle \cap B \langle x \rangle| < \infty$. Але тоді

$$[G_1 : C_{G_1}(P_1 \langle x \rangle \cap B \langle x \rangle)] < \infty,$$

звідки $P \subseteq C_{G_1}(x)$, що неможливо.

Достатність. Нехай група G задовольняє умову теореми і має скінченний центр. Візьмемо довільну нескінченну підгрупу B групи G .

Якщо група B абелева, то її можна подати у вигляді прямого добутку

$$B = B_1 \times B_2,$$

де B_1 — повна частина B , $B_2 \subseteq C_G(P)$ і $N_G(B) \supseteq P$.

Нехай B — нескінченна неабелева підгрупа групи G . За такої умови B містить нескінченну повну підгрупу $P_1 \subseteq P$. Якщо $P_1 \subseteq Z(B)$, то $B \subseteq C_G(P)$ і $P \subseteq N_G(B)$.

Припустимо, що $P_1 \not\subseteq Z(G)$. Тоді $P_1 = P$, бо кожен елемент групи G , що не належить підгрупі $C_G(P)$, визначає на P незвідний автоморфізм. Отже, і у цьому випадку $P \subseteq N_G(B)$, тобто $P \subseteq N_G(\infty)$ і $|G/N_G(\infty)| < \infty$. \square

1.6 Неперіодичні групи з неабелевою нормою циклічних підгруп простих порядків

Нормою циклічних підгруп простих порядків неперіодичної групи G будемо називати перетин нормалізаторів усіх циклічних підгруп групи G , що мають складений або нескінченний порядок, та позначатимемо її $N_G(C_{\bar{p}})$.

Зрозуміло, що в неперіодичній групі G , яка збігається зі своєю нормою $N_G(C_{\bar{p}})$, інваріантними є всі циклічні підгрупи складеного чи нескінченного порядку. Такі групи за умови їх недедекіндовості вивчалися в [111] і були названі *майже дедекіндовими групами*. Будову неперіодичних майже дедекіндових груп описує наступне твердження.

Твердження 1.6.1. *Неперіодична група G є майже дедекіндовою тоді і тільки тоді, коли*

$$G = C \rtimes \langle b \rangle,$$

де C — неперіодична абелева група, $|b| = 2$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для будь-якого елемента $c \in C$.

Безпосередньо з твердження 1.6.1 випливає наступний результат.

Наслідок 1.6.1. *Будь-яка неперіодична група без інволюцій, в якій кожна циклічна підгрупа простого порядку є нормальною, абелева.*

Зрозуміло, що клас неперіодичних груп, в яких інваріантні всі нескінченні циклічні підгрупи, містить клас неперіодичних груп, в яких інваріантними є усі циклічні підгрупи простих порядків. Тому норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодичної групи міститься у нормі $N_G(C_{\infty})$ нескінченних циклічних підгруп групи:

$$N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_G(C_{\infty}).$$

Окрім того, очевидно, що в групах без скруту ці норми збігаються:

$$N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_{\infty}).$$

Тому враховуючи результати, встановлені для норми $N_G(C_\infty)$, мають місце твердження.

Теорема 1.6.1. *Якщо G — група без скруту, то її норма $N_G(C_{\bar{p}})$ є центральною підгрупою і збігається з нормою $N_G(C_\infty)$.*

Доведення. Нехай G — група без скруту, тоді вона не містить циклічних підгруп складеного порядку, а значить $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_\infty)$. За теоремою 1.1.1

$$N_G(C_\infty) = Z(G).$$

Отже, й $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$. □

Наслідок 1.6.2. *Довільна група G без скруту, що є скінченним розширенням норми $N_G(C_{\bar{p}})$, абелева.*

Доведення. Нехай $[G : N_G(C_{\bar{p}})] < \infty$. Тоді за теоремою 1.6.1 $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$, звідки $[G : Z(G)] < \infty$ і $|G'| < \infty$. Оскільки G — група без скруту, це можливо лише за умови $G' = E$. Отже, група G абелева. □

Перейдемо до вивчення мішаних неперіодичних груп. Приклади 1.1.2 та 1.1.3 з підрозділу 1.1 підтверджують, що норма $N_G(C_{\bar{p}})$, яка є власною підгрупою мішаної неперіодичної групи G , може як співпадати з нормою $N_G(C_\infty)$, так і бути відмінною від неї.

Зокрема, у групі

$$G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $|a| = |b| = \infty$, $|c| = 3$, $c^{-1}ac = b$, $c^{-1}bc = a^{-1}b^{-1}$ (приклад 1.1.2) множина циклічних підгруп простого порядку збігається з множиною нескінченних циклічних підгруп. Тому

$$N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_\infty) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$$

і норма $N_G(C_{\bar{p}})$ породжується усіма елементами нескінченного порядку групи.

Відповідно, у групі

$$G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $|a| = |b| = \infty$, $|c| = 6$, $c^{-1}ac = ab$, $c^{-1}bc = a^{-1}$ з прикладу 1.1.3 маємо:

$$N_G(C_\infty) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c^3 \rangle,$$

але $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G) = E$. Отже, $N_G(C_{\bar{p}}) \neq N_G(C_\infty)$.

Лема 1.6.1. *Якщо центр $Z(G)$ неперіодичної групи G містить елементи нескінченного порядку, то норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева і збігається з центром $Z(G)$.*

Доведення. Нехай у центрі $Z(G)$ групи міститься елемент нескінченного порядку. Тоді за лемою 1.1.1 норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп групи G абелева і збігається з центром групи $Z(G)$. Далі залишається застосувати умову $N_G(C_\infty) \supseteq N_G(C_{\bar{p}})$, з якої й випливає твердження леми. \square

Наслідок 1.6.3. *Будь-яка неперіодична група G , що є скінченним розширенням центра $Z(G)$, має абелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$.*

Лема 1.6.2. *Якщо норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодичної групи G не містить елементів нескінченного порядку, то вона абелева.*

Доведення. Нехай норма $N_G(C_{\bar{p}})$ періодична. Тоді для довільного елемента $x \in G$ нескінченного порядку $\langle x \rangle \cap N_G(C_{\bar{p}}) = E$.

Оскільки у групі $G_1 = \langle x \rangle N_G(C_{\bar{p}})$ підгрупи $\langle x \rangle$ та $N_G(C_{\bar{p}})$ є інваріантними, то $G_1 = \langle x \rangle \times N_G(C_{\bar{p}})$ і $x \in Z(G_1)$. За лемою 1.6.1 норма $N_{G_1}(C_{\bar{p}})$ групи G_1 абелева, отже норма $N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_{G_1}(C_{\bar{p}})$ також буде абелевою. \square

Враховуючи твердження леми 1.6.2 та наведені вище приклади, приходимо до наступного висновку.

Наслідок 1.6.4. *Якщо G — мішана неперіодична група, то її норма $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп простих порядків є або абелевою (періодичною чи неперіодичною), або неперіодичною неабелевою групою.*

Наведемо ще декілька достатніх умов абелевості норми $N_G(C_{\bar{p}})$.

Лема 1.6.3. *Якщо центр $Z(G)$ неперіодичної групи G містить елементи складеного порядку, то її норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева.*

Доведення. Враховуючи лему 1.6.2, достатньо розглянути випадок, коли норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодична.

Припустимо, що підгрупа $N_G(C_{\bar{p}})$ неабелева. Тоді $N_G(C_{\bar{p}})$ — неперіодична майже дедекіндова група. Оскільки за твердженням 1.6.1 центр такої групи не містить елементів простого порядку, то припущення невірне і норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева. \square

Наслідок 1.6.5. *Якщо в неперіодичній групі G існує така циклічна підгрупа $\langle x \rangle$ нескінченного чи складеного порядку, що*

$$\langle x \rangle \cap N_G(C_{\bar{p}}) = E,$$

то норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева.

Доведення. Нехай підгрупа $\langle x \rangle$ задовольняє умови наслідку. Тоді підгрупи $\langle x \rangle$ та $N_G(C_{\bar{p}})$ є інваріантними в групі

$$G_1 = \langle x \rangle N_G(C_{\bar{p}}) = \langle x \rangle \times N_G(C_{\bar{p}})$$

і $x \in Z(G_1)$. За лемами 1.6.1 та 1.6.3 норма $N_{G_1}(C_{\bar{p}})$ групи G_1 абелева, тому абелевою буде й норма $N_G(C_{\bar{p}})$ групи G . \square

Наслідок 1.6.6. *В неперіодичній групі G з неабелевою нормою $N_G(C_{\bar{p}})$, довільна циклічна підгрупа $\langle x \rangle$ нескінченного чи складеного порядку має неодиначний перетин з нормою $N_G(C_{\bar{p}})$.*

Перейдемо до розгляду мішаних неперіодичних груп, в яких норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неабелева, тобто є неперіодичною майже дедекіндовою групою.

За твердженням 1.6.1

$$N_G(C_{\bar{p}}) = C \rtimes \langle b \rangle,$$

де C — неперіодична абелева група, $|b| = 2$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для будь-якого елемента $c \in C$.

Позначимо D — підгрупу, породжену всіма елементами нескінченного порядку групи G .

Лема 1.6.4. *Якщо неперіодична група G має неабелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$, то підгрупа D , породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G , абелева й містить усі елементи непростого порядку даної групи.*

Доведення. Доведемо спочатку, що підгрупа $C \subset N_G(C_{\bar{p}})$ міститься у центрі $Z(D)$ підгрупи D . Візьмемо довільні елементи $c \in C$ та $a \in D$ такі, що $[c, a] \neq 1$. Без порушень загальності можна вважати $|a| = |c| = \infty$.

Оскільки

$$\langle a \rangle \triangleleft G_1 = \langle a \rangle N_G(C_{\bar{p}}),$$

то $c^{-1}ac = a^{-1}$ і $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = E$. Отже, $[c^2, a] = 1$, $|c^2a| = \infty$ і $\langle c^2a \rangle$ є c -інваріантною підгрупою. Але тоді

$$c^{-1}(c^2a)c = c^{-2}a^{-1} = c^2a^{-1}$$

і $c^4 = 1$, всупереч вибору елемента c . Отже, $C \subseteq Z(D)$.

Покажемо, що підгрупа D містить всі елементи складеного порядку групи G . Нехай $y \in G$ — довільний елемент складеного порядку. Тоді

$$\langle y \rangle \triangleleft G_2 = \langle y \rangle N_G(C_{\bar{p}})$$

і $[G_2 : C_{G_2}(y)] < \infty$. Отже, знайдеться елемент $c \in C$, $|c| = \infty$ такий, що $[c, y] = 1$. Оскільки $|cy| = \infty$, то $cy \in D$, звідки $y \in D$, що й треба було довести.

З'ясуємо тепер, як діє елемент b на елементи підгрупи D . Для будь-якого елемента $a \in D$, $|a| = \infty$ маємо

$$\langle a \rangle \triangleleft G_1 = \langle a \rangle N_G(C_{\bar{p}}).$$

Тому якщо $[a, b] = 1$, то $|ba| = \infty$, звідки $ba \in D$ і за доведеним $[c, ab] = 1$ для довільного елемента $c \in C$, $|c| = \infty$, що неможливо. Отже, $b^{-1}ab = a^{-1}$, де $a \in D$ — довільний елемент нескінченного порядку.

Нехай тепер $|a| < \infty$, де $a \in D$. Візьмемо елемент $c \in C$ такий, що $|c| = \infty$. Тоді $|ca| = \infty$ і

$$b^{-1}(ca)b = (ca)^{-1} = c^{-1}a^{-1} = c^{-1}b^{-1}ab,$$

тобто і у цьому випадку $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Позначимо x та y — довільні елементи групи D такі, що $[x, y] \neq 1$. Тоді

$$b^{-1}(xy)b = y^{-1}x^{-1} = b^{-1}xb b^{-1}yb = x^{-1}y^{-1},$$

звідки $[x, y] = 1$, всупереч їх вибору. Таким чином, підгрупа D абелева. \square

Наступне твердження характеризує властивості неперіодичних груп з неабелевою нормою $N_G(C_{\bar{p}})$.

Теорема 1.6.2. *Неперіодична група G має неабелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп простих порядків тоді і тільки тоді, коли всі елементи нескінченного порядку групи породжують інваріантну абелеву підгрупу D , яка містить усі елементи простих порядків групи G , й існує елемент b порядку 2 такий, що $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in D$. При цьому*

$$N_G(C_{\bar{p}}) = D \rtimes \langle b \rangle.$$

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Їх необхідність випливає з доведення леми 1.6.4. \square

Наслідок 1.6.7. *Якщо норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодичної групи G неабелева, то фактор-група $G/N_G(C_{\bar{p}})$ періодична і не містить елементів простих порядків.*

Лема 1.6.5. *Якщо в неперіодичній групі G норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неабелева й існує нормальна в G нескінченна циклічна підгрупа $\langle x \rangle$, то $N_G(C_{\bar{p}}) = G$.*

Доведення. За умовою $N_G(C_{\bar{p}}) = D \rtimes \langle b \rangle$, де D — неперіодична абелева група, $|b| = 2$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in D$ і $\langle x \rangle \triangleleft G$, $|x| = \infty$. Тоді за теоремою 1.6.2 $x \in D$, $b^{-1}xb = x^{-1}$, $[G : C_G(\langle x \rangle)] = 2$ і тому

$$G = C_G(\langle x \rangle) \rtimes \langle b \rangle.$$

Нехай y — довільний елемент непростого порядку з $C_G(\langle x \rangle)$. Тоді за лемою 1.6.4 маємо $y \in D$. Якщо $|y| = p$, де p — просте число, то, враховуючи, що $[x, y] = 1$, одержимо $|xy| = \infty$. Отже, $xy \in D$ і $y \in D$. Таким чином, $C_G(\langle x \rangle) = D$ і $N_G(C_{\bar{p}}) = G$, що й треба було довести. \square

Теорема 1.6.3. *Будь-яка неперіодична група G , що має неабелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп простих порядків, є майже дедекіндовою групою і збігається з нормою $N_G(C_{\bar{p}})$.*

Доведення. Нехай норма $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп простих порядків неперіодичної групи G неабелева. Тоді

$$N_G(C_{\bar{p}}) = D \rtimes \langle b \rangle,$$

і за теоремою 1.6.2 підгрупа D містить усі елементи простих порядків групи G , $|b| = 2$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in D$.

Припустимо, що $N_G(C_{\bar{p}}) \neq G$ і x — довільний елемент групи G , що не належить нормі $N_G(C_{\bar{p}})$. Тоді $|x| = p$, де p — деяке просте число.

Нехай $p \neq 2$. У фактор-групі $\bar{G} = G/D$ будемо мати $|\bar{b}| = 2$, $\bar{b} \in Z(\bar{G})$. Тому елемент $\bar{x}\bar{b}$ матиме порядок $2p$. З цього випливає, що його прообраз xb також є елементом простого порядку. За теоремою 1.6.2 $xb \in N_G(C_{\bar{p}})$, звідки $x \in N_G(C_{\bar{p}})$, що суперечить його вибору.

Нехай тепер $p = 2$, тобто $|x| = 2$. Тоді $|xb| = 2$ і $[x, b] = 1$. За лемою 1.6.4 для довільного елемента $a \in D$, $|a| = \infty$ виконується $[x, a] \neq 1$. Тому, враховуючи умови $D \triangleleft G$ та $[D, \langle x \rangle] \subseteq D$, можна вважати, що $x^{-1}ax = ac$, $c \in D$.

Оскільки $|x| = 2$, то $[x^2, a] = 1$, $a = x^{-2}ax^2 = acx^{-1}cx$ і $x^{-1}cx = c^{-1}$. Якщо $|c| > 2$, то $[xb, c] = 1$, $|xbc| > 2$ і за лемою 1.6.4 $xbc \in D$, звідки $x \in N_G(C_{\bar{p}})$, що неможливо. Отже, $|c| = 2$. Але тоді $[a^2, x] = 1$, $|a^2x| = \infty$ і знову $a^2x \in D$, $x \in D$. Отже, припущення невірне, $G = N_G(C_{\bar{p}})$. \square

Отже, з неабелевості норми $N_G(C_{\bar{p}})$ випливає інваріантність у групі усіх підгруп простого (зокрема, нескінченного) порядку. Тому має місце наступне твердження.

Наслідок 1.6.8. *Якщо норма $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп простих порядків неперіодичної групи G неабелева, то в групі G нормальні усі нескінченні циклічні підгрупи і має місце рівність:*

$$G = N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_{\infty}).$$

ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА НОРМУ НЕЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП

2.1 Деякі допоміжні результати

Одним із найприродніших узагальнень норми групи $N(G)$ є норма нециклічних підгруп або *нециклічна норма групи*, що є перетином нормалізаторів усіх нециклічних підгруп групи (за умови, що система таких підгруп у групі непорожня).

Нециклічна норма групи як максимальна підгрупа, що нормалізує кожну нециклічну підгрупу групи, була уведена у роботі Ф. М. Лимана [119]. У відповідності з [119] нециклічну норму у групі G будемо позначати N_G . Зрозуміло, що нециклічна норма N_G є характеристичною підгрупою групи, містить центр групи та її норму $N(G)$.

Дослідженню норми N_G нециклічних підгруп та її впливу на властивості групи присвячено цілий ряд робіт авторів [119, 125], [132]–[133]. Окрім того, нециклічна норма вивчалася Ж. Шеном, В. Ши, Дж. Жаном [86, 87]. Ними було встановлено, що у скінченній групі така норма розв'язна. Зауважимо, що останнє твердження є прямим наслідком результатів робіт Ф. М. Лимана [116]–[118].

Очевидно, що в нециклічній групі, яка збігається зі своєю нормою N_G , усі нециклічні підгрупи нормальні. Неабелеві групи з такою властивістю вивчалися Ф. М. Лиманом у [113], [116]–[118] і були названі ним \overline{N} -групами (відповідно \overline{N}_p -групами, якщо вони є p -групами). Дослідженням скінченних \overline{N} -груп також займався А. Д. Устюжанінов [149].

Слід зазначити, що до класу \overline{N} -груп належать неабелеві групи, усі власні підгрупи яких циклічні (зокрема, групи О. Ю. Ольшанського [139]). Тому вивчення \overline{N} -груп без будь-яких обмежень поєднується із значними труднощами. У [113] у якості такого обмеження було обрано бінарну ступінчатість групи.

Нагадаємо, що *бінарно ступінчатою* називається група, в якій кож-

на 2-породжена підгрупа локально ступінчата (див. [156]). Відповідно, *локально ступінчатою* називають групу, кожна нетривіальна скінченно породжена підгрупа якої містить підгрупу скінченного неодиначного індекса ([154]).

У роботах Ф. М. Лимана [119], [113] було встановлено, що *кожна бінарно ступінчата \overline{H} -група розв'язна*. Отже, у періодичному випадку бінарно ступінчаті \overline{H} -групи належать до класу локально скінченних груп.

Наступне твердження характеризує будову бінарно ступінчатих \overline{H}_p -груп. Зазначимо, що повний опис бінарно ступінчатих \overline{H} -груп можна знайти у [116]–[118], [113].

Твердження 2.1.1. *Бінарно ступінчаті \overline{H}_p -групи (p – довільне просте число) локально скінченні й вичерпуються p -групами наступних типів:*

- 1) G – гамільтонова p -група;
- 2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, $|a| = |c| = 9$, $|b| = 3$, $[a, b] = 1$, $[a, c] = b$, $[b, c] = c^3 = a^{-3}$;
- 3) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 4$, $a^4 = b^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 4) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $a^4 = b^4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, $|a| = |b| = |c| = 4$, $c^2 = a^2b^2$, $[c, b] = c^2$, $[c, a] = a^2$;
- 6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle \langle d \rangle$, $|a| = |b| = |c| = |d| = 4$, $c^2 = d^2 = a^2b^2$, $[a, c] = [d, c] = a^2$, $[b, d] = b^2$, $[c, b] = [d, a] = c^2$;
- 7) $G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = 1$, $[b, c] = h_1^2$;
- 8) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 2$, $|b| = p^m$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$;
- 9) $G = H \times \langle c \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|c| = 2^n$, $n \geq 2$;
- 10) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|a| = p^n$, $|b| = |c| = p$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$;
- 11) $G = H \times A$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, A – квазіциклічна 2-група;
- 12) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, A – квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$.

Звернемо увагу на те, що бінарно ступінчаті \overline{H}_p -групи нільпотентні класу не вище 3 і не містять елементарних абелевих підгруп порядку p^3 (останній результат буде широко використовуватись у подальших дослідженнях груп з різними обмеженнями на нециклічну норму).

Окрім того, \overline{H}_p -група G , що містить єдину підгрупу порядку p , є кватерніонною 2-групою порядку 8 або 16. Останній результат є наслідком твердження 2.1.1 та леми 1.1 роботи [113], яку сформулюємо нижче у вигляді твердження 2.1.2.

Твердження 2.1.2. *Локально скінченна p -група G тоді і тільки тоді не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^2 , коли вона є групою одного з типів:*

- 1) G — локально циклічна група;
- 2) G — кватерніонна 2-група (скінченна чи нескінченна).

Наступний твердження характеризує бінарно ступінчаті періодичні непримарні групи, в яких кожна нециклічна підгрупа є нормальною.

Твердження 2.1.3. *Бінарно ступінчаті періодичні непримарні \overline{H} -групи локально скінченні й вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) G — непримарна гамільтонова група;
- 2) $G = G_p \times \langle b \rangle$, де G_p — негамільтонова \overline{H}_p -група і $(|b|, p) = 1$;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p$, $|b| = m$, $(p, m) = 1$, $b^{-1}ab = a^r$, $(r - 1, pm) = 1$, $r^m \equiv 1 \pmod{p}$;
- 4) $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|a_1| = p^n$, $|a_2| = p \neq 2$, $|b| = m$, $n \geq 1$, $(p, m) = 1$, $[a_1, b] = 1$, $b^{-1}a_2b = a_2^r$, $(r - 1, pm) = 1$, $r^m \equiv 1 \pmod{p}$;
- 5) $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|a_1| = |a_2| = p$, $|b| = m$, $(m, p) = 1$, $m = kt$, $Z(G) = \langle b^k \rangle$, $p \equiv -1 \pmod{k}$, $(p - 1, k) = 1$, $N_G(\langle a \rangle) = C_G(\langle a \rangle) = \langle a_1, a_2, b^k \rangle$ для кожного $a \in \langle a_1, a_2 \rangle$;
- 6) $G = H \rtimes \langle b \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|b| = 3m$, $(m, 2) = 1$, $b^{-1}h_1b = h_2$, $b^{-1}h_2b = h_1h_2$.

З твердження 2.1.3 випливає, що нескінченні періодичні бінарно ступінчаті \overline{H} -групи нільпотентні класу 2 і є центральними розширеннями квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп. Окрім того, такі групи містять єдину нециклічну силовську p -підгрупу, що є негамільтоновою \overline{H}_p -групою.

Перейдемо до розгляду бінарно ступінчатих неперіодичних \overline{H} -груп. Їх вичерпний опис дає твердження 2.1.4.

Твердження 2.1.4. *Бінарно ступінчаті неперіодичні \overline{H} -групи вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 1$ ($n > 1$ при $p = 2$), $|b| = \infty$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$;
- 2) $G = H \times \langle b \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|b| = \infty$;
- 3) $G = H \times B$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, B – група ізоморфна адитивній групі двійкових дробів.

Отже, неперіодичні бінарно ступінчаті \overline{H} -групи мають комутант простого порядку, є скінченними розширеннями своїх центрів, а їх періодична частина циклічна або є групою кватерніонів.

Як було зазначено вище, до класу \overline{H} -груп належать абелеві групи, усі власні підгрупи яких циклічні. Нециклічні бінарно ступінчаті групи з такою властивістю вивчалися М.С. Черніковим, Я.Д. Половицьким та В.Л. Чечуліним у роботі [156]. Їх будову описує твердження 2.1.5.

Твердження 2.1.5. *Бінарно ступінчаті нециклічні групи, всі власні підгрупи яких циклічні, вичерпуються групами наступних типів :*

- 1) G – елементарна абелева група порядку p^2 ;
- 2) G – квазіциклічна група;
- 3) G – група кватерніонів;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p$, $|b| = q^n$, $n \geq 1$, $Z(G) = \langle b^{q^n} \rangle$, де p і q – різні прості числа.

Очевидно, що до \overline{H} -груп належать лише групи типу 3) та 4) останнього твердження.

Наведемо тепер декілька тверджень, які характеризують властивості нециклічної норми та будуть активно використовуватися у цьому розділі.

Лема 2.1.1. *Нехай G – група і N_G – її нециклічна норма. Тоді мають місце наступні твердження:*

- 1) $N_G \geq N(G) \geq Z(G)$;
- 2) $N_G = N_{N_G}$;
- 3) будь-яка нециклічна підгрупа групи N_G є її нормальною підгрупою;
- 4) підгрупа N_G абелева або є \overline{H} -групою;
- 5) якщо $H \leq G$, то $H \cap N_G \leq N_H$.

Доведення леми безпосередньо впливає з означення нециклічної норми групи.

Лема 2.1.2. *Нехай N_G — нециклічна норма групи G і H — нормальна нециклічна підгрупа цієї групи. Тоді*

$$\overline{N_G} = N_G H / H \leq N(\overline{G}) = N(G/H),$$

де $N(\overline{G})$ — норма групи \overline{G} .

Доведення. Цілком очевидно, що для доведення леми достатньо показати, що підгрупа $\overline{N_G}$ нормалізує кожну підгрупу групи \overline{G} .

Нехай $\overline{M} \leq \overline{G}$. Повний прообраз групи \overline{M} у G є нециклічною підгрупою, тому $N_G \subseteq N_G(M)$ і

$$\overline{N_G} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{M}).$$

З означення норми групи та довільності вибору підгрупи \overline{M} впливає $\overline{N_G} \subseteq N(\overline{G})$, що й треба було довести. \square

Лема 2.1.3. *Нехай G — група і N_G — її нециклічна норма. Якщо G містить таку нециклічну підгрупу H , що*

$$H \cap N_G = E,$$

то N_G є дедекіндовою групою.

Доведення. Нехай нециклічна підгрупа $H \leq G$ задовольняє умову леми. Тоді для довільного елемента $a \in N_G$ підгрупа $\langle a, H \rangle$ нециклічна, а значить N_G -допустима. Звідси

$$\langle a \rangle = (\langle a, H \rangle \cap N_G) \triangleleft N_G$$

і підгрупа N_G дедекіндова. \square

Наступні приклади підтверджують, що нециклічна норма групи може бути центральною, нецентральною дедекіндовою або негамільтоновою \overline{H} -групою.

Приклад 2.1.1. $G = (\langle a \rangle \wr P) \times C$, де $\langle a \rangle \wr P$ — вінцевий добуток груп $\langle a \rangle$ та P , $|a| = p \neq 2$, P — квазіциклічна p -група, C — періодична абелева група без елементів порядку p .

Неважко переконатись, що $N_G = N(G) = Z(G) = C$.

Приклад 2.1.2. $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = |b| = 2$, $|c| = \infty$, $c^{-1}ac = b$, $c^{-1}bc = ab$.

У цій групі $Z(G) = \langle c^3 \rangle$ і $G' = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, тому будь-яка нециклічна підгрупа або нормальна в G , або нормалізується підгрупою $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c^3 \rangle)$. Отже,

$$N_G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c^3 \rangle.$$

Приклад 2.1.3. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times C$, де $|a| = p^2$, $|b| = p$, C — нескінченна елементарна абелева p -група, $[a, b] = a^p$, $p \neq 2$.

У цій групі $Z(G) = \langle a^p \rangle \times C$, $N_G = Z(G) \times \langle b \rangle$.

Окрім цього, нециклічна норма збігається з нормою $N(G)$ групи G , оскільки елемент b переставний з довільним елементом порядку p , а довільна підгрупа, що містить елемент порядку p^2 , нормальна в G .

Приклад 2.1.4. $G = Q \times (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $Q = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів, $|x| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}xb = x^{-1}$.

У цій групі нециклічна норма $N_G = Q$ — гамільтонова група. Справді,

$$N_G \subseteq N_G(\langle h_1, bx \rangle) \cap N_G(\langle h_1, b \rangle) = (Q \times \langle bx \rangle) \cap (Q \times \langle b \rangle) = Q.$$

Покажемо, що Q нормалізує кожну нециклічну підгрупу H групи G . Це очевидно, якщо $H \subseteq \langle b, x \rangle$. Нехай $H \not\subseteq \langle b, x \rangle$, тоді H містить хоча б один елемент виду hx_i або $hx_i b$, де $h \in Q$. Отже, у будь-якому випадку $H \supset \langle h^2 \rangle$ і $N_G = Q$.

Приклад 2.1.5. $G = H \rtimes Q$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — групи кватерніонів, $[h_1, q_1] = h_1^2$, $[h_1, q_2] = 1$, $[\langle h_2 \rangle, Q] = 1$.

Неважко переконатись, що $N_G = \langle q_2 \rangle \rtimes \langle q_1 h_2 \rangle$ — негамільтонова \overline{H} -група.

Далі цьому розділі будуть вивчатися групи, в яких нециклічна норма має скінченний неединичний індекс у групі або є недедекіндовою підгрупою. Звернемо увагу, що за твердженням 2.1.5 недедекіндовість нециклічної норми рівносильна тому, що ця норма є негамільтоновою \overline{H} -групою.

2.2 Нескінченні групи, нециклічна норма яких має скінченний індекс у групі

Як зазначалося вище, неабелеві групи, що збігаються з нециклічною нормою $N_G \in \overline{H}$ -групами, тобто групами, в яких усі нециклічні підгрупи нормальні. Оскільки будова останніх за умови їх бінарної ступінчатості відома (див. твердження 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4), то природно розглянути нескінченні групи, в яких нециклічна норма має скінченний неединичний індекс.

Така задача була поставлена у роботі одного з авторів [119] й розв'язана для класу нескінченних нециклічних груп, в яких нециклічна норма локально ступінчата і має скінченний індекс у групі. Основні результати цієї роботи викладено у цьому підрозділі.

Оскільки бінарно ступінчасті \overline{H} -групи розв'язні (теорема 1.1 [113]), то нескінченні періодичні групи, в яких нециклічна норма локально ступінчата і має скінченний індекс, є локально скінченними, а неперіодичні групи з

такою ж властивістю — майже (локально) розв'язними групами. Отже, по-даліше дослідження властивостей нескінченних нециклічних груп, в яких нециклічна норма локально ступінчата і має скінченний індекс, будемо проводити відповідно у класі локально скінченних та неперіодичних майже локально розв'язних груп.

Зрозуміло, що до груп з вказаними властивостями належать, зокрема, усі нескінченні групи, що є скінченними розширеннями своїх центрів. Далі буде доведено, що такими розширеннями вичерпуються усі нескінченні групи, в яких нециклічна норма локально ступінчата й має у групі скінченний індекс.

Теорема 2.2.1. *В групі G нециклічна норма локально ступінчата і має скінченний індекс тоді і тільки тоді, коли група G нециклічна і скінченна над центром.*

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Доведемо їх необхідність. Нехай група G нескінченна, її циклічна норма N_G локально ступінчата і має в групі G скінченний індекс.

Оскільки підгрупа N_G абелева або є нескінченною локально ступінчатою \bar{H} -групою, то за твердженнями 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4 вона скінченна над центром $A = Z(N_G)$. Таким чином, $[G : A] < \infty$ і

$$G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle A.$$

У випадку $N_G = G$ теорему доведено. Тому припустимо, що $N_G \neq G$ і розглянемо групу

$$G = \langle g \rangle A.$$

Оскільки $A \subset N_G$, то в G нормальна кожна нециклічна підгрупа, що містить елемент g .

Нехай H — нормальне замикання підгрупи $\langle g \rangle$, а B — довільна скінченно породжена нециклічна підгрупа, яка містить елемент g . Тоді

$$H \triangleleft G, B \triangleleft G, H \subseteq B.$$

Оскільки

$$[B : A \cap B] \leq [G : A] < \infty,$$

то $[A \cap B] = B_1$ — скінченно породжена абелева підгрупа скінченного індекса в B . Тоді з умови

$$[A \cap B] = H_1 \subseteq B_1$$

випливає, що H_1 — також скінченно породжена абелева підгрупа і

$$H = \langle g \rangle H_1.$$

Припустимо, що підгрупа H_1 скінченна. Тоді скінченно породжена група H містить центральну циклічну підгрупу скінченного індекса. Відомо, що

група автоморфізмів такої групи скінченна [110]. Отже, $[G : C_G(H)] < \infty$ і

$$C_G(H) \cap A \subseteq Z(G).$$

Тому і у цьому випадку

$$[G : Z(G)] < \infty.$$

Нехай тепер підгрупа H_1 нескінченна. Якщо для довільного натурального числа n підгрупа $\langle g \rangle H_1^n$ нециклічна, то $\langle g, H_1^n \rangle \triangleleft G$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle g \rangle H_1^n = \langle g \rangle \triangleleft G.$$

Тому $H = \langle g \rangle$, що неможливо. Отже, існує таке натуральне число m , для якого $\langle g \rangle H_1^m$ — нескінченна циклічна підгрупа. Тоді скінченно породжена підгрупа H має в центрі циклічну підгрупу скінченного індексу. Оскільки її група автоморфізмів скінченна, то знову отримуємо

$$[G : Z(G)] < \infty.$$

Отже, у випадку $G = \langle g \rangle A$ теорему доведено.

Нехай тепер

$$G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle A$$

і $n > 1$. Позначимо $G_i = \langle g_i \rangle A$, $i = 1, \dots, n$. Тоді

$$[G : G_i] < \infty, [G_i : Z(G_i)] < \infty, [G : Z(G_i)] < \infty$$

і оскільки

$$\bigcap_{i=1}^n Z(G_i) \subseteq Z(G),$$

знову маємо $[G : Z(G)] < \infty$. □

У [70] доведено, що групами, скінченними над центром, вичерпуються всі групи, в яких кожна підгрупа майже нормальна. Тому має місце наступне твердження.

Наслідок 2.2.1. *У нециклічній групі G нециклічна норма локально ступінчата і має скінченний індекс тоді і тільки тоді, коли кожна підгрупа групи G майже нормальна.*

Наслідок 2.2.2. *Якщо в локально ступінчатій групі нециклічна норма має скінченний індекс, то будь-яка її Σ -норма також має скінченний індекс.*

Розглянемо тепер деякі питання, пов'язані із властивостями самої нециклічної норми групи за умови скінченності її індексу в групі.

Перш за все зауважимо, що з умови скінченності індексу нормалізатора кожної нециклічної підгрупи групи G взагалі кажучи не впливає скінченність індексу нециклічної норми у цій групі. Цей факт підтверджує наступний приклад.

Приклад 2.2.1. $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = |b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

У цій групі усі нециклічні підгрупи (а значить, і їх нормалізатори) мають скінченний індекс у групі, проте

$$N_G = \langle b^2 \rangle = Z(G).$$

Справді,

$$N_G(\langle a^{2^n}, b \rangle) = \langle a^{2^{n-1}}b \rangle$$

для всіх натуральних чисел n . Оскільки

$$N_G \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} N_G(\langle a^{2^n}, b \rangle) = \langle b \rangle$$

і

$$N_G \subseteq N_G(\langle a^{2^n}, ab \rangle) = \langle ab \rangle,$$

то

$$N_G \subseteq \langle b \rangle \bigcap \langle ab \rangle = \langle b^2 \rangle = Z(G).$$

Отже, $N_G = \langle b^2 \rangle$ і має нескінченний індекс в групі G .

У прикладах нескінченних груп, наведених у попередньому підрозділі (приклади 2.1.1 – 2.1.4), нециклічна норма є дедекіндовою підгрупою. Покажемо, що вона не може бути нетривіальною \overline{H} -групою в групах класу, що вивчається.

Теорема 2.2.2. *Нециклічна норма N_G нескінченної локально скінченної групи G дедекіндова, якщо $1 < |G/N_G| < \infty$.*

Доведення. Нехай G – локально скінченна група, яка задовольняє умову

$$1 < |G/N_G| < \infty.$$

Припустимо, що $N_G \in \overline{H}$ -групою. Тоді з тверджень 2.1.1 та 2.1.3 випливає, що N_G – група одного з наступних типів:

1) $N_G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times \langle d \rangle$, де A – квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $|d| = n$, $(n, p) = 1$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$;

2) $N_G = A \times H \times \langle d \rangle$, де A – квазіциклічна 2-група, H – група кватерніонів і $(|d|, 2) = 1$.

Візьмемо довільний елемент $x \in G \setminus N_G$ і розглянемо підгрупу

$$G_1 = \langle x \rangle N_G.$$

Оскільки група G локально скінченна, то існує скінченна нециклічна нормальна в G_1 підгрупа F , що містить елемент x . Тоді $A \subset C_{G_1}(F)$ і $A \subseteq Z(G)$.

Припустимо спочатку, що N_G є негамільтоновою \overline{H} -групою. Виділимо два можливих випадки.

1. N_G — \overline{H} -група першого типу. Якщо $x \in G \setminus N_G$ і $|x| = p$, то для $a \in A$ і $|a| = p$ маємо $\langle a, x \rangle \triangleleft G_1$, тому

$$[G_1 : C_{G_1}(\langle a, x \rangle)] \leq p.$$

З цього випливає, що існує елемент $h \in N_G \setminus \langle a \rangle$ порядку p переставний з x . Тоді

$$\langle x, h \rangle \cap \langle a, b, c \rangle = \langle h \rangle \triangleleft G_1,$$

що неможливо. Отже, N_G містить всі елементи порядку p групи G .

Припустимо, що підгрупа N_G містить всі елементи порядку p^{n-1} даної групи і доведемо, що це твердження правильне для всіх елементів групи G порядку p^n .

Нехай $x \in G \setminus N_G$, $|x| = p^n$, $n > 1$. Оскільки $[A, \langle x \rangle] = E$, то

$$\langle A, x \rangle = A \times \langle x_1 \rangle,$$

причому $x_1 \notin N_G$. Тому $|x_1| \neq p$, $\langle a, x_1 \rangle \triangleleft G_1$ і $\langle x_1^p \rangle \triangleleft G_1$. З цього випливає, що $x_1^p \in N_G$ за припущенням. Але у такому випадку $Z(N_G)$ містить нециклічну підгрупу порядку p^2 , що неможливо. Отже, N_G не може бути \overline{H} -групою першого типу.

2. N_G — \overline{H} -група другого типу. Нехай a, x — довільні інволюції, де $x \in G \setminus N_G$, $a \in A$. Тоді

$$\langle a, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G,$$

і $[G_1 : C_{G_1}(\langle a, x \rangle)] \leq 2$.

Отже, існує елемент $h \in H$ порядку 4 переставний з x . Тоді для елемента $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$ маємо $\langle a_2 h, x \rangle \triangleleft G_1$. З іншого боку,

$$H \not\subseteq N_{G_1}(\langle a_2 h, x \rangle).$$

Отже, нециклічна норма N_G містить усі інволюції групи G .

З цього випливає, що група G також має тільки три інволюції. За теоремою 3.16 [113] будь-яка нескінченна 2-група з нескінченним центром і трьома інволюціями є прямим добутком

$$G = A \times Q,$$

де A — квазіциклічна 2-група, а Q — скінченна чи нескінченна кватерніонна 2-група. Оскільки за теоремою 2.2.1 група G є скінченням розширенням свого центра, то підгрупа Q скінченна.

Нехай $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$, де $|q_1| = 2^n$, $n > 2$, $|q_2| = 4$, $q_1^{2^{n-1}} = q_2^2$, $q_2^{-1}q_1q_2 = q_1^{-1}$. Очевидно, що у цьому випадку

$$G = \langle q_1 \rangle N_G.$$

Візьмемо елемент $a_n \in A$ і $|a_n| = 2^n$. Тоді $\langle a_n q_1, a \rangle \triangleleft G$, $a \in A$, $|a| = 2$. Але

$$[a_n q_1, q_2] = q_1^{-2} \notin \langle a_n q_1, q_2 \rangle.$$

Отже, $|Q| = 8$ і $G \in \overline{H}$ -групою, що суперечить умові теореми.

Нехай тепер G не є p -групою. Позначимо через $G_{p'}$ силовську p' -підгрупу групи G , а через $(N_G)_p$ — силовську p -підгрупу її нециклічної норми N_G . Нехай далі y — довільний елемент порядку p з N_G у випадку, коли $N_G \in \overline{H}$ -групою першого типу, і $y = a_2 h$, де $|a_2| = |h| = 4$, $a_2 \in A$, $h \in H$ у випадку, коли $N_G \in \overline{H}$ -групою другого типу. Для довільного p' -елемента $x \in G$ з умови $[A, \langle x \rangle] = E$ слідує $\langle x \rangle \triangleleft \langle x \rangle N_G$. Тому $[G_{p'}, (N_G)_p] = E$.

Якщо $G_{p'}$ нециклічна, то

$$\langle y, G_{p'} \rangle \triangleleft (G_{p'} \times (N_G)_p)$$

і $\langle y \rangle \triangleleft (N_G)_p$, що неможливо. Отже, $G_{p'}$ — циклічна підгрупа і $G \in \overline{H}$ -групою, що суперечить умові теорем. \square

Наступне твердження характеризує нескінченні локально скінченні групи, що мають недедекіндову нециклічну норму N_G .

Теорема 2.2.3. *Нескінченна локально скінченна група G з недедекіндовою нециклічною нормою $N_G \in$ скінченням розширенням квазіциклічної підгрупи A , причому $N_G \in$ підгрупою централізатора $C_G(A)$.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. Якщо $G = N_G$, то $G \in$ негамільтоновою \overline{H} -групою і твердження теореми випливає з опису таких груп. Отже, далі будемо вважати, що $G \neq N_G$.

Покажемо, що група G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Якщо це не так, то вона містить нескінченну абелеву підгрупу A , яка є прямим добутком підгруп простих порядків. З недедекіндовості підгрупи N_G та опису негамільтонових \overline{H} -груп (твердження 2.1.1, 2.1.3) випливає, що $|A \cap N_G| < \infty$.

Покладемо

$$A = A_1 \times A_2,$$

де $A_1 = A \cap N_G$ і $A_2 \cap N_G = E$ та розглянемо підгрупу

$$G_1 = N_G A = N_G A_2.$$

Оскільки $|A_2| = \infty$, то підгрупа A_2 нециклічна, звідки $A_2 \triangleleft G_1$ і

$$G_1 = N_G \times A_2.$$

Отже, $G_1 = N_{G_1}$ і G_1 є негамільтоновою \overline{H} -групою, що неможливо. Тому група G задовольняє умову мінімальності для абелевих, а за результатами роботи [160] і для всіх підгруп.

Припустимо, що G містить прямий добуток P двох квазіциклічних підгруп та покладемо

$$G_2 = N_G P.$$

Враховуючи, що N_G є негамільтоновою \overline{H} -групою та використовуючи їх опис, одержимо $[P : P \cap N_G] = \infty$. Тому фактор-група

$$G_2/N_G \cong P/P \cap N_G$$

— повна абелева і за теоремою 1.16 [153] група G_2 скінченна над центром. У такому випадку за теоремою 2.2.2 G_2 є \overline{H} -групою, що суперечить їх опису (твердження 2.1.1, 2.1.3). Отже, G є скінченим розширенням квазіциклічної підгрупи A .

Покажемо, що $N_G \subseteq C_G(A)$. Якщо $|N_G| = \infty$, то з тверджень 2.1.1 та 2.1.3 випливає, що $A \subseteq Z(N_G)$. Нехай $|N_G| < \infty$. Тоді

$$[G : C_G(N_G)] < \infty$$

і $A \subseteq C_G(N_G)$. Отже, у будь-якому випадку $N_G \subseteq C_G(A)$. □

З останньої теореми випливає ряд тверджень, які узагальнюють теорему 2.2.2 для локально скінчених груп, що є скінченими розширеннями своєї нециклічної норми.

Наслідок 2.2.3. *Нециклічна норма N_G нескінченної локально скінченної групи G дедекіндова, якщо виконується хоча б одне з наступних тверджень:*

- 1) $1 < [G : N_G] < \infty$;
- 2) група G не задовольняє умову мінімальності для підгруп;
- 3) група G містить прямий добуток двох квазіциклічних підгруп.

Наслідок 2.2.4. *Будь-яка нескінченна локально скінченна група G , нециклічна норма N_G якої нескінченна й недедекіндова, є \overline{H} -групою.*

Наслідок 2.2.5. *Якщо нескінченна локально скінченна група містить неінваріантну нециклічну підгрупу, то її нециклічна норма скінченна або є дедекіндовою групою.*

Розглянемо тепер властивості неперіодичних майже локально розв'язних груп, в яких норма N_G має скінченний неодиначний індекс. У наступній теоремі стверджується, що нециклічна норма такої групи не може бути неперіодичною \overline{H} -групою.

Теорема 2.2.4. *Нециклічна норма N_G майже локально розв'язної неперіодичної групи G абелева, якщо $1 < |G/N_G| < \infty$.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умові теореми, але її нециклічна норма $N_G \in \overline{H}$ -групою. Тоді з опису неперіодичних \overline{H} -груп (твердження 2.1.4) слідує, що N_G — \overline{H} -група одного з типів:

- 1) $N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p^n$ ($n > 1$ при $p = 2$), $|b| = \infty$, $[a, b] = a_1$, $|a_1| = p$;
- 2) $N_G = Q \times \langle b \rangle$, де Q — група кватерніонів, $|b| = \infty$;
- 3) $N_G = Q \times B$, де Q — група кватерніонів, B — група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів.

Оскільки $|G/Z(G)| < \infty$ і $Z(G) \subset N_G$, то G є скінченним розширенням підгрупи Z_1 центру $Z(G)$, причому Z_1 — циклічна у випадках 1 і 2 та ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів у випадку 3. Тоді комутант групи G скінченний, її періодична частина $T(G)$ є скінченною підгрупою, а $G/T(G)$ — локально циклічна група.

Покажемо, що $T(G)$ має єдину підгрупу простого порядку. Нехай $c \in T(G)$, $|c| = q$, q — просте число і $c \notin N_G$. Розглянемо підгрупу

$$G_1 = \langle c \rangle N_G.$$

Для довільного натурального числа k маємо $\langle c, Z_1^{3^k} \rangle \triangleleft G_1$. Тому

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \langle c, Z_1^{3^k} \rangle = \langle c \rangle \triangleleft G_1.$$

Оскільки періодична частина $T(N_G)$ підгрупи N_G нормальна в G , то

$$\langle c \rangle \times T(N_G) = T(G_1).$$

Візьмемо тепер довільну підгрупу F з G_1 , що містить елемент c . Якщо вона циклічна, то $F \triangleleft G_1$ за доведеним з урахуванням будови $T(G_1)$. Якщо F — нециклічна підгрупа, то $F \triangleleft G_1$. Отже, в групі $G_1/\langle c \rangle$ нормальні всі підгрупи і тому вона абелева, що неможливо. Цим доведено, що $T(G)$ має єдину підгрупу простого порядку і тому є або циклічною p -групою, або кватерніонною 2-групою.

Нехай $T(G)$ — кватерніонна 2-група:

$$T(G) = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = 2^m, |h_2| = 4, h_1^{2^{m-1}} = h_2^2, h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1}.$$

Легко показати (див. вище міркування для елемента c), що

$$\langle h_1 \rangle \triangleleft \langle h_1 \rangle N_G, \langle h_1, h_2 \rangle \triangleleft \langle h_1, h_2 \rangle N_G = \langle h_1 \rangle N_G.$$

Тому

$$h_1^{-1}(h_1 h_2)h_1 = (h_1 h_2)^{-1}.$$

З іншого боку, $h_1^{-1}(h_1 h_2)h_1 = h_2 h_1$. Тому

$$(h_1 h_2)^{-1} = h_2 h_1, h_2^{-2} = h_1^2, |h_1| = 4.$$

Отже, $T(G)$ — група кватерніонів, якщо вона є кватерніонною 2-групою.

Далі розглянемо кожен з трьох випадків окремо.

1. Нециклічна норма N_G є \overline{H} -групою першого типу. Тоді

$$G = T(G) \rtimes \langle x \rangle, |x| = \infty.$$

Нехай $T(G) = \langle g \rangle \neq \langle a \rangle$, $|g| = p^t > |a|$. Візьмемо елемент $z \in Z(G)$ такий, що $|z| = \infty$. Тоді

$$[b, gz] = [b, g] \in (\langle g^{p^{t-1}}, gz \rangle \cap \langle g \rangle) = \langle g^{p^{t-1}} \rangle,$$

звідки $[b, g^p] = 1$ і далі $[b, a] = 1$, що неможливо за умовою. Отже, $\langle g \rangle = \langle a \rangle$.

Оскільки

$$[a, x] \in (\langle a \rangle \cap \langle a^{p^{n-1}}, x \rangle) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle,$$

то комутант групи G має порядок p і в G нормальні всі нециклічні підгрупи, що неможливо за умовою теореми.

Припустимо тепер, що $T(G)$ — група кватерніонів. Тоді $|a| = 4$ і a можна вважати одним з твірних елементів підгрупи $T(G)$.

Нехай $T(G) = \langle a, h \rangle$. Оскільки $\langle a \rangle \triangleleft G$, то або $[a, x] = 1$, або $[a, xh] = 1$. Позначимо через x_1 той з елементів x або xh , яки переставний з елементом a . Тоді

$$G = \langle a, h \rangle \rtimes \langle x_1 \rangle, [x_1, a] = 1.$$

Отже, твірний елемент $b \in N_G$ можна записати через твірні елементи групи G в загальному вигляді $b = x_1^k a^l h^m$, причому $m \equiv 0 \pmod{2}$, оскільки $[a, b^2] = a^2$.

Оскільки

$$[b, x_1] = [x_1^k a^l h^m, x_1] = [h^m, x_1] \in (\langle a^2, x_1 \rangle \cap \langle a, h \rangle) = \langle a^2 \rangle,$$

то $[h, x_1] \in \langle a^2 \rangle$. Отже, комутант групи G має порядок 2 і в G нормальні всі нециклічні підгрупи, що неможливо за умовою теореми. Отже, N_G не може бути \overline{H} -групою першого типу.

2. Нехай $N_G \in \overline{H}$ -групою другого типу. Тоді

$$G = Q \rtimes \langle x \rangle,$$

де $Q \subset N_G$ і є групою кватерніонів. Оскільки

$$[Q, \langle x \rangle] \subseteq (Q \cap (Q^2 \times \langle x \rangle)) = Q^2,$$

то комутант групи G має порядок 2 і в G нормальні всі нециклічні підгрупи, що неможливо за умовою теореми. Отже, N_G не може бути \overline{H} -групою другого типу.

3. Нехай $N_G \in \overline{H}$ -групою третього типу. Оскільки фактор-група G/N_G скінченна, G/Q — локально циклічна група і

$$G/N_G \simeq (G/Q)/(N_G/Q),$$

то G/N_G — циклічна група. Тоді $G = \langle g \rangle N_G$ для деякого елемента $g \in G$.

Покажемо, що $B \subset Z(G)$. Припустимо, що $[b, g] \neq 1$ для деякого елемента $b \in B$. При цьому $\langle g \rangle \cap B = E$. Дійсно, в іншому випадку $g^k = b^m$ для деяких цілих відмінних від нуля чисел k і m . Тоді $g^{-1}bg = b_1 \neq b$ і

$$g^{-1}b^m g = b^m = b_1^m.$$

Звідси $b_1 = b$, що неможливо.

Оскільки

$$\langle B^{p^n}, g \rangle \triangleleft \langle g \rangle N_G$$

для простого числа $p \neq 2$ і довільного натурального числа n , то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle B^{p^n}, g \rangle = \langle g \rangle \triangleleft \langle g \rangle N_G.$$

Звідси $B \subset Z(G)$ і $B\langle g \rangle$ — абелева група, періодична частина якої одинична, або має циклічне доповнення B_1 .

Оскільки $Q \subset N_G$ і $S \triangleleft G$, то $[Q, B] = E$ і

$$G = Q \times B_1.$$

Враховуючи, що B/B_1 — скінченна циклічна група, робимо висновок, що B_1 має той же тип, що і підгрупа B . Тому B і B_1 ізоморфні. Це означає, що $G \in \overline{H}$ -групою, що суперечить умові теореми. Отже, нециклічна норма N_G не може бути \overline{H} -групою третього типу. \square

Отже, як і в періодичному випадку зі скінченності індекса нециклічної норми у групі та її недедекіндовості впливає інваріантність усіх нециклічних підгруп у групі.

2.3 Локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп

У цьому підрозділі вивчаються локально скінченні p -групи ($p \neq 2$), нециклічна норма яких є недедекіндовою групою.

Наведемо спочатку кілька тверджень, що характеризують властивості локально скінченних p -груп (p — довільне просте число), нециклічна норма яких недедекіндова.

Лема 2.3.1. *Локально скінченна p -група G (p — довільне просте число), нециклічна норма якої недедекіндова, не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 .*

Доведення. Припустимо, що всупереч твердженню леми, група G містить елементарну абелеву підгрупу A порядку p^3 . Оскільки за твердженням 2.1.1 нециклічна норма N_G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 , то $A \not\subseteq N_G$.

Якщо $|A \cap N_G| \leq p$, то A містить нециклічну абелеву підгрупу B порядку p^2 таку, що $B \cap N_G = E$. За лемою 2.1.3 норма N_G має бути дедекіндовою, що неможливо. Отже,

$$|A \cap N_G| = p^2.$$

Нехай $A = A_1 \times \langle b \rangle$, де

$$A_1 = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle, \langle b \rangle \cap N_G = E.$$

Оскільки підгрупи $\langle a_i \rangle \times \langle b \rangle$, $i = 1, 2$ нециклічні, то вони нормальні у підгрупі $G_1 = \langle b \rangle N_G$. З цього випливає, що

$$\langle b \rangle = (\langle a_1 \rangle \times \langle b \rangle) \cap (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \triangleleft G_1.$$

Але у такому випадку

$$G_1 = \langle b \rangle \times N_G,$$

$b \in Z(G_1) \leq N_{G_1}$ і $G_1 \in \overline{H}_p$ -групою, що містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3 . Протиріччя. \square

Нагадаємо (див. [110]), що *нижнім шаром* p -групи G називається підгрупа $\omega(G)$, породжена всіма елементами порядку p даної групи. Відповідно, підгрупу $\omega_m(G)$, породжену всіма елементами групи G , порядок яких не перевищує p^m називають *m -шаром* p -групи G .

Лема 2.3.2. *Якщо локально скінченна p -група G (p — довільне просте число) має недедекіндову нециклічну норму N_G , нижній шар $\omega(N_G)$ якої є центральною нециклічною підгрупою, то*

$$\omega(G) = \omega(N_G).$$

Доведення. Нехай нециклічна норма N_G даної групи недедекіндова та має нециклічний нижній шар $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$. Тоді за твердженням 2.1.1

$$\omega(N_G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, |a| = |b| = p.$$

Припустимо, що існує елемент $x \in G$, $|x| = p$, що не належить до $\omega(N_G)$. Тоді підгрупи $\langle x, a \rangle$ та $\langle x, b \rangle$ — абелеві нециклічні, а відтак, нормальні у групі $G_1 = \langle x \rangle N_G$. Отже,

$$\langle x \rangle = \langle x, a \rangle \cap \langle x, b \rangle \triangleleft G_1$$

і $x \in Z(G_1)$. Але у такому випадку G_1 містить елементарну абелеву групу порядку p^3 , що неможливо за лемою 2.3.1. \square

Лема 2.3.3. *Нехай G — локально скінченна p -група (p — довільне просте число), що має недедекіндову нециклічну норму N_G . Якщо центр $Z(N_G)$ локально циклічний, то елемент $a \in Z(N_G)$ простого порядку p міститься у кожній циклічній підгрупі складеного порядку даної групи.*

Доведення. Нехай $a \in Z(N_G)$, $|a| = p$ і $x \in G$, $|x| = p^k > p$. Припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle = E$. Тоді

$$\langle x, a \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

і $\langle x^p \rangle \triangleleft G_1$. Звідси $x^{p^{k-1}} \in Z(G_1)$.

Якщо $x^{p^{k-1}} \notin N_G$, то для довільного елемента $y \in N_G$ одержимо

$$\langle y \rangle = \langle y \rangle \times \langle x^{p^{k-1}} \rangle \cap N_G \triangleleft N_G,$$

що неможливо. Значить, $x^{p^{k-1}} \in N_G$ і тому $Z(N_G)$ — нециклічна підгрупа. Отже, припущення невірне, $a \in \langle x \rangle$. \square

Перейдемо до вивчення локально скінченних p -груп ($p \neq 2$), нециклічна норма яких недедекіндова. Оскільки серед дедекіндових p -груп при $p \neq 2$ немає гамільтонових, то умова недедекіндовості нециклічної норми у p -групі при $p \neq 2$ рівносильна умові її неабелевості.

Теорема 2.3.1. *Будь-яка нескінченна локально скінченна p -група G ($p \neq 2$), що має неабелеву нециклічну норму N_G , є $\overline{H_p}$ -групою виду:*

$$G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де A — квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$.

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G$. Тоді за наслідком 2.2.5 $|N_G| < \infty$. З іншого боку, за теоремою 2.2.3

$$G = A \cdot H,$$

де A — квазіциклічна p -група і $|H| < \infty$.

Оскільки $p \neq 2$, то за наслідком 1.3 [153] підгрупа A центральна і тому $A \subseteq N_G$. Протиріччя. Отже, припущення невірне, $G = N_G$ і $G \in \overline{H}_p$ -групою типу 12) твердження 2.1.1. \square

Отже, якщо нециклічна норма нескінченної локально скінченної p -групи ($p \neq 2$) неабелева, то усі нециклічні підгрупи даної групи є нормальними.

Безпосередньо із теореми 2.3.1 випливають також наступні твердження.

Наслідок 2.3.1. *Нехай G — нескінченна локально скінченна p -група ($p \neq 2$). Якщо G містить неінваріантну нециклічну підгрупу, то її нециклічна норма N_G абелева.*

Наслідок 2.3.2. *Будь-яка локально скінченна p -група G ($p \neq 2$), що має власну неабелеву нециклічну норму N_G , скінченна.*

Наступна теорема в об'єднанні з теоремою 2.3.1 дає повний опис локально скінчених p -груп ($p \neq 2$), нециклічна норма яких неабелева.

Теорема 2.3.2. *Скінченні p -групи ($p \neq 2$), що мають неабелеву нециклічну норму N_G , вичерпуються групами типів:*

- 1) G — скінченна \overline{H}_p -група, $N_G = G$;
- 2) $G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = p^n$, $n > 1$, $|b| = |c| = p$, $[b, c] = x^{p^{n-1}}$, $[x, c] = x^{p^{n-1}\alpha}b^\beta$, $(\beta, p) = 1$; $N_G = (\langle x^p \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$;
- 3) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m > 1$, $k \geq m + r$, $Z(G) = \langle x^{p^{r+1}} \rangle \times \langle b^{p^{r+1}} \rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}}b^{p^{m-1}t}$, $(s, p) = 1$, $N_G = \langle x^{p^r} \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Тому будемо доводити лише їх необхідність.

Якщо $G = N_G$, то G — група типу 1) даної теореми.

З неабелевості підгрупи N_G та твердження 2.1.1 випливає, що N_G є групою одного з типів:

- 1) $N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, $|a| = |c| = 9$, $|b| = 3$, $[a, c] = b$, $[b, c] = a^{-3} = c^3$;
- 2) $N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = p^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = p$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$, $[a, c] = 1$;
- 3) $N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^n$, $n > 1$, $|b| = p^m$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$.

Далі будемо розглядати кожен з вказаних для підгрупи N_G випадків окремо.

Лема 2.3.4. Якщо скінченна p -група G має нециклічну норму

$$N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle, |a| = |c| = 9, |b| = 3, [a, c] = b, [b, c] = a^{-3} = c^3,$$

то $G = N_G$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо, що норма N_G містить усі елементи групи G , порядок яких не перевищує 3^2 .

Нехай $x \in G \setminus N_G$, $|x| = p$. Оскільки $\langle a^3 \rangle = Z(N_G) \triangleleft G$, то $[a^3, x] = 1$ і $\langle a^3, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$. Тоді з умови

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle a^3, x \rangle \cap N_G = \langle a^3 \rangle,$$

випливає, що

$$\langle x, a \rangle \cap \langle a, b \rangle = \langle a \rangle \triangleleft G_1.$$

Протиріччя. Отже, підгрупа N_G містить усі елементи простого порядку групи G .

Припустимо тепер, що існує елемент $x \in G \setminus N_G$, $|x| = 3^2$. Тоді з умови $x^3 \in N_G$ та леми 2.3.3 випливає, що $x^3 \in \langle a^3 \rangle$. Враховуючи, що

$$\langle a^3, b \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G,$$

маємо $\langle a^3, b, x \rangle = \langle x, b \rangle$. Отже,

$$G' \subseteq \langle x, b \rangle \cap N_G = \langle a^3, b \rangle.$$

Оскільки будь-яка нециклічна підгрупа групи G_1 містить нижній шар $\omega(G_1) = \langle a^3, b \rangle$, то $G \in \overline{H}_3$ -групою, що неможливо за твердженням 2.1.1. Тому нециклічна норма містить усі елементи групи, порядок яких не перевищує 9.

Покажемо нарешті, що група G не містить елементів порядку 3^3 . Справді, нехай $x \in G$, $|x| = 3^3$. Тоді за доведеним вище $x^3 \in N_G$. Оскільки за лемою 2.3.3

$$\langle x \rangle \cap \omega(N_G) = \langle a^3 \rangle,$$

то група $\langle x, a^3, b \rangle$ має циклічну підгрупу індекса 3 і за теоремою 12.5.1 з [151] $[x, b] \subseteq \langle a^3 \rangle$. Отже,

$$\langle x, b \rangle = \langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

і тому $\langle x^3 \rangle \triangleleft N_G$, що неможливо. Значить, $G = N_G$. \square

Лема 2.3.5. Якщо скінченна p -група G ($p \neq 2$) має нециклічну норму $N_G \neq G$, де

$$N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |a| = p^n, n \geq 1, |b| = |c| = p, [b, c] = a^{p^{n-1}}, [a, c] = 1,$$

то G — група типу 2) теореми 2.3.2.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. Припустимо, що існує елемент $x \in G$, $|x| = p$ такий, що $x \notin N_G$. Оскільки підгрупа $\langle a^{p^{n-1}}, x \rangle$ нормальна в групі $G_1 = \langle x \rangle N_G$ і

$$[G_1 : C_{G_1}(\langle a^{p^{n-1}}, x \rangle)] \leq p,$$

то можна вказати елемент $y \in \omega(N_G) \setminus \langle a^{p^{n-1}} \rangle$, переставний з x . Звідси

$$\langle y, x \rangle \cap N_G = \langle y \rangle \triangleleft N_G,$$

що неможливо. Отже, припущення невірне і

$$\omega(N_G) = \omega(G).$$

Позначимо $\overline{G} = G/\omega(N_G)$ і припустимо, що \overline{G} містить підгрупу $\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle$, $|\overline{x}| = |\overline{y}| = p$. Тоді за лемою 2.3.3 $|x| = |y| = p^2$ і

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle a^{p^{n-1}} \rangle,$$

де x, y — прообрази елементів \overline{x} та \overline{y} відповідно.

Позначимо $G_2 = \langle x, y \rangle \omega(N_G)$. Тоді $|G_2| = p^5$ і $G_2 \subseteq \omega(N_G)$. Перейдемо до фактор-групи

$$\widetilde{G}_2 = G_2 / \langle a^{p^{n-1}} \rangle \cong \langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle \widetilde{\omega(N_G)}.$$

Нехай $\widetilde{C} = C_{\widetilde{G}_2}(\widetilde{\omega(N_G)})$, тоді $\widetilde{C} \triangleleft \widetilde{G}_2$ і $[\widetilde{G}_2 : \widetilde{C}] \leq p$. Якщо при цьому $\widetilde{G}_2 = \widetilde{C}$, то $G'_2 \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle$, звідки $|\langle x, y \rangle| = p^3$ і $x \in \langle y \rangle \omega(N_G)$.

Нехай $\widetilde{G}_2 \neq \widetilde{C}$. Без порушення загальності будемо вважати, що $\widetilde{x} \in \widetilde{C}$. Тоді

$$\widetilde{C} = \langle \widetilde{x} \rangle \times \widetilde{\omega(N_G)}, C' \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle$$

і $C \in \overline{H}_p$ -групою. За твердженням 2.1.1

$$C = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $[x, c] = 1$. Оскільки $\langle x \rangle$ — характеристична підгрупа в C і $C \triangleleft G_2$, то $\langle x \rangle \triangleleft G_2$. Враховуючи тепер, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle a^{p^{n-1}} \rangle$, маємо $|\langle x, y \rangle| = p^3$ і знову $x \in \langle y \rangle \omega(N_G)$.

Отже, фактор-група $\overline{G} = G/\omega(N_G)$ не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^2 і за твердженням 2.1.2 є циклічною групою. Тому

$$G = \langle x_1 \rangle \omega(N_G),$$

де $|x_1| = p^k$, $k > 1$.

Оскільки $\omega(\widetilde{N_G}) \triangleleft \widetilde{G} = G / \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ і $\omega(\widetilde{N_G}) \cap Z(\widetilde{G}) \neq \widetilde{E}$, можна вважати, що $\tilde{b} \in Z(\widetilde{G})$. Тоді

$$[\langle \tilde{x}_1 \rangle, \widetilde{G}] \subseteq \langle \tilde{x}_1, \tilde{b} \rangle \cap \omega(\widetilde{N_G}) = \langle \tilde{b} \rangle,$$

звідки $G' \subseteq \langle a^{p^{n-1}}, b \rangle$.

Якщо $G' \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle$, то $G \in \overline{H_p}$ -групою і $G = N_G$, всупереч умові леми. Отже,

$$G' = \langle a^{p^{n-1}}, b \rangle.$$

Покладемо $[x_1, c] = a^{p^{n-1}\alpha}b^\beta$. Враховуючи, що $[x_1, b] = a^{p^{n-1}\gamma}$, одержимо

$$c^{-1}(x_1)^p c = (x_1)^p a^{p^n \alpha} b^{p\beta}, [x_1, b^\beta]^{\frac{p(p-1)}{2}} = (x_1)^p.$$

Отже, $(x_1)^p \in Z(G)$, а значить і $(x_1)^p \in N_G$.

Оскільки $G \neq N_G$, то $\langle x_1 \rangle \not\triangleleft G$ і $\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$. Покладемо $x = x_1 c^{-\gamma}$. Тоді

$$[x, b] = [x_1 c^{-\gamma}, b] = [x_1, b]^{c^{-\gamma}} [c^{-\gamma}, b] = 1$$

і

$$[x, c] = [x_1, c] = a^{p^{n-1}\alpha}b^\beta,$$

де $\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$. Отже, G — група типу 2) теореми 2.3.2. \square

Лема 2.3.6. Якщо скінченна p -група G ($p \neq 2$) має нециклічну норму $N_G \neq G$,

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = p^n, n > 1, |b| = p^m, m > 1, [a, b] = a^{p^{n-1}}$$

і $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$, то $n \geq m > 2$ і G — група типу 3) теореми 2.3.2 при $r \leq m - 2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. Візьмемо елемент x найменшого порядку групи G , що не належить N_G . Тоді $x^p \in N_G$ і $|x| > p$ за лемою 2.3.2.

З умови $\langle x \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$ випливає, що

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x^p \rangle \omega(N_G).$$

Якщо $x^p \in Z(N_G)$, то $x^p = a^{\alpha p} b^{\beta p}$ і група G_1 регулярна (див. [151], стор 205) і у такому випадку

$$(x a^{-\alpha} b^{-\beta p} = x^p a^{-\alpha p} b^{-\beta p} [x, a^{-\alpha} b^{-\beta}]^{p(p-1)/2} = [x, a^{-\alpha} b^{-\beta}]^{p(p-1)/2}.$$

Оскільки $|[x, a^{-\alpha}b^{-\beta}]^{p(p-1)/2}| \leq |x^{p^2}|$, то $|xa^{-\alpha}b^{-\beta}| \leq |x^p|$. За вибором елемента x маємо

$$(xa^{-\alpha}b^{-\beta}) \in N_G$$

і $x \in N_G$, що суперечить припущенню. Отже, $x^p \notin Z(N_G)$ і враховуючи $\langle x^p \rangle \triangleleft G_1$, будемо мати

1) $x^p = a^\alpha b^{p^{m-n+1}\beta}$, $(\alpha, p) = 1$, якщо $m > n$;

2) $x^p = a^\alpha b^\beta$, якщо $m < n$;

3) $x^p = a^\alpha b^{p\beta}$, $(\alpha, p) = 1$, якщо $m = n$.

Розглянемо кожен з вказаних випадків окремо.

1. У першому випадку з умови $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x^p \rangle \omega(N_G)$ випливає, що

$$b^{-1}xb = xx^{ps}z = xa^{\alpha s}b^{p^{m-n+1}\beta s}z,$$

де $z \in \omega(N_G)$. Оскільки $[x^p, b] = a^{p^{n-1}\alpha}$, то

$$b^{-1}x^pb = x^pa^{\alpha p^{n-1}} = x^pa^{\alpha s p}b^{p^{m-n+2}\beta s},$$

де $\alpha s \equiv 0 \pmod{p^{n-2}}$ і $s \equiv 0 \pmod{p^{n-2}}$. Тому

$$[x, b] = a^{p^{n-2}\alpha s_1}b^{p^{m-1}\beta_1},$$

де $(s_1, p) = 1$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G_1} = \langle x \rangle N_G / \omega(N_G)$. За лемою 2.1.2 підгрупа $\overline{N_G}$ нормалізує кожну підгрупу групи $\overline{G_1}$. Але

$$[\overline{b}, \overline{bx}] = \overline{a}^{\alpha s_1 p^{n-2}} \notin \langle \overline{bx} \rangle$$

і тому $\overline{b} \notin N_{\overline{G_1}}(\langle \overline{bx} \rangle)$, що неможливо. Отже, $G = N_G$, якщо $m > n$.

2. Нехай $m < n$. Тоді $x^p = a^\alpha b^\beta \notin Z(N_G)$. Покажемо, що $(\alpha, p) = 1$. Це очевидно, якщо $n = m + 1$. Тому далі будемо вважати, що $n > m + 1$. Нехай $(\alpha, p) \neq 1$ і $\alpha = \alpha_1 p$. У такому випадку $(\beta, p) = 1$.

Оскільки

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x^p \rangle \omega(N_G),$$

то комутант фактор-групи $\overline{G_1} = \langle x \rangle N_G / \omega(N_G)$ міститься у центрі $\overline{G_1}$ і група $\overline{G_1}$ регулярна. Нехай \bar{z} — довільний елемент групи $\overline{N_G}$. Тоді з умови $[\bar{x}^p, \bar{z}] = 1$ випливає $[\bar{x}, \bar{z}]^p = 1$, звідки $|\overline{G'_1}| = p$. Враховуючи, що $n > m + 1$, одержимо $\overline{G'_1} \subseteq \langle \overline{a^{p^{n-2}}} \rangle$ і тому

$$G'_1 \subseteq \langle a^{p^{n-2}} \rangle \times \langle b^{p^{n-1}} \rangle.$$

Покладемо $y = xa^{-\alpha_1}$. Оскільки

$$\langle y \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1,$$

то $\langle y^p \rangle \triangleleft G_1$, що неможливо, бо $a \notin N_{G_1}(\langle y^p \rangle)$, де

$$y^p = (xa^{-\alpha_1})^p = x^p a^{-\alpha_1 p} [x, a^{-\alpha_1}]^{p(p-1)/2} = b^\beta a^{p^{n-1}l},$$

де $(\beta, p) = 1$. Отже, $x^p = a^\alpha b^\beta$, $(\alpha, p) = 1$.

Нехай $\omega_m(N_G)$ — m -й шар норми N_G . Тоді $\omega_m(N_G) = \langle a^{p^{n-m}} \rangle \times \langle b \rangle$. З доведеного у попередньому абзаці та твердження 2.1.2 випливає, що факторгрупа $G/\omega_m(N_G)$ циклічна, тому

$$G = \langle y \rangle \omega_m(N_G) = \langle y, b \rangle,$$

де $y^{p^r} = a^\alpha b^\beta$, $r \geq 1$, $(\alpha, p) = 1$.

Оскільки

$$[\langle y \rangle, \omega_m(N_G)] = \langle y \rangle \omega(N_G) \cap \omega_m(N_G) = \langle y^{p^{r+n-m}} \rangle \omega(N_G) \subseteq Z(G),$$

то група G регулярна. Тому

$$[y, b^{p^{m-1}}] = [y^{p^{m-1}}, b] = [y, b]^{p^{m-1}} = 1$$

і $[y^{p^{m-1}}, a] = [y, a]^{p^{m-1}} = 1$. Враховуючи, що $y^{p^{r+1}}$ — найменший степінь елемента y , який міститься у центрі групи G , робимо висновок, що $r+1 \leq m-1$, звідки $r \leq m-2$ і оскільки $r \geq 1$, то й $m \geq 3$.

Враховуючи доведене, покладемо

$$[y, b] = y^{p^{r+n-m}s} z, z \in \omega(N_G).$$

Тоді з умови $[y, b^{p^{m-1}}] = [y^{p^{m-1}}, b] = 1$ випливає, що $s \equiv 0 \pmod{p}$ та $s = ps_1$. Отже,

$$[y, b] = y^{p^{r+n-m+1}s_1} z = (a^{\alpha s_1} b^{\beta s_1})^{p^{n-m+1}} z.$$

Далі стверджуємо, що $[y, b] = (a^{\alpha s_2} b^{\beta s_2})^{p^{n-r-1}} z$. Справді,

$$[y^{p^r}, b] = [y, b]^{p^r} = a^{\alpha p^{n-1}} = (a^{\alpha s_1} b^{\beta s_1})^{p^{n-m+r+1}}$$

і $\alpha s_1 p^{n-m+r+1} \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$.

Оскільки $r-m \leq -2$, то $n-m+r+1 \leq n-1$, звідки $s_1 \equiv 0 \pmod{p^{m-r-2}}$. Отже,

$$[y, b] = (a^{\alpha s_2} b^{\beta s_2})^{p^{n-r-1}} z,$$

причому $(s_2, p) = 1$, бо інакше $[y^{p^r}, b] = [y, b]^{p^r} = 1$. Враховуючи тепер, що підгрупи $\langle y \rangle$ та $\langle b \rangle$ попарно переставні, одержимо

$$G = \langle y \rangle \langle b \rangle$$

і G — група типу 3) теореми 2.3.2 при $r \leq m-2$ та $k > m+r$.

3. Нехай $m = n$. Тоді $x^p = a^\alpha b^{p\beta}$, $(\alpha, p) = 1$ і $[x, b] = a^{\alpha s} b^{p\beta s} z$, $z \in \omega(N_G)$. Звідси

$$b^{-1} x^p b = x^p a^{p^{m-1}\alpha} = a^{\alpha s p} b^{\beta s p^2}, \alpha s p \equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$$

і $s \equiv 0 \pmod{p^{m-2}}$. Отже,

$$[x, b] = (a^{\alpha s_1} b^{p\beta s_1})^{p^{m-2}} z.$$

Враховуючи співвідношення $[x^p, b] \subseteq \langle a^{p^{m-1}} \rangle$ та $[x, x^p] = [x, a^\alpha b^{p\beta}] = 1$, робимо висновок, що $[x, a] \subseteq \langle a^{p^{m-1}} \rangle$.

Покажемо, що фактор-група $G/\omega_m(N_G) = \overline{G}$ циклічна. За твердженням 2.1.2 досить впевнитися, що \overline{G} не містить елементарної абелевої підгрупи $\overline{G}_1 = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$ порядку p^2 . Припустимо протилежне. Тоді

$$x^p = a^{\alpha_1} b^{p\beta_1}, y^p = a^{\alpha_2} b^{p\beta_2},$$

де $(\alpha_1, p) = (\alpha_2, p) = 1$ і $[x, y] = a^k b^n$ для деяких цілих чисел k і n .

Нехай $m > 2$. Позначимо

$$\omega_{m-1}(N_G) = \langle a^p, b^p \rangle$$

$(m-1)$ -шар норми N_G — підгрупу, породжену усіма елементами N_G , порядок яких не перевищує p^{m-1} , та перейдемо до фактор-групи $\tilde{G}_1 = G_1/\omega_{m-1}(N_G)$.

Оскільки $\tilde{x}^p \in \langle \tilde{a} \rangle$, $\tilde{y}^p \in \langle \tilde{a} \rangle$ і $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in Z(\tilde{G}_1)$, то група \tilde{G}_1 регулярна. Тоді з умови $\tilde{x}^{p\alpha_2} = \tilde{y}^{p\alpha_1}$ випливає, що $(\tilde{x}^{\alpha_2} \tilde{y}^{-\alpha_1})^p = 1$. Отже,

$$(x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1})^p \in Z(N_G),$$

всупереч попереднім міркуванням. Тому $x \in \langle y \rangle N_G$.

Нехай $m = 2$. З умови $b^p \in Z(G)$ випливає, що $[x, b] \in \omega(N_G)$. Розглядаючи фактор-групу $\tilde{G}_1 = G_1/\omega(N_G)$, знову одержимо $x \in \langle y \rangle N_G$.

Отже, фактор-група $G/\omega_m(N_G) = \overline{G}$ містить єдину підгрупу простого порядку і

$$G = \langle y \rangle N_G,$$

де $y^{p^r} = a^\alpha b^{p\beta}$, $r \geq 1$, $(\alpha, p) = 1$.

Повторюючи міркування попереднього пункту, знову приходимо до висновку, що

$$G = \langle y \rangle \langle b \rangle$$

— група типу 3) теореми 2.3.2 при $1 \leq r \leq m-2$ та $k = m+r$ і $n > 2$. \square

З доведення леми випливає важливий наслідок.

Наслідок 2.3.3. *Нехай G — скінченна p -група ($p \neq 2$). Якщо*

$$N_G = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle, |a| = p^n, n > 1, |b| = p^m, m > 1, [a, b] = a^{p^{n-1}}$$

та виконується хоча б одна з умов:

1) $m > n$;

$$2) \ m = 2 \ i \ \omega(N_G) \subseteq Z(G),$$

то $G = N_G$.

Лема 2.3.7. Якщо скінченна p -група G ($p \neq 2$) має нециклічну норму

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = p^n, n > 1, |b| = p, [a, b] = a^{p^{n-1}},$$

то $G = N_G$.

Доведення. Нехай група G та її нециклічна норма N_G задовольняють умову леми, але $G \neq N_G$. З умови $\omega(N_G) \triangleleft G$ випливає, що

$$C = C_G(\omega(N_G)) \triangleleft G, [G : C] \leq p$$

і оскільки $a \notin C$, то $G = C\langle a \rangle$ і $a^p \in C$.

За лемою 2.3.1 група $\omega(N_G)$ містить усі елементи порядку p централізатора C , тобто

$$\omega(N_G) = \omega(C).$$

Окрім того, за лемою 2.3.3 елемент $a^{p^{n-1}}$ належить до кожної циклічної підгрупи складеного порядку. Тому фактор-група $C/\langle b \rangle$ має єдину підгрупу порядку p і за твердженням 2.1.2 є циклічною групою. Значить, група C абелева і містить циклічну підгрупу індексу p . З опису таких груп (див. [151], теорема 12.5.1) та нециклічності C випливає, що

$$C = \langle x \rangle \times \langle b \rangle, |x| = p^k > p.$$

Покажемо, що

$$G' \subseteq \omega(N_G).$$

Це очевидно, якщо $|x| = p^2$. Нехай $|x| = p^k, k > 2$. Враховуючи умову

$$[x, a] \in (N_G \cap C) = \langle a^p, b \rangle,$$

можемо вважати, що $[x, a] = a^{p^\alpha} b^\beta$. Тоді з включення $a^p \in Z(G)$ випливає, що

$$[x, a^p] = a^{p^2 \alpha} = 1,$$

звідки $\alpha \equiv 0 \pmod{p^{n-2}}$ і

$$[x, a] = a^{p^{n-1} \alpha_1} b^\beta \in \omega(N_G).$$

Отже, $G' \subseteq \omega(N_G)$.

Нехай $\omega(N_G) = \omega(G)$. Тоді $G \in \overline{H}_p$ -групою, оскільки кожна нециклічна підгрупа групи G містить $G' = \omega(N_G)$. Але у такому випадку $G = N_G$, що неможливо.

Отже, існує елемент $y \in G \setminus \omega(N_G)$, $|y| = p$. За лемою 2.3.1 $y \notin C$ і

$$G = C \rtimes \langle y \rangle,$$

де $[x, y] = a^{p^{n-1}}b^m$. Оскільки $G \neq N_G$, то $(m, p) = 1$. Але тоді G є групою типу 2) доводжуваної теореми, яка має нециклічну норму, відмінну від N_G . Отже, припущення хибне і $G = N_G$. \square

Лема 2.3.8. Якщо G – скінченна p -група ($p \neq 2$), що має нециклічну норму $N_G \neq G$ типу

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = p^n, n > 1, |b| = p^m, m > 1, [a, b] = a^{p^{n-1}}$$

і $\omega(N_G) \not\subseteq Z(G)$, то $n \geq m > 1$ і G є групою типу 3) теореми 2.3.2 при $r = m - 1$.

Доведення. Нехай G – досліджувана p -група. Оскільки $\omega(N_G) \not\subseteq Z(G)$, то $m \leq n$ і $b^{p^{m-1}} \notin Z(G)$. За лемою 2.3.7 з умови $G \neq N_G$ випливає, що $|b| = p^m > p$.

Позначимо $C = C_G(\omega(N_G))$. Тоді $C \triangleleft G$, $[G : C] = p$ і

$$G = C \langle y \rangle,$$

де $y^p \in C$. Розглянемо підгрупу $G_1 = \langle y \rangle N_G$ і покажемо, що $|y| > p$. Справді, нехай $|y| = p$. Тоді

$$G'_1 \subseteq \langle y, a^{p^{n-1}} \rangle \cap N_G = \langle a^{p^{n-1}} \rangle$$

і $[b^p, y] = 1$, всупереч вибору елемента y . Отже, $|y| > p$.

Покладемо $y^{p^r} = a^\alpha b^\beta$, $r \geq 1$. Використовуючи доведення лема 2.3.6 переконуємось, що $y^{p^r} \notin Z(N_G)$. Тому, враховуючи, що $\langle y^p \rangle \triangleleft \langle y \rangle N_G$, будемо мати:

1) $y^{p^r} = a^\alpha b^{p\beta}$, $(\alpha, p) = 1$, якщо $n = m$;

2) $y^{p^r} = a^\alpha b^\beta$, якщо $n > m$.

Розглянемо кожен з вказаних випадків окремо.

1) Нехай $n = m$. Тоді $y^{p^r} = a^\alpha b^{p\beta}$, $(\alpha, p) = 1$. Оскільки

$$[\langle y \rangle, N_G] \subseteq \langle y \rangle \omega(N_G) \cap N_G = \langle y^{p^r} \rangle \omega(N_G),$$

то $[y, b] = y^{p^r s} z$, $z \in \omega(N_G)$. Далі з умов $m > 1$ і

$$b^{-1} y^{p^m} b = y^{p^m} y^{p^{r+m} s} [y, z]^{p^m (p^m - 1)/2} = y^{p^m} (a^{\alpha s} b^{p\beta s})^{p^m} = y^{p^m}$$

впливає, що $y^{p^m} \in Z(G_1)$. Отже, $m \geq r + 1$, бо $y^{p^{r+1}}$ – найменший степінь елемента y , що міститься у центрі групи G_1 .

Припустимо, що у співвідношенні $[y, b] = y^{p^r} z$ показник $s \equiv 0 \pmod{p}$.
Тоді

$$[y, b^{p^{m-1}}] = 1,$$

всупереч вибору елемента y . Доведемо, що $r = m - 1$. Справді, якщо $r < m - 1$, то з рівності

$$b^{-1} y^{p^r} b = y^{p^r} (a^{\alpha s} b^{p\beta s})^{p^r} [y, z]^{p^r(p^r-1)/2} = y^{p^r} a^{p^{m-1}\alpha}$$

випливає $s \equiv 0 \pmod{p}$, що суперечить доведеному. Отже, $r = m - 1$ і $|y| = p^{r+m} = p^{2m-1}$.

З умов $|C/N_G| \leq p^{m-2}$ і $|G/C| = p$ випливає, що $|G/N_G| \leq p^{m-1}$. Оскільки $|\langle y \rangle N_G| = p^{m-1}$, то фактор-група G/N_G циклічна з твірним елементом yN_G . Отже,

$$G = \langle y \rangle N_G = \langle y, b \rangle, y^{p^{m-1}} = a^{\alpha} b^{p\beta},$$

де $(\alpha, p) = 1$, $[y, b] = y^{p^r} z$, $(s, p) = 1$, $z \in \omega(N_G)$. Тобто, G є групою типу 3) теореми 2.3.2 $r = m - 1$ та $k = 2m - 1$. Зауважимо, що підгрупи $\langle y \rangle$ та $\langle b \rangle$ попарно переставні, тому

$$G = \langle y \rangle \langle b \rangle.$$

2) Нехай $n > m$. Тоді $y^{p^r} = a^{\alpha} b^{\beta}$. Покажемо, що $(\alpha, p) = 1$. Це очевидно, якщо $n = m + 1$. Тому далі будемо вважати, що $n > m + 1$, але $\alpha = \alpha_1 p$. Оскільки

$$\langle y \rangle \bigcap N_G \not\subseteq Z(N_G),$$

то $(\beta, p) = 1$. З умови $y^p \in C$ та доведення леми 2.3.6 випливає, що $r = 1$ і $y^p = a^{p\alpha_1} b^{\beta}$.

Враховуючи умову

$$[y, b] \subseteq N_G \bigcap \langle y \rangle \omega(N_G) = \langle y^p \rangle \omega(N_G),$$

можемо вважати, що

$$[y, b] = (a^{p\alpha_1} b^{\beta})^s z.$$

Оскільки

$$[y^p, b] = a^{p^2\alpha_1 s} b^{p\beta s} = 1,$$

то $\alpha_1 s p^2 \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\beta p s \equiv 0 \pmod{p^m}$. Тоді $\alpha_1 s \equiv 0 \pmod{p^{n-2}}$ і $\beta s \equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$. Отже,

$$[y, b] = a^{p^{n-1}\alpha_2} b^{p^{m-1}\beta_2} \in \omega(N_G)$$

і тому $[y, b^p] = 1$, що неможливо. Таким чином, $y^{p^r} = a^{\alpha} b^{\beta}$, де $(\alpha, p) = 1$.

Позначимо $\omega_m(N_G) - m-1$ шар норми N_G . Оскільки

$$[y, b] \in \omega_m(N_G) \bigcap \langle y \rangle \omega(N_G) = \langle y^{p^{r+n-m}} \rangle \omega(N_G),$$

то $[y, b] = (a^\alpha b^\beta)^{p^{n-m}s} z$ і $s \not\equiv 0 \pmod{p}$. Справді, інакше б $[y, b^{p^{m-1}}] = 1$, всупереч вибору елемента y .

Далі, враховуючи, що $[y^{p^m}, b] = 1$ і $y^{p^{r+1}}$ — найменший степінь елемента y , що міститься у $Z(N_G)$, одержимо $m \geq r + 1$. Більш того, $r = m - 1$, бо інакше $s \equiv 0 \pmod{p}$. Використовуючи міркування, наведені у пункті 1) леми, приходимо до висновку, що фактор-група G/N_G циклічна порядку p^{m-1} . Отже, G є групою типу 3) теореми 2.3.2 при $r = m - 1$ та $k > 2m - 1$. \square

Теорему 2.3.2 доведено. \square

З доведення теорем 2.3.1 та 2.3.2 випливають наступні твердження.

Наслідок 2.3.4. *Локально скінченна p -група ($p \neq 2$) з неабелевою нециклічною нормою N_G нільпотентна класу не вище 3, а її нециклічна норма N_G міститься у третьому гіперцентрі $Z_3(G)$ групи G .*

Наслідок 2.3.5. *Будь-яка локально скінченна p -група G ($p \neq 2$) з неабелевою нециклічною нормою N_G є циклічним розширенням цієї норми.*

2.4 Локально скінченні 2-групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп

У цьому підрозділі досліджуються локально скінченні 2-групи, нециклічна норма яких є негамільтоновою \overline{H}_2 -групою.

Розглянемо спочатку властивості нескінченних локально скінченних 2-груп із вказаним обмеженням на нециклічну норму. За наслідком 2.2.4 такі групи вичерпуються \overline{H}_2 -групами, якщо їх нециклічна норма є нескінченною недедекіндовою підгрупою. Проте, на відміну від p -груп, де $p \neq 2$, у випадку, коли нециклічна норма скінченна й недедекіндова, такі групи можуть не відноситися до \overline{H}_2 -груп. Будову нескінченних 2-груп такого роду описує наступне твердження.

Теорема 2.4.1. *Нескінченні локально скінченні 2-групи, що мають недедекіндову нециклічну норму N_G , вичерпуються групами типів:*

- 1) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$; $N_G = G$;
- 2) $G = A \times H$, A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$; $N_G = G$;

3) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $[A, \langle c \rangle] = E$, $|b| = |c| = |d| = 2$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$, $[b, c] = [d, b] = [d, c] = a_1$, $a_1 \in A$, $|a_1| = 2$; $N_G = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$;

4) $G = (A \times H) \langle d \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $d^2 = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $[d, h_1] = a_1$, $[d, h_2] = 1$; $N_G = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 a_2 \rangle$, $|a_2| = 4$, $a_2 \in A$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група і N_G – її нециклічна норма. Якщо $|N_G| = \infty$, то за наслідком 2.2.4

$$G = N_G$$

і $G \in \overline{H}_2$ -групою. За твердженням 2.1.1 G – група одного з типів 1) або 2) теореми.

Тому далі будемо вважати, що $|N_G| < \infty$. За теоремою 2.2.3 G є скінченим розширенням квазіциклічної 2-групи A , причому

$$N_G \subseteq C = C_G(A).$$

Оскільки $A \not\subseteq Z(G)$, то $[G : C] = 2$ і

$$G = C \langle d \rangle, d^2 \in C.$$

Елемент d індукує на підгрупі A нетотожний автоморфізм порядку 2, тому $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

За наслідком 2.2.4 з умови $N_G \subseteq C$, випливає, що $N_C = C$, тому C – негамільтонова \overline{H}_2 -група. Згідно опису останніх (твердження 2.1.1) C є групою одного з типів:

1) $C = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

2) $C = A \times H$, A – квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$.

Розглянемо кожен з вказаних випадків окремо.

1) Нехай C – група типу 1). Розглянемо фактор-групу

$$G/A = \overline{G} \cong \langle \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \rangle,$$

де $\overline{d}^2 \in \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle$ і $|\overline{d}| \leq 4$. Враховуючи недедекіндовість підгрупи N_G та умову $N_G \subseteq C$, будемо вважати, що

$$\langle \overline{b}, \overline{c} \rangle = \overline{N_G}.$$

Тоді за лемою 2.1.2 з умови $[\bar{G} : \bar{N}_G] = 2$ випливає, що в \bar{G} нормальна будь-яка підгрупа, яка не міститься у \bar{N}_G . Значить, \bar{G} — абелева група і $G' \subseteq A$.

Оскільки нижній шар $\omega(C)$ підгрупи C нормальний у групі G , то

$$[\omega(C), G] \subseteq A \cap \omega(C) = \langle a \rangle \subseteq A,$$

де $|a| = 4$. Далі, враховуючи, що $a \in Z(C)$ і $[\omega_2(C), G] = E$, одержимо

$$[\omega(C), G] \subseteq \langle a^2 \rangle = \langle a_1 \rangle.$$

Отже, $B = \langle b, c \rangle \triangleleft G$, $[B, G] \subseteq \langle a_1 \rangle$ і за лемою 1 [159]

$$G = BC_G(B),$$

де $B \cap C_G(B) = \langle a_1 \rangle$.

Нехай $|\bar{d}| = 2$. Тоді $|d| \leq 4$. Якщо при цьому $|d| = 2$, то $[d, y] \neq 1$ для будь-якого нецентрального елемента $y \in B$. Справді, інакше $\langle d, y \rangle \triangleleft \langle d, y \rangle N_G$ і

$$\langle y \rangle, N_G \leq \langle d, y \rangle \cap N_G \leq \langle y \rangle,$$

що неможливо. Тому

$$[d, b] = [d, c] = a_1$$

і G — група типу 3) теореми.

Нехай $|d| = 4$. Тоді, очевидно, $d^2 = a_1$ і якщо $d \in C_G(B)$, то $|dbc| = 2$. Заміняючи елемент d на dbc , знову дістаємо групу типу 3) теореми. Припустимо, що $d \notin C_G(B)$. У такому випадку існує інволюція $x \in B$, така що $[d, x] = a_1$. Звідси $|dx| = 2$ і, беручи замість d елемент dx та використовуючи міркування, наведені у попередньому абзаці, знову приходимо до групи типу 3).

Нехай $|\bar{d}| = 4$. Тоді $d^2 = a'y$, де $a' \in A$, $y \in B \setminus \langle a_1 \rangle$. Візьмемо такий елемент $x \in B$, що $[x, y] \neq 1$. Оскільки

$$[d, x] \in A \cap B = \langle a_1 \rangle,$$

то $[d^2, x] = 1$, всупереч співвідношенням $[d^2, x] = [y, x] \neq 1$. Випадок 1) розглянуто повністю.

2) Нехай C — група типу 2). Тоді $Z(G) \supseteq \langle a_1 \rangle \times \langle h^2 \rangle$, де $a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

Розглянемо фактор-групу

$$G/A = \bar{G} = \bar{H} \langle \bar{d} \rangle,$$

де $\bar{d}^2 \in \bar{H}$. З недедекіндовості підгрупи N_G випливає, що $\bar{H} = \bar{N}_G$. Тому за лемою 2.1.2 норма $N(\bar{G})$ групи \bar{G} гамільтонова і за [3] група \bar{G} не містить елементів порядку 8. Отже, $|\bar{d}| \leq 4$.

Якщо $|\bar{d}| = 2$, то за лемою 2.1.2 $\overline{N_G} \leq N(\bar{G})$ і $\langle \bar{d} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Отже, у цьому випадку

$$\bar{G} = \bar{H} \times \langle \bar{d} \rangle.$$

Нехай $|\bar{d}| = 4$. Тоді $\bar{d}^2 = \bar{h}^2 \in \bar{H}$ і оскільки

$$\bar{G}' \subseteq \langle \bar{d} \rangle \cap \bar{H} = \langle \bar{h}^2 \rangle,$$

то група \bar{H} містить елемент \bar{h} порядку 4, переставний з \bar{d} . Звідси $|\overline{dh}| = 2$ і $\bar{H} \subseteq N_{\bar{G}}(\langle \overline{dh} \rangle)$ за лемою 2.1.2. Тому знову

$$\bar{G} = \bar{H} \times \langle \bar{d}' \rangle,$$

де $\bar{d}' = \overline{dh}$, $|\bar{d}'| = 2$.

За лемою 2.3.2 зі співвідношень $d^2 \in A$ та $|\bar{d}| = 2$ випливає, що $|d| = 4$ і $\langle d \rangle \cap C = \langle a_1 \rangle$. Звідси $A \langle d \rangle$ — нескінченна кватерніонна 2-група, оскільки $d \notin C$ і $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

Враховуючи, що $[H, \langle d \rangle] \subset A$ та $[H^2, \langle d \rangle] = E$, дістанемо $[H, \langle d \rangle] \subseteq \langle a_1 \rangle$. Отже,

$$G = A \langle d \rangle \rtimes H$$

і G — група типу 4) теореми.

Достатність. Якщо G є групою одного з типів 1) або 2) теореми, то вона є \overline{H}_2 -групою і $G = N_G$.

Нехай G — група типу 3) теореми. Доведемо, що її нециклічна норма збігається з групою

$$N = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $|a_2| = 4$, $a_2 \in A$.

Справді, оскільки

$$N_1 = N_G(\langle a_1, d \rangle) = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$$

і

$$N_2 = N_G(\langle a_1, a'd \rangle) = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle a'd \rangle,$$

де $a_1, a' \in A$, $|a_1| = 2$, $|a'| > 4$, то

$$N \subseteq N_1 \cap N_2 = N = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle.$$

Враховуючи тепер, що кожна нециклічна підгрупа містить елемент a_1 та $[G, N] \subseteq \langle a_1 \rangle$ робимо висновок, що N нормалізує кожну нециклічну підгрупу. Отже, $N_G = N$.

Нехай G — група типу 4) теореми. Зрозуміло, що

$$N_G \subseteq N = N_1 \cap N_2 = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 a \rangle,$$

де $N_1 = N_G(\langle h_1d, h_2 \rangle) = \langle h_1d, h_2, h_1a_2 \rangle$, $|a_2| = 4$, $a_2 \in A$ та

$$N_2 = N_G(H) = A \times H.$$

Оскільки

$$[G, N] \subseteq \omega(G) = \langle h^2 \rangle \times \langle a_2^2 \rangle$$

досить показати, що підгрупа N нормалізує усі кватерніонні 2-групи. Це очевидно для підгруп, що містяться у $C = A \times H$, тому розглядатимемо лише ті, що підгрупі C не належать.

Нехай тепер Q — кватерніонна 2-група, що містить елемент da_i , де $a_i \in A$, $|a_i| = 2^i$, $i \geq 0$. Оскільки $[\langle d_i \rangle, N] \subseteq \langle d^2 \rangle$, то $N \subseteq N_G(Q)$. Якщо Q містить елемент виду dh_1a_i , то $Q = \langle dh_1a_i, a_1^m h_2 \rangle$. Звідси зі співвідношення

$$[Q, N] \subseteq \langle h^2 \rangle \subset Q,$$

робимо висновок, що $N \subseteq N_G(Q)$. Оскільки інших кватерніонних 2-груп, що не містяться у C , немає, то N нормалізує кожну нециклічну підгрупу і $N = N_G$. \square

У попередньому підрозділі було доведено, що клас нескінченних локально скінченних p -груп (p — просте непарне число) з недедекіндовою нециклічною нормою збігається з класом нескінченних \overline{H}_p -груп, і усі групи цього класу є нільпотентними ступеня 2. З останньої теореми випливає, що клас нескінченних локально скінченних 2-груп ширший за клас нескінченних \overline{H}_2 -груп і містить ненільпотентні (але локально нільпотентні) групи.

Перейдемо тепер до вивчення скінченних 2-груп, нециклічна норма яких є недедекіндовою групою. У подальших міркуваннях активно використовуватиметься наступне твердження.

Лема 2.4.1. *Нехай G — скінченна 2-група, нециклічна норма N_G якої є групою одного з типів 3)-7) твердження 2.1.1 або групою типу 8) цього твердження при $n > 2$, $m = 1$ або при $m > n > 1$. Тоді в G нормальні всі нециклічні підгрупи і $G = N_G$.*

Доведення. Розіб'ємо доведення лема на пункти у залежності від будови підгрупи N_G і припустимо, що $G \neq N_G$.

1. Нехай нециклічна норма N_G є групою типу 3) твердження 2.1.1:

$$N_G = \langle a \rangle \langle b \rangle, |a| = 8, |b| = 4, a^4 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}.$$

Доведемо, що у такому випадку G містить єдину інволюцію. Справді, припустимо, що існує елемент $x \in G \setminus N_G$, $|x| = 2$. Тоді

$$[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle b^2, x \rangle \cap N_G = \langle b^2 \rangle,$$

$\langle b, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$, звідки

$$\langle b \rangle = \langle b, x \rangle \bigcap N_G \triangleleft G_1,$$

що неможливо.

Отже, G містить єдину інволюцію і за твердженням 2.1.2 є кватерніонною 2-групою. Оскільки $|G| > 16$, то в G можна вказати підгрупу кватерніонів порядку 8, нормалізатор якої не містить N_G . Протиріччя. Отже, цей випадок неможливий.

2. Нехай досліджувана група G має нециклічною нормою групу типу 4) твердження 2.1.1:

$$N_G = \langle a \rangle \langle b \rangle, |a| = |b| = 8, a^4 = b^4, b^{-1}ab = a^{-1}.$$

Припустимо, що існує елемент $x \in G \setminus N_G$, $|x| = 2$. Оскільки $a^4 \in Z(G)$, то

$$\langle a^4, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G,$$

$$[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle a^4, x \rangle \bigcap N_G = \langle a^4 \rangle.$$

З цього випливає, що

$$\langle x \rangle = \langle a^4, x \rangle \bigcap N_G \triangleleft G_1$$

і тому $x \in Z(G_1)$, що неможливо за лемою 2.3.1.

Візьмемо елемент x найменшого порядку групи G , що не належить N_G . За доведеним $|x| > 2$ і

$$\langle x \rangle \bigcap \omega(N_G) = \langle a^4 \rangle$$

за лемою 2.3.2. Розглянемо фактор-групу $G/\omega(N_G) = \overline{G}$. і Враховуючи, що $\overline{N_G} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ є групою кватерніонів та застосовуючи лему 2.1.2 твердження 2.1.1, приходимо до висновку, що $|\bar{x}| \leq 4$.

Якщо $|\bar{x}| = 2$, то

$$\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G_1} = \langle \bar{x} \rangle \overline{N_G},$$

звідки $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \omega(N_G)$. Тоді $[x, a^2] = 1$ і $|xa^2| = 2$, що неможливо за доведеним. Отже, $|\bar{x}| = 4$. Зі співвідношення

$$[\langle \bar{x} \rangle, \overline{N_G}] \subseteq \langle \bar{x}^2 \rangle = \langle \bar{a}^2 \rangle$$

впливає, що $\overline{N_G}$ містить елемент \bar{c} порядку 4, переставний з \bar{x} . Тоді $|\bar{x}\bar{c}| = 2$, що знову неможливо.

3. Нехай N_G — група типу 5) твердження 2.1.1,

$$G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle, |a| = |b| = |c| = 4, c^2 = a^2b^2, [c, b] = c^2, [c, a] = a^2.$$

Як і раніше, візьмемо елемент x найменшого порядку групи G , що не належить N_G . Нехай $|x| = 2$. Оскільки $\omega(N_G) \triangleleft G$, то $\omega(N_G) \cap Z(G) \neq E$ і можна вважати, що $a^2 \in Z(G)$. Тоді

$$\langle a^2, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G, [G_1 : C_{G_1}(\langle a^2, x \rangle)] \leq 2$$

і квадрат будь-якого елемента групи G_1 переставний з x . Звідси

$$\omega(N_G) \subseteq Z(G_1),$$

що суперечить лемі 2.3.2. Отже, $|x| > 2$, $x^2 \in N_G$ і

$$\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G.$$

Враховуючи, що N_G не містить нормальних циклічних підгруп порядку 4, робимо висновок, що $|x| = 4$ і

$$G'_1 \subseteq \omega(G).$$

Значить, кожна абелева нециклічна підгрупа групи містить $\omega(G)$ і тому є її нормальною підгрупою. Отже, $G_1 - \overline{HA}_2$ -група, що неможливо за теоремою 2.2 [113].

4. Нехай N_G — група типу 6) твердження 2.1.1, тобто

$$N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle \langle d \rangle,$$

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 4, c^2 = d^2 = a^2 b^2, [a, c] = [d, c] = a^2, [b, d] = b^2, [c, b] = [d, a] = c^2.$$

Повторюючи міркування попереднього пункту, неважко переконатись, що $\omega(G) = \omega(N_G)$. Покажемо, що G — група експоненти 4.

Нехай це не так і існує елемент $x \in G$, $|x| = 8$. Якщо $x^2 \notin N_G$, то з умови

$$\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

впливає, що

$$[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G = \omega(G)$$

і $x^2 \in Z(G_1)$. Але у такому випадку $\omega(G_1) \neq \omega(N_G)$, що неможливо за доведеним. Отже, $x^2 \in N_G$.

Розглянемо фактор-групу $G'_1 / \omega(N_G) = \overline{G}_1$. Оскільки

$$G'_1 \subseteq \langle x^2 \rangle \omega(G)$$

і $x^2 \notin Z(G_1)$, то $\overline{G}_1' = \langle \bar{x}^2 \rangle$, звідки $[\overline{G}_1 : C_{\overline{G}_1}(\langle \bar{x} \rangle)] = 2$. Тоді централізатор $C_{\overline{G}_1}(\langle \bar{x} \rangle)$ містить елемент \bar{y} порядку 2, непереставний з \bar{x} і $|\bar{x}\bar{y}| = 2$. За лемою 2.1.2 $\overline{N}_G \leq N(\overline{G})$, тому $\langle \bar{x}\bar{y} \rangle \triangleleft \overline{G}_1$ і $G'_1 \subseteq \omega(G)$, що неможливо.

Отже, $\exp(G) = 4$. Звідси $G' \subseteq \omega(G)$ і тому $G \in \overline{HA}_2$ -групою, оскільки у ній нормальні всі абелеві нециклічні підгрупи. Використовуючи опис таких груп (теорема 2.2 [113]) і враховуючи, що $G \neq N_G$, приходимо до протиріччя.

5. Нехай N_G — група типу 7) твердження 2.1.1, тобто

$$N_G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

$$H = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2], |b| = |c| = 2, [H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = 1, [b, c] = h_1^2.$$

Доведемо, що вона містить усі інволюції групи G . Справді, припустимо, що існує інволюція $x \in G \setminus N_G$. Оскільки $\langle h_1^2, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$, то

$$[G_1 : C_{G_1}(\langle h_1^2, x \rangle)] \leq 2$$

і $G_1 \setminus \langle h_1^2 \rangle$ містить інволюцію y , переставну з x . Тоді

$$\langle y \rangle = \langle y, x \rangle \bigcap N_G \triangleleft N_G,$$

що неможливо. Отже, $\omega(G) = \omega(N_G)$.

Нехай $x \in G \setminus N_G$, $|x| = 4$. Тоді $x^2 = h_1^2$. Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G}_1 = G_1 / \langle h_1^2 \rangle,$$

де $G_1 = \langle x \rangle N_G$. З умови $\overline{N}_G \triangleleft \overline{G}_1$ випливає, що

$$\overline{N}_G \bigcap Z(\overline{G}_1) \neq \overline{E}.$$

Нехай $\bar{y} \in (\overline{N}_G \bigcap Z(\overline{G}_1))$. Тоді

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \triangleleft \overline{G}_1, [\overline{G}_1 : C_{\overline{G}_1}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)] \leq 2$$

і $(\overline{N}_G \bigcap C_{\overline{G}_1}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle))$ — нециклічна група. Звідси $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G}_1$, тому \overline{G}_1 — абелева група і $G_1' \subseteq \langle h_1^2 \rangle$. Але у такому випадку N_G містить елемент g порядку 4, переставний з x . Звідси $|gx| = 2$, всупереч доведеному.

Отже, N_G містить усі елементи, порядок яких не вищий за 4, і, зважаючи на те, що $G \neq N_G$, знайдеться елемент $x \in G$, $|x| = 8$. Оскільки $x^2 \in N_G$ і в N_G нормальні всі циклічні підгрупи порядку 4, то

$$\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G.$$

Звідси $G_1' \subseteq \langle x^2 \rangle$. Якщо при цьому $G_1' \subseteq \langle x^2 \rangle$, то $Z(G_1)$ містить елементи порядку 4. Отже, $G_1' = \langle x^2 \rangle$.

Враховуючи тепер, що $\bar{x} \notin Z(\overline{G}_1)$, де $\overline{G}_1 = G_1' / \langle h_1^2 \rangle$, можемо стверджувати, що існує елемент $\bar{y} \in \overline{N}_G$, непереставний з \bar{x} . Звідси $|\bar{x}\bar{y}| = 2$, $xy \in N_G$ і $x \in N_G$, всупереч його вибору.

6. Нехай нециклічна норма N_G є групою типу 8) твердження 2.1.1 при $m = 1$ і $n > 2$ або при $m > n > 1$.

Розглянемо спочатку випадок $m = 1, n > 2$.

Оскільки $N_G \triangleleft G$, то

$$\omega(N_G) = \langle a^{2^{n-1}}, b \rangle \triangleleft G$$

як її характеристична підгрупа. Покладемо $C = C_G(\omega(N_G))$. Тоді $C \triangleleft G$, $[G : C] = 2$ і

$$G = C \langle a \rangle, a^2 \in C.$$

Враховуючи, що $\omega(N_G)$ містить усі інволюції свого централізатора, а елемент $a^{2^{n-1}}$ належить кожній циклічній підгрупі складеного порядку групи G (лема 2.3.3), робимо висновок, що $C/\langle b \rangle = \tilde{C}$ містить єдину інволюцію і тому за твердженням 2.1.2 є циклічною або кватерніонною 2-групою.

Нехай \tilde{C} – кватерніонна 2-група,

$$\tilde{C} = \langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \rangle, |\tilde{h}_1| = 2^k, k \geq 2, |\tilde{h}_2| = 4, \tilde{h}_1^{2^{k-1}} = \tilde{h}_2^2, \tilde{h}_2^{-1} \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 = \tilde{h}_1^{-1}.$$

За лемою 2.3.2

$$\langle h_1 \rangle \cap \omega(N_G) = \langle h_2 \rangle \cap \omega(N_G) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$$

і $h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1} b^l$. Якщо $l \neq 0$, то

$$(h_1 h_2)^2 = h_2^2 b^l \neq a^{2^{n-1}},$$

що неможливо за лемою 2.3.2. Тому $l = 0$ і $C = H \times \langle b \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ – кватерніонна 2-група.

Оскільки $a^2 \in C$, $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, то без порушень загальності міркувань можна вважати, що $a^2 = h_1^s b^t$. Тоді

$$[a, h_2] \in (H \cap N_G \cap \langle h_2, b \rangle = \langle a^{2^{n-1}} \rangle)$$

і $[a^2, h_2] = [h_1^s, h_2] = 1$. Це можливо лише за умови $s \equiv 0 \pmod{2^{k-1}}$, звідки $|a| = 4$. Протиріччя. Отже, фактор-група $C/\langle b \rangle = \tilde{C}$ циклічна і тому

$$C = \langle x \rangle \times \langle b \rangle$$

– абелева група.

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/\omega(N_G) \cong \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{a} \rangle.$$

З леми 2.1.2 випливає, що $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G}$. Враховуючи, що $\langle \bar{a} \rangle \triangleleft \overline{G}$, $\bar{a}^2 \in \langle \bar{x} \rangle$ та використовуючи теорему 12.5.1 роботи [151], одержимо $\overline{G}' \subseteq \langle \bar{a}^{2^{n-2}} \rangle$.

Якщо $\overline{G}' = \overline{E}$, то $[x, a] = a^{2^{n-1}j}b^t$. Тоді з умови

$$[x, a^2] = a^{2^{n-1}t} = 1$$

випливає, що $[x, a] \in \langle a^{2^{n-1}} \rangle$. Звідси $G' \subseteq \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ і в супереччю припущенню $G \in \overline{H}_2$ -групою. Отже, \overline{G} — абелева група і $\overline{G}' = \langle \overline{a}^{2^{n-2}} \rangle$.

Покладемо $[x, a] = a^{2^{n-2}s}b^r$. Оскільки $a^2 \in Z(G)$ і $G' \not\subseteq \omega(G)$, то $(s, 2) = (r, 2) = 1$, звідки $[x, a] = a^{\pm 2^{n-2}}b$. З іншого боку $x^2b \in Z(G)$ і можна вважати, що $a^2 = x^2b$. Якщо $|a| = 8$, то $|x| = 8$ і $G = \langle x, a \rangle$ — \overline{H}_2 -група типу 7) твердження 2.1.1.

Нехай $|a| > 8$, тоді $|x| > 8$ і $|xa^{-1 \mp 2^{n-3}}| = 2$. Як неважко переконатись

$$a \notin N_G(\langle a^{2^{n-1}}, xa^{-1 \mp 2^{n-3}} \rangle),$$

що неможливо за означенням підгрупи N_G .

Далі будемо вважати, що $m > n$. З умови $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$ та леми 2.3.2 випливає, що

$$\omega(N_G) = \omega(G).$$

Нехай x — елемент найменшого порядку групи G , що не належить N_G . Тоді $x^2 \in N_G$ і $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = a^kb^l$. Оскільки

$$\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G,$$

то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$. Отже, якщо $(k, 2) = 1$, то $x^2 = a^kb^{2^{m-n+1}}$.

Враховуючи співвідношення $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x^2 \rangle N_G$, покладемо $[x, b] = x^2s^z$, де $z \in \omega(G)$. Тоді

$$[x^2, b] = a^{2^{n-1}k} = a^{2ks}b^{2^{m-n+2}ls},$$

звідки $ks \equiv ls \equiv 0 \pmod{2^{n-2}}$. Отже,

$$[x^2, b] = a^{2^{n-2}kt}b^{2^{m-1}lt},$$

де $(kt, 2) = 1$, бо інакше $[x^2, b] = 1$.

Перейдемо до фактор-групи

$$\overline{G}_1 = G_1/\omega(G) \cong \langle \bar{x} \rangle \overline{N}_G.$$

З леми 2.1.2 випливає, що $\overline{N}_G \leq N(\overline{G}_1)$, тому \overline{N}_G міститься у нормалізаторі кожної підгрупи групи \overline{G}_1 . Але $\bar{b} \notin N_{\overline{G}_1}(\langle \bar{b}x \rangle)$, що неможливо. Отже, $(k, 2) \neq 1$ і $x^2 = a^{2k}b^{2l}$.

Враховуючи умови $[\langle x^2 \rangle, N_G] = 1$ та

$$[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle x^2 \rangle \omega(G) \subseteq Z(G_1),$$

стверджуємо, що $[\langle x \rangle, N_G]^2 = 1$ і $G_1' \subseteq \omega(G)$. Отже, будь-яка абелева нециклічна підгрупа групи G_1 є її нормальною підгрупою і за теоремою 2.2

[113] є прямим чи напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи $\langle y \rangle$ та групи кватерніонів H .

Якщо $[\langle y \rangle, H] \neq E$, то

$$N_{G_1} \subseteq (\langle y^2 \rangle \times H)$$

і, враховуючи умови $N_G \subseteq N_{G_1}$ та $[G_1 : N_G] = 2$, робимо висновок, що

$$N_G = \langle y^2 \rangle \times H.$$

Це, очевидно, неможливо, отже,

$$G_1 = \langle y \rangle \times H.$$

Звідси $|a| = 4$ і за вибором елемента x , $|x| = 4$, $H = \langle a, x \rangle$, $[x, b] = 1$.

Покажемо, що за таких умов фактор-група $\tilde{G} = G/N_G$ має єдину інволюцію. Справді, у протилежному випадку

$$\tilde{G} \supseteq \langle \tilde{x} \rangle \times \langle \tilde{y} \rangle,$$

$|\tilde{x}| = |\tilde{y}| = 2$. За доведеним у попередньому абзаці у кожному з суміжних класів xN_G та yN_G знайдуться такі елементи x_1 та y_1 відповідно, що $|x_1| = |y_1| = 4$,

$$x_1^2 = y_1^2 = a^2 = [x_1, a] = [y_1, a]$$

та $[x_1, b] = [y_1, b] = 1$.

Нехай $[x_1, y_1] = a^r b^s$. Тоді

$$[x_1^2, y_1] = a^{2r} b^{2s} a^{2(rs+r)},$$

звідки $s \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$ і $(x_1 y_1)^2 = a^r b^{2^{m-1}s}$. Якщо $(r, 2) \neq 1$, то $|x_1 y_1 a^{-r/2} b^{2^{m-2}s}| = 2$, звідки

$$x_1 y_1 a^{-r/2} b^{2^{m-2}s} \in N_G$$

і $x_1 \in y_1 N_G$. Нехай $(r, 2) = 1$. Тоді з умови $[x_1 y_1, b] = 1$ випливає

$$[(x_1 y_1)^2, b] = [a^r, b] = 1,$$

що неможливо. Отже, \tilde{G} має єдину інволюцію.

Нехай $|\tilde{G}| = 2$. Тоді $G \in \overline{H}_2$ -групою і $G = N_G$, що суперечить припущенню. Отже, \tilde{G} містить елемент \tilde{x} порядку 4. Оскільки

$$[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle x^4 \rangle \omega(G) \subseteq Z(G),$$

то $[x, a] \in \omega(G)$. За доведеним у групі $\langle x \rangle N_G$ можна вказати такий елемент $y = x^2 z$, де $z \in N_G$, що $[y, b] = 1$. Тому $[x^2 z, b] = 1$ і $[x^2, b] = 1$.

Нехай $[x, b] = a^{2ks}b^{2ls}z_1$, де $z_1 \in \omega(G)$. Тоді $[x^2, b] = b^{4ls}$, звідки $ls \equiv 0 \pmod{2^{m-2}}$. Отже, $[x, b] \in \omega(G)$ і

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \omega(G).$$

Але у такому випадку $x^2 \in Z(G)$, що неможливо.

Оскільки у кожному з розглянутих випадків ми одержали протиріччя, то припущення неправильне і $G = N_G$. \square

Наступна теорема в об'єднанні з теоремою 2.4.1 дає повний опис локально скінченних 2-груп, нециклічна норма яких недедекіндова.

Теорема 2.4.2. *Скінченні 2-групи G з недедекіндовою нециклічною нормою N_G вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) G — скінченна негамільтонова \overline{H}_2 -група, $G = N_G$;
- 2) $G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|x| = 2^n$, $n > 2$, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[x, c] = 1$, $d^{-1}xd = x^{-1}$, $[b, c] = [d, b] = [d, c] = x^{2^{n-1}}$; $N_G = (\langle x^{2^{n-2}} \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$;
- 3) $G = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = 2^n$, $n > 3$, $|b| = |c| = 2$, $[x, c] = x^{\pm 2^{n-2}}b$, $[x, b] = x^{2^{n-1}}$; $N_G = (\langle x^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$;
- 4) $G = \langle x \rangle \rtimes H$, $|x| = 2^n$, $n > 2$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $[\langle x \rangle, H] = \langle x^{2^{n-1}} \rangle$; $N_G = \langle x^2 \rangle \times H$;
- 5) $G = (\langle x \rangle \times H) \langle y \rangle$, $|x| = 2^n$, $n \geq 2$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $y^2 = x^{2^{n-1}}$, $[y, h_2] = 1$, $[y, h_1] = y^2$, $y^{-1}xy = x^{-1}$; $N_G = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 x^{2^{n-2}} \rangle$;
- 6) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, якщо $m = 1$, то $k = 3$, $[x, b] = x^2$; $N_G = \langle x^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$; якщо $m > 1$, то $k \geq m + r$, $1 \leq r \leq m - 1$, $Z(G) = \langle x^{2^{r+1}} \rangle \times \langle b^{2^{r+1}} \rangle$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}s}b^{2^{m-1}t}$, $0 < s < 2$, $0 \leq t < 2$, $(k > 3 \text{ і } t = 0 \text{ при } m = 2)$; $N_G = \langle x^{2^r} \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Доведення. Нехай G — досліджувана 2-група і N_G — її нециклічна норма. Якщо $G = N_G$, то G є негамільтоновою \overline{H}_2 -групою, тобто групою типу 1) теореми. Тому далі будемо вважати, що $G \neq N_G$.

З леми 2.4.1 та твердження 2.1.1 випливає, що N_G є групою одного з типів 9)–10) або 8) при $n \geq m > 1$ або при $m = 1$, $n = 2$ твердження 2.1.1.

Розглянемо кожен з вказаних для підгрупи N_G випадків окремо й подальше доведення теореми проведемо у лемах 2.4.2 – 2.4.7.

Лема 2.4.2. *Скінченна 2-група G тоді і тільки тоді має нециклічну норму $N_G \neq G$, де*

$$N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |a| = 2^n, n \geq 2, |b| = |c| = 2, [c, a] = 1, [b, c] = a^{2^{n-1}},$$

коли G є групою одного з типів 2)–3) теореми 2.4.2.

Доведення. Необхідність. 1. Нехай група G та її нециклічна норма N_G задовольняють умови леми і $n = 2$. Тоді з умови $N_G \triangleleft G$ випливає, що у фактор-групі $G/\langle a \rangle = \bar{G}$ перетин $(\bar{N}_G \cap Z(\bar{G}))$ неединичний і, наприклад, $\bar{1} \neq \bar{c} \in Z(\bar{G})$. Повертаючись до прообразів, маємо $\langle a, c \rangle \triangleleft G$, звідки $\langle a^2, c \rangle \triangleleft G$ як характеристична підгрупа групи $\langle a, c \rangle$.

Позначимо $C = C_G(\langle a^2, c \rangle)$. Тоді $C \triangleleft G$, $[G : C] = 2$ і

$$G = C \rtimes \langle b \rangle.$$

За лемою 2.3.1 підгрупа $\langle a^2, c \rangle$ містить усі інволюції централізатора C . Отже, фактор-група $\tilde{C} = C/\langle c \rangle$ має єдину інволюцію і за твердженням 2.1.2 є циклічною або кватерніонною 2-групою.

Припустимо, що група \tilde{C} циклічна. Тоді, як відомо, $C = \langle x \rangle \times \langle c \rangle$ — абелева група і

$$[x, b] \in (N_G \cap C) = \langle a, c \rangle.$$

Якщо $|[x, b]| = 2$, то G — \bar{H}_2 -група, що неможливо за умовою. Отже, $|[x, b]| > 2$, $[x, b] = a^{\pm 1}c$, звідки $(xb)^2 \in Z(G)$ і $|x| \leq 8$. Неважко перевірити, що у такому випадку $x^2 = a^{\pm 1}c$ і $b \notin N_G(\langle a^2, xb \rangle)$ або $b \notin N_G(\langle a^2, xbc \rangle)$, всупереч означенню підгрупи N_G .

Отже, $\tilde{C} = \langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \rangle$ — кватерніонна 2-група, де $|\tilde{h}_1| = 2^n$, $n \geq 2$, $|\tilde{h}_2| = 4$, $\tilde{h}_1^{2^{n-1}} = \tilde{h}_2^2$, $\tilde{h}_2^{-1}\tilde{h}_1\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1^{-1}$. Позначимо h_1 і h_2 — прообрази елементів \tilde{h}_1 та \tilde{h}_2 відповідно. Тоді з циклічності центра $Z(G)$ та леми 2.3.3 випливає, що $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2 = a^2$ і $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}c^m$.

Якщо $m \neq 0$, то $(h_1h_2)^2 = a^2c$, що неможливо. Отже, $m = 0$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$ і

$$C = H \times \langle c \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$. Далі з умов $H \triangleleft G$ та $N_G^2 \subseteq Z(G)$ випливає, що $[H, N_G] \subseteq \langle a^2 \rangle$. Тому

$$B = \langle b, c \rangle \triangleleft G$$

і $[B, G] \subseteq \langle a^2 \rangle$. За лемою 1 роботи [159]

$$G = BC_G(B),$$

де $B \cap C_G(B) = \langle a^2 \rangle$.

Без порушень загальності міркувань можна вважати, що $C_G(B) = H$. Якщо $|H| = 8$, то всупереч умові $N_G \neq G$, $G \in \bar{H}_2$ -групою. Тому $|H| > 8$ і G — група типу 2) теореми 2.4.2.

2. Далі будемо вважати, що $n > 2$. Доведемо, що у цьому випадку підгрупа N_G містить усі елементи групи G , порядок яких не перевищує 4.

Припустимо, що це не так і існує інволюція $x \notin N_G$. Тоді

$$\langle a^{2^{n-1}}, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

і $[G_1 : G_{G_1}(\langle x, a^{2^{n-1}} \rangle)] \leq 2$. З цього випливає, що N_G містить нецентральну інволюцію y , переставну з x і тому

$$\langle y \rangle = (\langle y, x \rangle \cap N_G) \triangleleft G_1,$$

що неможливо.

Нехай $x_1 \in G \setminus N_G$, $|x_1| = 4$. За лемою 2.3.3 $x_1^2 = a^{2^{n-1}}$ і оскільки $\langle a \rangle \triangleleft G$, то група $\langle a, x_1 \rangle$ має циклічну підгрупу індекса 2. Враховуючи попередні міркування та теорему 12.5.1 роботи [151], робимо висновок, що $\langle a, x_1 \rangle$ — кватерніонна 2-група. Стверджуємо, що $[y, x_1] = 1$ для довільного елемента $y \in N_G$, $|y| = 2$.

Справді, оскільки

$$[y, x_1] \in \langle a, x_1 \rangle \cap N_G = \langle a \rangle,$$

то $[y^2, x_1] = [y, x_1^2] = 1$, і $[y, x_1] \in \langle x_1^2 \rangle = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$. Якщо при цьому $[y, x_1] = 1$, то $|yx_1| = 2$, що неможливо за доведеним. Тому

$$[x_1, b] = [x_1, c] = 1,$$

$[x_1, b] = 1$ і знову $|x_1bc| = 2$. Протиріччя доводить, що N_G містить усі елементи порядку 4 групи G .

Розглянемо фактор-групу $G/\langle a \rangle = \bar{G}$. З умови $\bar{N}_G \triangleleft \bar{G}$ випливає, що

$$\bar{N}_G \cap Z(\bar{G}) \neq \bar{E}.$$

Тому можна вважати, що $\bar{c} \in Z(\bar{G})$. У такому випадку $\langle a, c \rangle \triangleleft G$ і $\langle a^{2^{n-1}}, c \rangle \triangleleft G$.

Нехай $C = C_G(\langle a^{2^{n-1}}, c \rangle)$. Тоді $C \triangleleft G$ і

$$G = C \rtimes \langle b \rangle.$$

Покажемо, що C — абелева група. Справді, оскільки фактор-група $C/\langle c \rangle$ має єдину інволюцію, то вона циклічна або є кватерніонною 2-групою. В останньому випадку C містить елементи порядку 4, що не належать до N_G . Тому фактор-група $C/\langle c \rangle$ циклічна і $C = \langle x \rangle \times \langle c \rangle$ — абелева група.

Оскільки

$$[x, b] \in (C \cap N_G) = \langle a, c \rangle,$$

то можна вважати, що $[x, b] = a^m c^k$. Тоді з умови $|[x, b]| > 2$ випливає, що $m = 2^{n-2}m_1$, де $(m_1, 2) = (k, 2) = 1$. Отже, можна вважати, що $[x, b] = a^{\pm 2^{n-2}} c$. Оскільки $(xb)^2 \in Z(G)$, то не порушуючи загальності міркувань, покладемо $(xb)^2 = a$. Нехай $y = xb$. Тоді $|y| = 2^{n+1}$, $[y, c] = y^{2^n}$, $[y, b] = y^{\pm 2^{n-1}} c$ і

$$G = (\langle y \rangle \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle$$

— група типу 3) теореми 2.4.2.

Достатність. Нехай G є групою типу 2) теореми 2.4.2. Доведемо, що її нециклічна норма N_G збігається з підгрупою

$$N = (\langle x^{2^{n-2}} \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |x| = 2^n.$$

Розглянемо підгрупи $N_1 = N_G(\langle x^{2^{n-1}}, d \rangle)$ та $N_2 = N_G(\langle x^{2^{n-1}}, xd \rangle)$. Зрозуміло, що

$$N_G \subseteq N = N_1 \cap N_2 = \langle x^{2^{n-2}}, b, c, d \rangle \cap \langle x^{2^{n-2}}, b, c, xd \rangle.$$

Оскільки будь-яка нециклічна підгрупа групи G містить $\langle x^{2^{n-1}} \rangle$ та $[N, G] \subseteq \langle x^{2^{n-1}} \rangle$, то $N = N_G$.

Нехай G — група типу 3) теореми 2.4.2. Зрозуміло, що

$$N_G \subseteq N = \langle x^2 \rangle \times \langle b \rangle \rtimes \langle c \rangle.$$

Покажемо, що $N_G = N$.

Нехай H — довільна нециклічна підгрупа групи G . Якщо $H \leq N_G$, то $H \triangleleft N$ і $N \subseteq N_G(H)$. Тому будемо вважати, що $H \not\leq N$. У такому випадку H містить елемент $x^m b^n c^k$, де $(m, 2) = 1$. Враховуючи, що в G немає кватерніонних 2-груп порядку вищого за 8, будь-яка група кватерніонів міститься в N , приходимо до висновку, що $(H \cap \langle b, c \rangle)$ — нециклічна підгрупа і тому $H \supseteq G'$. Отже, $H \triangleleft G$ і $N_G = N$, що й треба було довести. \square

Лема 2.4.3. *Скінченна 2-група G тоді і тільки тоді має нециклічну норму $N_G \neq G$, де*

$$N_G = H \times \langle c \rangle,$$

$|c| = 2^n > 2$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, коли G — група типу 4) теореми 2.4.2.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Оскільки $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$, то за лемою 2.3.2 $\omega(G) = \omega(N_G)$. Доведемо, що N_G містить усі елементи порядку 4 групи G , тобто

$$\omega_2(N_G) = \omega_2(G).$$

Припустимо протилежне і розглянемо групу

$$G_1 = \langle x \rangle \omega_2(N_G),$$

де $x \in G \setminus N_G$, $|x| = 4$. Враховуючи умову

$$G'_1 \subseteq \omega(G) \subseteq Z(G_1),$$

робимо висновок, що $G_1 - \overline{HA_2}$ -група. За теоремою 2.2 [113] G_1 — прямий або напівпрямий добуток двох груп кватерніонів. Незавжди переконались, що у кожному з цих випадків нециклічна норма N_{G_1} групи G_1 не містить $\omega_2(N_G) \leq N_G$, що неможливо за лемою 2.1.1. Отже, $\omega_2(N_G) = \omega_2(G)$.

Нехай x — елемент найменшого порядку групи G , що не належить N_G . Тоді $x^2 \in N_G$ та $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = c^m h^k$, $h \in H$. Оскільки

$$\langle x \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G,$$

то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$. Враховуючи попередні міркування, неважко довести, що $k \equiv 0 \pmod{2}$, звідки $x^2 = c^m h^{2k}$.

Нехай $m = 2l$. Тоді зі співвідношень $[x^2, c] = 1$ та

$$[x, c] \in (N_G \cap \langle x \rangle \omega(N_G)) = \langle x^2 \rangle \omega(N_G)$$

випливає, що $[x, c] \in \omega(N_G) \subseteq Z(G)$. Звідси $(xc^{-l})^2 = x^2 c^{-2l} z = h^{2k} z$, де $z \in \omega(N_G)$ і тому $|xc^{-l}| \leq 4$. Тоді $x \in N_G$, що неможливо за його вибором. Значить, $(m, 2) = 1$ і при $|c| > 4$ фактор-група $\overline{G} = G/\omega_2(N_G)$ має єдину інволюцію.

Нехай $|c| = 4$. Припустимо, що фактор-група $\overline{G} = G/\omega_2(N_G)$ містить підгрупу $(\langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle)$ порядку 4. Переходячи до прообразів та враховуючи міркування, наведені у попередньому абзаці, покладемо

$$x^2 = c^{m_1} h^{2k_1}, y^2 = c^{m_2} h^{2k_2},$$

де $h \in H$, $(m_1, 2) = (m_2, 2) = 1$, $[x, y] = c^l h^t$.

Оскільки $(xy)^2 = c^{l+(m_1+m_2)} h^{t+2(k_1+k_2)}$, то за доведеним $t \equiv 0 \pmod{2}$. Враховуючи, що $[x, c] = [y, c] = 1$ та $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$, одержимо, що й $l \equiv 0 \pmod{2}$, звідки $(xy)^2 \in \omega(N_G)$ і $x \in y\omega_2(N_G)$.

Таким чином, фактор-група $\overline{G} = G/\omega_2(N_G)$ має єдину інволюцію і тому є циклічною або кватерніонною 2-групою. У останньому випадку \overline{G} містить групу кватерніонів $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ порядку 8. Зрозуміло, що при цьому $|c| \leq 8$.

Якщо $|c| = 8$, то, переходячи до прообразів та враховуючи попередні міркування, покладемо

$$x^2 = c^{m_1} h^{2k_1}, y^2 = c^{m_2} h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1,$$

$$y^{-1}xy = xy^2c^{2l}h^t, h \in H.$$

Оскільки $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \omega(N_G)$, $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$, то

$$y^{-1}x^2y = x^2 = x^2y^4c^{4l}h^{2t}z = x^2c^{2m_2}z_1,$$

де $z, z_1 \in \omega(N_G)$ і тому $(m_2, 2) \neq 1$, що неможливо.

Нехай $|c| = 4$. Тоді

$$x^2 = y^2 c^r h^s, y^{-1} x y = x y^2 c^{l_1} h^{t_1}, x^4 = c^{m_1} h^{2k_1}, y^4 = c^{m_2} h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1.$$

Неважко переконатись, що

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \omega(N_G), [\langle y \rangle, N_G] \subseteq \omega(N_G).$$

Тому зі співвідношень

$$[x, x^2] = [x, y^2 c^r h^s] = [x, c^r h^s] [x, y^2]^{c^r h^s} = 1$$

та $[x, c^r h^s] \in \omega(G)$ випливає, що $[x, y^2] \in \omega(G)$.

З іншого боку

$$y^{-2} x y^2 = x y^4 (c^{l_1} h^{t_1})^2 z = x c^{m_2} h^{2k_2} z_1,$$

де $z, z_1 \in \omega(N_G)$, і знову $(m_2, 2) \neq 1$, всупереч доведеному. Отже, фактор-група $\overline{G} = G/\omega_2(N_G)$ — циклічна і

$$G = \langle x \rangle \omega_2(N_G).$$

Враховуючи, що $[x, c] = 1$ і

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq (\omega_2(N_G) \cap \langle x \rangle \omega(G)) \subseteq Z(G),$$

одержимо $[\langle x \rangle, N_G^2] = 1$. Тому $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \omega(G)$, $G' = \omega(G)$ і $x^2 \in Z(G)$. За наслідком 1.1.7 роботи [143] G — група типу 4) теореми 2.4.2.

Достатність. Нехай G — група типу 4) теореми 2.4.2. Зрозуміло, що

$$N_G \subseteq N = N_G(H) = \langle x^2 \rangle \times H.$$

Оскільки $[N, G] \subseteq \omega(G)$, то досить довести, що N нормалізує будь-яку кватерніонну 2-групу з G . Оскільки всі кватерніонні 2-групи з G містяться в N , і N — \overline{H}_2 -група, то N нормалізує будь-яку нециклічну підгрупу і $N_G = N$. \square

Лема 2.4.4. *Скінченна 2-група G тоді і тільки тоді має нециклічну норму $N_G \neq G$, де*

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 4, |b| = 2, [a, b] = a^2,$$

коли G — група типу 6) теореми 2.4.2 при $m = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай x — довільний елемент простого порядку групи G . Тоді $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle a^2 \rangle$, $[\omega(G), N_G] \subseteq \langle a^2 \rangle$ і за лемою 1 [159]

$$\omega(G) = C N_G,$$

де $C = C_{\omega(G)}(N_G)$, $C \cap N_G = \langle a^2 \rangle$.

Оскільки G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 8, то C має єдину інволюцію і за твердженням 2.1.2 є циклічною чи кватерніонною 2-групою, причому у першому випадку $|C| \leq 4$, бо інакше $\omega(G)$ не породжується інволюціями.

Нехай $|C| \geq 4$ і $x \in G \setminus \omega(G)$, $|x| = 4$. Перейдемо до фактор-групи $\overline{G} = G/N_G$. Оскільки

$$\overline{\omega(G)} = \overline{C} \triangleleft \overline{G},$$

то існує елемент $\bar{z} \in \overline{C} \cap Z(\overline{G})$, $|\bar{z}| = 2$. Тоді $[z, x] = a^m b^n$ і можна вважати, що $z \in C$, $|z| = 4$.

Враховуючи циклічність $Z(G)$ та лему 2.3.3, одержимо

$$x^2 = z^2 = a^2.$$

Тому $(zx)^2 = a^m b^n$ і $(n, 2) \neq 1$. Припустимо, що $(m, 2) \neq 1$. Тоді $[zx, a] = 1$, $[x, a] = 1$ і значить $|xa| = 2$, що неможливо за вибором елемента x . Отже, $[z, x] = a^2$ і $\langle z, x \rangle$ — група кватерніонів. Оскільки

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq (N_G \cap \langle z, x \rangle) = \langle a^2 \rangle,$$

то неважко переконатись, що N_G містить елемент y , такий що $|xy| = 2$. Тому $x \in \omega(G)$, що неможливо за його вибором. Отже, якщо $|C| \geq 4$, то $\omega(G)$ містить усі елементи порядку 4 групи G і тому $\overline{\omega(G)} = \omega(\overline{G})$.

Далі розглянемо кожен із вказаних для підгрупи C випадків окремо.

Нехай $C = \langle c \rangle$, $|c| = 4$. За доведеним вище $\omega(\overline{G})$ має єдину інволюцію і тому \overline{G} — циклічна чи кватерніонна 2-група. Неважко переконатись, що у такому випадку $c \in Z(G)$, що неможливо за умовою.

Нехай $C = \langle x, y \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Покажемо, що за цієї умови $\overline{G} = \overline{C}$. Справді, нехай існує елемент $\bar{z} \in \overline{G}$, $|\bar{z}| = 4$. Тоді $\bar{z}^2 = \bar{x}$ і $[\bar{z}, \bar{y}] = 1$. Переходячи до прообразів, покладемо $[z, y] = a^m b^n$. Тоді

$$(zy)^2 = a^{m+2} b^n.$$

Оскільки $[\langle z \rangle, N_G] \subseteq \langle a \rangle$, то $[z, b] = a^t$. Якщо при цьому $(t, 2) = 1$ і $|zb| = 4$, то $z \in \omega(G)$, всупереч його вибору. Отже, $[\langle z \rangle, N_G] \subseteq \langle a^2 \rangle$ і

$$[\langle (zy)^2 \rangle, N_G] = E.$$

З цього випливає, що $n \equiv m \equiv 0 \pmod{2}$ та $[z, y] = a^{2s}$. Отже,

$$[z^2, y] = [x, y] = 1.$$

Протиріччя доводить, що цей випадок неможливий. Тому $\overline{C} = \overline{G}$, $G = \omega(G)$ і, всупереч умові, $G \in \overline{H}_2$ -групою.

Припустимо тепер, що $C = \langle x, y \rangle$ — узагальнена група кватерніонів порядку більшого за 8, де $|x| = 2^k > 4$, $y^2 = x^{2^{k-1}}$, $y^{-1}xy = x^{-1}$. Тоді у факторгрупі $\overline{G} = G/N_G$ підгрупа $\langle \bar{x}^{2^{k-3}} \rangle$ нормальна, оскільки вона характеристична у групи $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G}$. Звідси

$$\overline{G} = C_{\overline{G}}(\langle \bar{x}^{2^{k-3}} \rangle) \langle \bar{y} \rangle = \langle \bar{z} \rangle \rtimes \langle \bar{y} \rangle,$$

причому $\bar{y}^{-1}\bar{z}\bar{y} = \bar{z}^{-1}\bar{z}^{2^{s-1}l}$, де $|\bar{z}| = 2^s$. Якщо $l \neq 1$, то $\overline{G} = \omega(\overline{G})$ і норма нециклічних підгруп групи G відмінна від N_G . Отже, $l = 1$.

Враховуючи, що $[\langle z \rangle, N_G] \subseteq \langle a \rangle$, неважко довести, що у суміжному класі zN_G знайдеться такий елемент z_1 , що $|z_1| = |z|$, $z_1^2 \in C$. Звідси $\langle z_1^2 \rangle = \langle x \rangle$ і

$$y^{-1}z_1y = z_1^{-1}z_1^{2^{s-1}}a^mb^n,$$

де $z_1^{2^s} = a^2$. Оскільки

$$y^{-1}z_1^2y = z_1^{-2} = z_1^{-2}a^{m+2}b^na^r,$$

де $[z_1, a^mb^n] = a^r$, то $n \equiv 0 \pmod{2}$. Значить, $r \equiv 0 \pmod{2}$ і $m \equiv 0 \pmod{2}$. З іншого боку $y^{-2}z_1y^2 = z_1z_1^{2^s}a^{4m} = z_1$ і тому $z_1^{2^s} = 1$, що неможливо.

Таким чином $|C| = 2$ і $\omega(G) = N_G$. Оскільки $\langle a \rangle \triangleleft G$, $[G : C_G(\langle a \rangle)] = 2$ то

$$G = C_G(\langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle.$$

Підгрупа $C_G(\langle a \rangle)$ має єдину інволюцію і неважко довести, що $C_G(\langle a \rangle) = \langle x \rangle$ — циклічна підгрупа. Оскільки

$$[x, b] \in C_G(\langle a \rangle) \cap N_G = \langle a \rangle$$

і $G \neq N_G$, то $x^2 = a$, $[x, b] = x^2$ — група типу 6) теореми 2.4.2 при $m = 1$.

Доведемо, що група

$$G = \langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle, |x| = 8, |b| = 2, b^{-1}xb = x^{-1}$$

має нециклічною нормою підгрупу $N_G = \langle x^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Оскільки $|G| = 16$, то в G нормальна будь-яка підгрупа порядку 8. Отже, досить перекопатись, що $\langle x^2, b \rangle \subseteq N_G(H)$, де H — нециклічна підгрупа порядку 4. Очевидно, що

$$H = \langle x^4 \rangle \times \langle x^{2\alpha}b \rangle, [\langle x^2, b \rangle, H] \subseteq \langle x^4 \rangle \subseteq H.$$

Тому $N_G = \langle x^2, b \rangle$. □

Лема 2.4.5. *Скінченна 2-група G тоді і тільки тоді має нециклічну норму $N_G \neq G$, де*

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 4, |b| = 4, [a, b] = a^2,$$

коли G — група типу 5) теореми 2.4.2.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група, що має вказану в умові леми нециклічну норму N_G . Припустимо, що $\omega(N_G) \not\subseteq Z(G)$. Тоді $a^2 \in Z(G)$ і $b^2 \notin Z(G)$. З умови $\omega(N_G) \triangleleft G$ випливає, що

$$C = C_G(\omega(N_G)) \triangleleft G.$$

Оскільки $[G : C] = 2$, то

$$G = C\langle d \rangle.$$

Розглянемо фактор-групу $\overline{G}_1 = N_G\langle d \rangle / \omega(N_G)$. Якщо $\langle \bar{d} \rangle \cap \overline{N}_G = \overline{E}$, то

$$G'_1 \subseteq \omega(N_G).$$

Звідси $[b^2, d] = 1$, що суперечить вибору елемента d . Отже, $\langle \bar{d} \rangle \cap \overline{N}_G \neq \overline{E}$. За лемою 2.1.2 $\langle \bar{d} \rangle \triangleleft \overline{G}_1$, тому

$$\langle \bar{d} \rangle \cap \overline{N}_G = \langle \bar{a} \rangle.$$

Значить, $[\bar{b}, \bar{d}] \in \langle \bar{a} \rangle$ і знову $[b^2, d] = 1$. Протиріччя доводить, що цей випадок неможливий. Отже, $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$ і за лемою 2.3.2 $\omega(N_G) = \omega(G)$.

Нехай x — елемент найменшого порядку групи G , що не належить нормі N_G . Тоді $x^2 \in N_G$ і $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = a^n b^m$. З умови

$$\langle x \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

випливає, що $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, тому $m \equiv 0 \pmod{2}$. Нехай $n \not\equiv 0 \pmod{2}$. Тоді за лемою 2.1.2

$$\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G}_1 = G_1 / \omega(G)$$

і $\overline{G}'_1 \leq \langle \bar{a} \rangle$. Якщо $\overline{G}'_1 = \overline{E}$, то $[x, b] \in \omega(G)$ і $[x^2, b] = 1$, що неможливо. Тому

$$\overline{G}'_1 = \langle \bar{a} \rangle$$

і $|\bar{b}\bar{x}| = 2$. Але у такому випадку $\bar{b} \notin N_{\overline{G}}(\langle \bar{b}\bar{x} \rangle)$, що суперечить лемі 2.1.2. Отже, $n \equiv 0 \pmod{2}$ і для будь-якого елемента $x \in G$, $|x| = 2^k > 2$ має місце включення

$$N_G \bigcap \langle x \rangle \subseteq \omega(G).$$

Нехай \overline{A} — максимальна елементарна абелева підгрупа групи $\overline{G} = G / N_G$ і \bar{x}, \bar{y} — довільні елементи з \overline{A} . За доведеним $x^2 \in \omega(G)$, $y^2 \in \omega(G)$ і

$$[x^2, y] = [x, y^2] = 1.$$

Покладемо $[x, y] = a^r b^t$. Тоді

$$(xy)^2 = a^r b^t z,$$

де $z \in \omega(G)$, звідки $r \equiv t \equiv 0 \pmod{2}$. Таким чином, для будь-яких елементів $x, y \in A$, де A — повний прообраз підгрупи \bar{A} , має місце співвідношення $[x, y] \in \omega(G)$, звідки

$$A' \subseteq \omega(G).$$

Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа з A містить нижній шар $\omega(G)$, то A — \overline{HA}_2 -група експоненти 4. З опису таких груп (теорема 2.2 [113]) випливає, що $|\bar{A}| \leq 4$.

Далі розглянемо два випадки в залежності від порядку підгрупи \bar{A} .

Нехай $|\bar{A}| = 2$. З нільпотентності групи \bar{G} випливає, що $Z(\bar{G}) \neq E$ і тому \bar{G} має єдину інволюцію. За твердженням 2.1.2 \bar{G} є циклічною або кватерніонною 2-групою.

Якщо фактор-група $\bar{G} = G/N_G$ циклічна, то

$$G = \langle x \rangle N_G$$

і $G' \subseteq \omega(G)$. Звідси $x^2 \in Z(G)$ і G є \overline{HA}_2 -групою, бо кожна абелева нециклічна підгрупа з G містить $\omega(G)$. Використовуючи теорему 2.2 з [113], робимо висновок, що

$$G = \langle y \rangle \rtimes H,$$

де H — група кватерніонів, $|y| = 2^k \geq 4$, $[\langle y \rangle, H] = \langle y^2 \rangle$. Неважко переконатись, що нециклічна норма такої групи відмінна від N_G , що неможливо за умовою.

Нехай \bar{G} — кватерніонна 2-група. У такому випадку вона містить групу кватерніонів $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ порядку 8. Переходячи до прообразів, покладемо

$$y^2 = x^2 a^m b^s.$$

Тоді враховуючи умову

$$[\langle y \rangle, N_G] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G = \omega(G),$$

одержимо, що $[\langle y^2 \rangle, N_G] = E$. Аналогічно переконуємося, що

$$[\langle x^2 \rangle, N_G] = E.$$

Тому $m \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$ і $x^2 \in Z(G)$, що неможливо.

2) Нехай максимальна елементарна абелева підгрупа

$$\bar{A} = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle \leq \bar{G}$$

має порядок 4. Якщо $\bar{A} = \bar{G}$, то $G' \subseteq \omega(G)$ і G — \overline{HA}_2 -група порядку 64 експоненти 4. Оскільки $G \neq N_G$, то за теоремою 2.2 [113] G — група типу 5) теореми 2.4.2.

Нехай $\bar{A} \neq \bar{G}$. Позначимо $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{A})$. Тоді $\bar{N} \neq \bar{A}$ і $[\bar{N} : C_{\bar{N}}(\bar{A})] = 2$. Без порушень загальності будемо вважати, що $\bar{x} \in C_{\bar{N}}(\bar{A})$ і покажемо, що \bar{N} — група діедра порядку 8. Справді, підгрупа $C_{\bar{G}}(\bar{A})$ не містить нециклічних абелевих підгруп порядку 8, бо повний прообраз такої групи є $\overline{HA_2}$ -групою, що неможливо за теоремою 2.2 з [113]. Тому $C_{\bar{G}}(\bar{A}) = \bar{A}$ і, оскільки

$$\bar{N} = C_{\bar{G}}(\bar{A}) \langle \bar{x}_1 \rangle,$$

де $\bar{x}_1^2 \in C_{\bar{G}}(\bar{A})$, то

$$\bar{N} = \langle \bar{x}_2 \rangle \rtimes \langle \bar{y} \rangle, |\bar{x}_2| = 4.$$

Покладемо $\bar{N}_1 = N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$. З умови $[\bar{N}_1 : C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_1 \rangle)] = 2$ випливає, що

$$\bar{N}_1 = C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle) \rtimes \langle \bar{y} \rangle,$$

де $C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$ — циклічна підгрупа. Тому

$$\bar{N}_1 = \langle \bar{z} \rangle \rtimes \langle \bar{y} \rangle, \bar{x}_2 \in \langle \bar{z} \rangle.$$

За теоремою 12.5.1 роботи [151] $\bar{N}_1' = \langle \bar{z}^2 \rangle$, тому $\langle \bar{x}_2 \rangle$ — характеристична підгрупа групи \bar{N}_1 .

Нехай $\bar{N}_2 = N_{\bar{G}}(\bar{N}_1)$. Тоді $\langle \bar{x}_2 \rangle \triangleleft \bar{N}_2$ і

$$\bar{N}_2 \leq N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle) = \bar{N}_1.$$

Останнє можливо лише при умові, що

$$\bar{N}_1 = \bar{G} = \langle \bar{z} \rangle \rtimes \langle \bar{y} \rangle, |\bar{z}| = 2^k > 2, |\bar{y}| = 2, \bar{y}^{-1} \bar{z} \bar{y} = \bar{z}^{-1+2^{k-1}t}, t \in \{0, 1\}.$$

Покажемо, що $t = 0$. Зазначимо, що для довільного елемента $g \in \langle x, y \rangle$, $|g| \geq 8$ мають місце співвідношення $[g^2, N_G] = 1$ та $\langle g \rangle \cap N_G = \langle a^2 b^2 \rangle$.

Нехай $z_1 = z^{2^{k-1}}$, тоді

$$y^{-1}zy = z^{-1}z_1^t a^m b^n$$

де z та y — прообрази елементів \bar{z} та \bar{y} відповідно.

Оскільки $|z| > 8$, то $|zy| = 8$ і

$$(zy)^4 = a^2 b^2 = a^2 b^2 a^{2n+2mn} b^{2m}.$$

Тому $n \equiv m \equiv 0 \pmod{2}$ і $y^{-1}zy = z^{-1}z_1 a_1$, де $a_1 \in \omega(G)$. Нехай $[z_1, y] = a^2$, $a^2 \in \omega(G)$. Тоді з умови $y^2 \in \omega(G)$ випливає, що

$$y^{-2}zy^2 = za^2 = z,$$

звідки $a^2 = 1$ і $z_1 \in Z(G)$, що неможливо. Отже, $\bar{y}^{-1} \bar{z} \bar{y} = \bar{z}^{-1}$. Переходячи до прообразів, покладемо

$$y^{-1}zy = z^{-1}a^l b^s.$$

Тоді з умов

$$\langle yz \rangle \cap N_G \subseteq \omega(G)$$

та $(zy)^2 = y^2 a_l b^s \in N_G$ впливає, що $l \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$.

Розглянемо фактор-групу

$$\tilde{G} = G/\langle z^2 \rangle \cong (\langle \tilde{z} \rangle \times \tilde{N}_G) \langle \tilde{y} \rangle, \tilde{y}^2 \in \tilde{N}_G.$$

Якщо $[\tilde{z}, \tilde{y}] \neq 1$, то $[\tilde{z}, \tilde{y}] = \tilde{a}^2 \in \tilde{N}_G$ і $\tilde{H} = \langle \tilde{z}, \tilde{y} \rangle$ — група діедра. Оскільки

$$\tilde{H} \triangleleft \tilde{G}, [\tilde{H}, \tilde{G}] \subseteq \langle \tilde{a}^2 \rangle,$$

то за лемою 1 [159], одержимо

$$\tilde{G} = \tilde{H} C_{\tilde{G}}(\tilde{H}).$$

При цьому без порушень загальності можна вважати, що $\tilde{N}_G \subseteq C_{\tilde{G}}(\tilde{H})$. Тоді

$$[H, N_G] \subseteq N_G \cap \langle z^2 \rangle = \langle a^2 b^2 \rangle.$$

Оскільки $[\tilde{z}, \tilde{y}] = \tilde{a}^2$, то переходячи до прообразів, будемо мати

$$y^{-1}zy = z^{-1}a^2(a^2b^2)^m.$$

Враховуючи, що $y^2 = a^2b^2$, одержимо

$$(zy)^2 = y^2 a^{2+2m} b^{2m} = a^{2m} b^{2m+2}.$$

Нехай $m = 1$. Тоді $(zy)^2 = a^2$ і оскільки $[zy, a] \in \langle a^2 b^2 \rangle$, то або $|zya| = 2$, що суперечить лемі 2.3.2, або $\langle zya, z^{2^{k-1}} \rangle$ — група кватерніонів. Це також неможливо, бо $b \notin N_G(\langle zya, z^{2^{k-1}} \rangle)$. Отже, $m = 0$. Тоді $(zy)^2 = b^2$ і якщо $[zy, b] = 1$, то $|zyb| = 2$, що неможливо за доведеним.

Отже, $[zy, b] = a^2 b^2$ і $\langle zyb, z^{2^{k-1}} \rangle$ — група кватерніонів. Оскільки $a \notin N_G(\langle zyb, z^{2^{k-1}} \rangle)$, то знову маємо протиріччя.

Таким чином, $[\tilde{z}, \tilde{y}] = 1$ і

$$y^{-1}zy = z^{-1}(a^2b^2)^m.$$

Оскільки при $m \neq 0$ $(yz)^2 = 1$, то $y^{-1}zy = z^{-1}$ і $\langle y, z \rangle$ — кватерніонна 2-група. Враховуючи недедекіндовість підгрупи N_G та нормальність підгрупи $\langle y, z \rangle$ в G , приходимо до висновку, що

$$G = (\langle z \rangle \times \langle a, z^{2^{k-1}}b \rangle) \langle y \rangle,$$

де $|z| = 2^{k+1} \geq 8$, $|y| = 4$, $[b, z] = [a, z] = [y, a] = [y, b] = 1$ і G — група типу 5) теореми 2.4.2.

Достатність. Нехай G — група типу 5) теореми 2.4.2. Зрозуміло, що

$$N_G \subseteq N = N_1 \bigcap N_2 = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 x^{2^{n-2}} \rangle,$$

де $N_1 = N_G(\langle h_1 d, h_2 \rangle)$ та $N_2 = N_G(H)$. Враховуючи, що

$$[N, G] \subseteq \omega(G) = \langle h_1^2, x^{2^{n-1}} \rangle$$

досить показати, що підгрупа N нормалізує усі кватерніонні 2-групи з G . Оскільки це очевидно для підгруп, що містяться у $C = \langle x \rangle \times H$, то розглядати будемо лише ті, що підгрупі C не належать.

Нехай Q — кватерніонна 2-група і $Q \not\subseteq C$. Якщо Q містить елемент dx^i , то оскільки $[\langle dx^i \rangle, N] \subseteq \langle d^2 \rangle$, одержимо $N \subseteq N_G(Q)$. Якщо Q містить елемент $dh_1 x^i$, то $Q = \langle dh_1 x^i, x^{2^{n-1}t} h_2 \rangle$ і зі співвідношення

$$[N, Q] \subseteq \langle h_2 \rangle \subseteq Q$$

робимо висновок, що $N \subseteq N_G(Q)$. Оскільки інших кватерніонних 2-груп, що не містяться у C немає, то N нормалізує кожну нециклічну підгрупу групи і $N = N_G$. \square

Лема 2.4.6. *Скінченна 2-група G тоді і тільки тоді має недедекіндову нециклічну норму $N_G \neq G$, де*

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n, n > 2, |b| = 2^m, m \geq 2, n \geq m, [a, b] = a^{2^{n-1}}$$

та $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$, коли $m > 2$ і G — група типу 6) теореми 2.4.2 при $r \leq m - 2$.

Доведення. Необхідність. Нехай x — елемент найменшого порядку групи G , що не належить підгрупі N_G . Тоді $x^2 \in N_G$ і за лемою 2.3.2 $|x| > 2$.

Покладемо $x^2 = a^\alpha b^\beta$ і припустимо, що $x^2 \in Z(N_G)$. Тоді у групі

$$G_1 = \langle x \rangle N_G$$

з умов

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x^2 \rangle \omega(N_G) \subseteq Z(G_1)$$

та $[\langle x^2 \rangle, N_G] = 1$ випливає, що $G_1' \subseteq \omega(N_G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G_1 містить $\omega(N_G)$, то $G_1 \in \overline{HA_2}$ -групою. Використовуючи опис таких груп ([113], теорема 2.2), приходимо до протиріччя. Отже, $x^2 \notin Z(N_G)$.

Нехай $(\alpha, 2) \neq 1$. Тоді з умов $x^2 \notin Z(N_G)$ та $\langle x^2 \rangle \triangleleft N_G$ випливає, що $n > m + 1$. Покладемо $x^2 = a^{2\alpha_1} b^\beta$, де $(\beta, 2) = 1$ за доведеним. Оскільки

$$G_1' \subseteq \langle x^2 \rangle \omega(N_G),$$

то для довільного елемента $\bar{z} \in \bar{G}_1 = G_1/\omega(N_G)$ має місце співвідношення

$$[\bar{x}^2, \bar{z}] = [\bar{x}, \bar{z}]^2 = 1.$$

Звідси $|\bar{G}_1'| = 2$, $\bar{G}_1' \leq \langle \bar{a}^{2^{n-2}} \rangle$ і

$$G_1' \subseteq \langle a^{2^{n-2}}, b^{2^{m-1}} \rangle \subseteq Z(G_1).$$

Покладемо $y = xa^{-\alpha_1}$. Оскільки $\langle y \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1$, то $\langle y^2 \rangle \triangleleft G_1$. З іншого боку

$$y^2 = (xa^{-\alpha_1})^2 = b^\beta a^{2^{n-2}t} z,$$

де $z \in \omega(N_G)$, $(\beta, 2) = 1$ і тому $a \notin N_{G_1}(\langle y^2 \rangle)$. Це неможливо. Отже, у будь-якому випадку $x^2 = a^\alpha b^\beta$ і $(\alpha, 2) = 1$.

Позначимо $\omega_m(N_G)$ підгрупу з N_G , породжену елементами, порядок яких не перевищує 2^m . Якщо $n > m$, то за доведеним у попередньому абзаці фактор-група $\tilde{G} = G/\omega_m(N_G)$ має єдину інволюцію.

Доведемо справедливність цього твердження при $n = m$. Припустимо протилежне. Тоді \tilde{G} містить елементарну абелеву підгрупу $\langle \tilde{x} \rangle \times \langle \tilde{y} \rangle$ порядку 4. За доведеним

$$x^2 = a^{\alpha_1} b^{2\beta_1}, y^2 = a^{\alpha_2} b^{2\beta_2}, (\alpha_1, 2) = (\alpha_2, 2) = 1.$$

Неважко переконатись у тому, що

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle a^{2^{m-2}} \rangle \omega(N_G)$$

та

$$[\langle y \rangle, N_G] \in \langle a^{2^{m-2}} \rangle \omega(N_G).$$

Покладемо $[x, y] = a^r b^q$. Враховуючи, що $[x, a] \in \omega(N_G)$ та $[y, a] \in \omega(N_G)$, одержимо $[x, y^2] \in \omega(N_G)$. Звідси

$$y^{-2} x y^2 = x a^{2r} b^{2q} a^{2^{m-2} \alpha s q} z_1,$$

де $z_1 \in \omega(N_G)$. Тому $2^{r+2m-2qs} \alpha \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$ і $2q \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$.

Оскільки $m > 2$, то $q \equiv 0 \pmod{2}$ і $r \equiv 0 \pmod{2}$. Отже, $[x, y] = a^{2r_1} b^{2q_1}$ і

$$(xy)^2 = y^2 x^2 a^{2r_1} b^{2q_1} z = a^{\alpha_1 + \alpha_2 + 2r_1} b^{2(\beta_1 + \beta_2 + q_1)} z_2 \in Z(N_G),$$

де $z, z_2 \in \omega(N_G)$, що неможливо за доведеним вище. Таким чином, фактор-група \tilde{G} містить єдину інволюцію і за твердженням 2.1.2 є циклічною або кватерніонною 2-групою.

Далі розглянемо два випадки у залежності від порядків елементів a і b .

1. Нехай $n > m$. Покажемо, що група \tilde{G} циклічна. Справді, інакше вона містить групу кватерніонів $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ порядку 8. За доведеним $\tilde{x}^2 = \tilde{y}^2 \in \tilde{N}_G$ і тому

$$[N_G : \omega_m(N_G)] = 2.$$

Покладемо $x^2 = a^\alpha b^\beta$, $y^2 = x^2 a^{2t} b^q$. Тоді

$$y^{-1}xy = xx^2 a^{2s} b^r = xa^{2s+\alpha} b^{\beta+r}$$

і оскільки

$$[\langle y \rangle, N_G] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \bigcap \omega_m(N_G) = \langle y^4 \rangle \omega(G)$$

та $[\langle y^2 \rangle, N_G] \subseteq \omega(G)$, то

$$[\langle y \rangle, N_G] \subseteq \langle a^{2^{n-2}} \rangle \omega(G).$$

Аналогічно можна показати, що

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle a^{2^{n-2}} \rangle \omega(G),$$

тому $[x, y^2] = a^{2^{n-2}t} z$, де $z \in \omega(N_G)$. З іншого боку

$$y^{-2}xy^2 = xa^{2\alpha+4s}b^{2(\beta+r)}a^{2^{n-2}(\alpha+r+\beta)t_1}z_1 = xa^{2\alpha+4s+2^{n-2}(\alpha+r+\beta)t_1}b^{2(\beta+r)}z_2,$$

де $z_1, z_2 \in \omega(N_G)$. Звідси $\alpha + 2s \equiv 0 \pmod{2^{n-3}}$ і оскільки $(\alpha, 2) = 1$ та $n > 2$, то $n = 3$ і $m = 2$. Але у такому випадку $[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \omega(G)$ та $[\langle y \rangle, N_G] \subseteq \omega(G)$. Отже,

$$y^{-2}xy^2 = xz = xa^{2\alpha+4s}b^{2(\beta+r)}z_1,$$

де $2\alpha + 4s \equiv 0 \pmod{4}$ і $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$. Протиріччя доводить, що цей випадок неможливий. Отже, фактор-група \tilde{G} циклічна і

$$G = \langle x \rangle \omega_m(N_G),$$

$$x^{2^r} = a^\alpha b^\beta, (\alpha, 2) = 1.$$

Далі з умов

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap \omega_m(N_G) = \langle x^{2^{r+n-m}} \rangle \omega(G) \leq Z(G)$$

та $[x, b^{2^{m-1}}] = 1$ випливає, що $[x^{2^{m-1}}, b] = 1$. Тоді зі співвідношення

$$1 = [x, x^{2^r}] = [x, a^\alpha b^\beta] = [x, a]^\alpha [x, b^\beta]$$

робимо висновок, що $[x^{2^{m-1}}, a] = 1$. Отже, $x^{2^{m-1}} \in Z(G)$ і

$$G' \subseteq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap \omega_{m-1}(N_G) = \langle (a^\alpha b^\beta)^{2^{n-m+1}} \rangle \omega(G).$$

Оскільки $x^{2^{r+1}}$ — найменший степінь елемента x , що міститься у центрі підгрупи N_G , то $m - 1 \geq r + 1$, звідки $r \leq m - 2$, а значить $m \geq 3$.

Враховуючи співвідношення

$$[x^{2^r}, b] = a^{2^{n-1}\alpha} = [x, b]^{2^r} = (a^{2^{n-m+1}\alpha s} b^{2^{n-m+1}\beta s})^{2^r},$$

будемо мати $2^{n-m+1+r}\alpha s \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$. Оскільки $m - r \geq 2$ та $(\alpha, 2) = 1$, то $s = 2^{m-r-2}s_1$. Отже,

$$[x, b] = (a^\alpha b^\beta)^{2^{n-r-1}s_1} b^{2^{m-1}t} = x^{2^{k-r-1}s_1} b^{2^{m-1}t},$$

де $|x| = 2^k$ і $(s_1, 2) = 1$, $t \in \{0, 1\}$. Враховуючи, що підгрупи $\langle x \rangle$ та $\langle b \rangle$ переставні, робимо висновок, що

$$G = \langle x \rangle \langle b \rangle$$

і G — група типу 6) теореми 2.4.2 при $m \geq 3$, $m - 2 \geq r$ і $k > m + r$.

2. Нехай $m = n > 2$. Покажемо, що фактор-група $\tilde{G} = G/N_G$ не містить підгрупи кватерніонів $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$. Нехай x, y — прообрази елементів \tilde{x} та \tilde{y} відповідно. Тоді $x^2 = y^2 a^r b^q$, $x^4 = a^\alpha b^{2\beta}$, де $(\alpha, 2) = 1$ і $y^{-1}xy = xx^2 a^s b^t$. Безпосередня перевірка показує, що

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x^{2^{m-1}} \rangle \omega(G).$$

Тому

$$[y, x^2] = [y, y^2 a^r b^q] = [y, a^r b^q] \in \langle x^{2^{m-1}} \rangle \omega(G).$$

Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\omega_2(N_G)$, де $\omega_2(N_G)$ — підгрупа, породжена елементами порядку не вище 4 з N_G . Неважко довести, що

$$[\bar{y}, \bar{a}] = 1, [\bar{y}, \bar{b}] = \bar{a}^{2^{m-3}\alpha s_1}$$

тому

$$[\bar{y}^2, \bar{x}] = \bar{a}^{2^{m-3}t_1}, [\bar{y}, \bar{x}^2] = \bar{a}^{2^{m-3}s_2}.$$

Отже,

$$\bar{y}^{-2}\bar{x}\bar{y}^2 = \bar{x}\bar{x}^4\bar{a}^{2^{m-3}(s_2+\alpha s_1 t)+2s}\bar{b}^{2t} = \bar{x}\bar{a}^{2^{m-3}(s_2+\alpha s_1 t)+2s+\alpha}\bar{b}^{2t+2\beta} = \bar{x}\bar{a}^{2^{m-3}t_1}.$$

Якщо $m \neq 3$, то $(\alpha, 2) \neq 1$, що неможливо за доведеним. Нехай $m = 3$. Тоді

$$[\langle \bar{x} \rangle, \overline{N_G}] = [\langle \bar{y} \rangle, \overline{N_G}] = \bar{E}, [\bar{x}, \bar{y}^2] = [\bar{x}^2, \bar{y}] = 1$$

і $\bar{y}^{-2}\bar{x}\bar{y}^2 = \bar{x}\bar{a}^{2s+\alpha}\bar{b}^{2t+2\beta} = \bar{x}$ і $(\alpha, 2) \neq 1$, всупереч доведеному.

Отже, фактор-група $\tilde{G} = G/N_G$ не містить групи кватерніонів і

$$G = \langle x \rangle N_G = \langle x, b \rangle,$$

де $x^{2^r} = a^\alpha b^{2\beta}$, $(\alpha, 2) = 1$. Враховуючи, що $G' \subseteq \langle x^{2^r} \rangle \omega(G)$, покладемо

$$[x, b] = (x^{2^r})^s z = (a^\alpha b^{2\beta})^s b^{2^{m-1}t},$$

де $z \in \omega(G)$. Тоді з умов $b^{2^{m-1}} \in Z(G)$ та $m > 2$ випливає, що

$$[x^{2^{m-1}}, b] = a^{2^{m-1}\alpha s}.$$

Отже, $(\alpha s, 2) \neq 1$, $s = 2s_1$ і $[x, b] \in Z(G)$. З того, що

$$[x^{2^{m-1}}, b] = [x, b^{2^{m-1}}] = 1$$

і $[x^{2^{m-1}}, a] = 1$, робимо висновок $x^{2^{m-1}} \in Z(G)$. Оскільки $x^{2^{r+1}}$ — найменший степінь елемента x , що міститься $Z(N_G)$, то $r \leq m - 2$.

Далі з умови

$$[x^{2^r}, b] = a^{2^{m-1}\alpha} = [x, b^{2^r}] = (a^{2\alpha s_1} b^{4\beta s_1})^{2^r}$$

випливає, що $2^{r+1}\alpha s_1 \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$, і оскільки $m - 1 \geq r + 1$, то $s_1 = 2^{m-r-2}s_2$. Отже,

$$[x, b] = x^{2^{k-r-1}s_2} b^{2^{m-1}t},$$

де $|x| = 2^k$, $(s_2, 2) = 1$ і $t \in \{0, 1\}$. Знову $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$ — група типу 6) теореми при $r \leq m - 2$ і $k = m + r$.

Достатність. Нехай G — група типу 6) теореми 2.4.2 при $m > 2$. Зрозуміло, що

$$N_G \subseteq N = N_G(\omega(G)) = \langle x^{2^r}, b \rangle.$$

Нехай H — довільна нециклічна підгрупа групи G . Тоді $\omega(G) \subseteq H$. Враховуючи, що будь-який елемент підгрупи H можна подати у вигляді $x^i b^j$, та використовуючи співвідношення

$$[x^{2^r}, x^i b^j] = [x^{2^r}, b^j] \in \langle x^{2^{k-1}} \rangle, [b, x^i b^j] = [b, x^i]^{b^j} \in \langle (x^{2^{k-r-1}})^\alpha, b^{2^{m-1}} \rangle$$

та

$$(x^i b^j)^{2^{k-r-1}} = x^{2^{k-r-1}is} b^{2^{k-r-1}j} [x^i, b^j]^{2^{k-r-2}} \in \langle x^{2^{k-r-1}i} \rangle,$$

приходимо до висновку, що $N \subseteq N_G(H)$. Отже, $N = N_G$. \square

Наслідок 2.4.1. Якщо локально скінченна 2-група G має нециклічною нормою підгрупу

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n, |b| = 2^m,$$

де $n > m = 2$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$ і $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$, то $G = N_G$.

Лема 2.4.7. Скінченна 2-група G тоді і тільки тоді має нециклічну норму $N_G \neq G$, де

$$N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n, n > 2, |b| = 2^m, n \geq m > 1, [a, b] = a^{2^{n-1}}$$

та $\omega(N_G) \not\subseteq Z(G)$, коли G є групою типу 6) теореми 2.4.2 при $r = m - 1$.

Доведення. Будемо доводити лише необхідність умов леми, оскільки їх достатність перевіряється так само, як і у лемі 2.4.6.

Нехай $C = C_G(\omega(N_G))$. Тоді $C \triangleleft G$, $[G : C] = 2$ і $G = C\langle x \rangle$, де $x^2 \in C$. Розглянемо підгрупу $G_1 = \langle x \rangle N_G$. Якщо $|x| = 2$, то

$$[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle x, a^{2^{n-1}} \rangle \cap N_G = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$$

і $[b^{2^{m-1}}, x] = 1$, всупереч вибору елемента x . Отже, $|x| > 2$.

Нехай x^{2^r} — найменший степінь елемента x , що належить N_G . Покладемо $x^{2^r} = a^\alpha b^\beta$. Якщо $x^{2^r} \in Z(N_G)$, то з доведення леми 2.4.6 випливає, що $r = 1$ і $x^2 = a^{2\alpha_1} b^{2\beta_1}$. Оскільки

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x, b^{2^{m-1}} \rangle \cap N_G = \langle x^2, b^{2^{m-1}} \rangle$$

та $[\langle x^2 \rangle, N_G] = E$, то

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle a^{2^{n-2}\alpha_1} b^{2^{m-1}\beta_1} \rangle \omega(N_G),$$

звідки $|b| = 4$.

Перейдемо до фактор-групи $\bar{G} = G/\omega(N_G)$. Оскільки $[\bar{x}, \bar{a}] \in \langle \bar{a}^{2^{n-2}} \rangle$, то $\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle$ має циклічну підгрупу індекса 2. Якщо $[\bar{x}, \bar{a}] = 1$, то $|\bar{x}\bar{a}^{-\alpha_1}| = 2$ і за лемою 2.1.2 $\langle \bar{x}\bar{a}^{-\alpha_1} \rangle \triangleleft \bar{G}_1$. Звідси

$$[\bar{x}, \bar{b}] = [\bar{x}\bar{a}^{-\alpha_1}, \bar{b}] \in (\langle \bar{x}\bar{a}^{-\alpha_1} \rangle \cap \bar{N}_G) = \bar{E}$$

і $[x, b] \in \omega(G)$. Але тоді $[x, b^2] = 1$, всупереч вибору елемента x .

Нехай $[\bar{x}, \bar{a}] \neq 1$. Тоді $[\bar{x}, \bar{a}] = \bar{a}^{2^{n-2}}$. Оскільки $[\bar{x}, \bar{b}] \neq 1$, то $[\bar{x}, \bar{b}] = \langle \bar{a}^{2^{n-2}} \rangle$ і $|\bar{x}\bar{b}| = 2$. Тоді

$$[\bar{a}^{\alpha_1} \bar{b}^{\beta_1}, \bar{x}] = [\bar{a}^{\alpha_1}, x] \bar{b}^{\beta_1} [\bar{b}^{\beta_1}, \bar{x}] = 1$$

і $|\bar{a}^{-\alpha_1} \bar{b}^{-\beta_1} \bar{x}| = 2$. Враховуючи лему 2.1.2, одержимо

$$\langle \bar{a}^{-\alpha_1} \bar{b}^{-\beta_1} \bar{x} \rangle \triangleleft \bar{G}_1.$$

Тоді зі співвідношення

$$[\bar{x}, \bar{b}] = [\bar{a}^{-\alpha_1} \bar{b}^{-\beta_1} \bar{x}, \bar{b}] \in \langle \bar{a}^{-\alpha_1} \bar{b}^{-\beta_1} \bar{x} \rangle \cap \bar{N}_G = \bar{E}$$

впливає $[x, b] \in \omega(G)$ і знову $[x, b^2] = 1$, що неможливо. Отже,

$$\langle x \rangle \cap N_G \not\subseteq Z(N_G).$$

Неважко переконатися, що $x^{2^r} = a^\alpha b^\beta$, де $(\alpha, 2) = 1$.

Нехай $n = m$. Тоді $x^{2^r} = a^\alpha b^{2\beta}$ і

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x, b^{2^{m-1}} \rangle \cap N_G = \langle x^{2^r}, b^{2^{m-1}} \rangle.$$

Покладемо $[x, b] = x^{2^r} s b^{2^{m-1}t}$. Тоді $(s, 2) = 1$, бо $[x, b^{2^{m-1}}] \neq 1$. Оскільки $x^{2^{r+1}}$ – найменший степінь елемента x , що належить $Z(N_G)$, то з рівності $[x^{2^m}, b] = 1$ випливає, що $m \geq r + 1$. Більш того, $r = m - 1$, бо інакше $[x^{2^r}, b] \neq a^{2^{m-1}\alpha}$. Враховуючи умови $|G/N_G| \leq 2^{m-1}$ і $|\langle x \rangle N_G| = 2^{m-1}$, робимо висновок, що група G/N_G циклічна з твірним елементом xN_G . Остаточоно,

$$G = \langle x \rangle N_G = \langle x \rangle \langle b \rangle,$$

$x^{2^{m-1}} = a^\alpha b^{2\beta}$, $(\alpha, 2) = 1$, $[x, b] = x^{2^{m-1}s} b^{2^{m-1}t}$, $(s, 2) = 1$, $t \in \{0, 1\}$ – група типу 6) теореми 2.4.2 при $r = m - 1$, $k = 2m - 1$.

Нехай $n > m \geq 2$. Тоді $x^{2^r} = a^\alpha b^\beta$, $(\alpha, 2) = 1$ і

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap \omega_m(N_G) = \langle x^{2^{r+n-m}} \rangle \omega(N_G).$$

Покладемо $[x, b] = (a^\alpha b^\beta)^{2^{n-m}s} b^{2^{m-1}t}$. Як і раніше стверджуємо, що $(s, 2) = 1$. Справді, інакше $[x, b^{2^{m-1}}] = 1 \neq a^{2^{n-1}\alpha}$.

Оскільки $[x^{2^m}, b] = 1$ і $x^{2^{r+1}}$ – найменший степінь елемента x , що належить $Z(N_G)$, то $r+1 \leq m$ і $r \leq m-1$. Тому з умови $[x^{2^r}, b] = a^{2^{n-1}\alpha}$ одержимо $r = m - 1$.

За лемою 2.4.6 $|C/N_G| \leq 2^{m-2}$, і, оскільки $|G/C| = 2$, то $|G/N_G| \leq 2^{m-1}$. З іншого боку $|\langle x \rangle N_G| = 2^{m-1}$, тому

$$G = \langle x \rangle N_G = \langle x \rangle \langle b \rangle,$$

де $|x| = 2^k$, $k = m + n - 1$, $[x, b] = x^{2^{n-1}s} b^{2^{m-1}t} = x^{2^{k-r-1}s} b^{2^{m-1}t}$, $(s, 2) = 1$, $t \in \{0, 1\}$ і G – група типу 6) теореми 2.4.2 при $r = m - 1$, $k > 2m - 1$. Зазначимо, що $k > 3$ і $t = 0$ при $m = 2$, бо інакше $[x^2, b] = 1 \neq a^{2^{n-1}\alpha s}$. \square

Теорему 2.4.2 доведено. \square

Безпосередньо з теорем 2.4.1 та 2.4.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.4.2. *Якщо нециклічна норма N_G локально скінченної 2-групи G недедекіндова, то вона міститься у третьому гіперцентрі $Z_3(G)$ групи G .*

Узагальнюючи властивості локально скінченних p -груп (p – довільне просте число), в яких нециклічна норма недедекіндова, отримуємо наступні результати.

Наслідок 2.4.3. *Нециклічна норма N_G локально скінченної p -групи G (p – довільне просте число) є метациклічною недедекіндовою підгрупою тоді і тільки тоді, коли G – група одного з типів:*

1) G – метациклічна негамільтонова \overline{H}_p -група;

- 2) G — група типу 3) теореми 2.3.2, або типу 4) теореми 2.4.1 або одного з типів 5)–6) теореми 2.4.2.

Наслідок 2.4.4. Нециклічна норма N_G локально скінченної p -групи G (p — довільне просте число) є неметациклічною недедекіндовою підгрупою тоді і тільки тоді, коли G — група одного з типів:

- 1) G — неметациклічна негамільтонова \overline{H}_p -група;
- 2) G — група типу 2) теореми 2.3.2, або типу 3) теореми 2.4.1 або одного з типів 2)–4) теореми 2.4.2.

2.5 Непримальні локально скінченні групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп

У цьому підрозділі описуються локально скінченні непримальні групи, нециклічна норма яких є негамільтоновою \overline{H} -групою. Розглянемо спочатку нескінченні групи такого роду.

Лема 2.5.1. Нециклічна норма N_G нескінченної локально скінченної групи G нільпотентна класу не вище 2.

Доведення. Якщо нециклічна норма N_G — дедекіндова, то твердження леми очевидне. Отже, далі будемо вважати, що N_G є недедекіндовою групою.

Якщо $|N_G| = \infty$, то N_G містить нескінченну абелеву підгрупу і тому є нескінченною негамільтоновою \overline{H} -групою. За твердженнями 2.1.1 та 2.1.3 такі групи нільпотентні класу 2, і у цьому випадку твердження теореми доведене.

Нехай тепер $|N_G| < \infty$. З нескінченності групи G та теореми 2.2.3 випливає, що $G = AH$, де A — квазіциклічна група, $|H| < \infty$ і $N_G \subseteq C_G(A)$.

Оскільки $N_G \triangleleft G$, то $[N_G, A] \subseteq N_G$ і група

$$G_1 = N_G A$$

локально нормальна. За лемою 3.1 [153] $A \subseteq Z(G_1)$, тому G_1 — нескінченна \overline{H} -група. З опису таких груп (твердження 2.1.1, 2.1.3) випливає, що група G_1 нільпотентна класу 2. Отже, й підгрупа N_G є нільпотентною класу не вище 2. \square

Наслідок 2.5.1. Якщо нециклічна норма N_G локально скінченної групи G ненільпотентна, то група G скінченна.

У подальших міркуваннях буде активно використовуватись наступне твердження, що характеризує властивості непримальних локально скінченних груп, нециклічна норма яких є недедекіндовою нільпотентною групою.

Лема 2.5.2. *Якщо локально скінченна непримарна група G має нільпотентну нециклічну норму*

$$N_G = P \times \langle x \rangle,$$

де P — силовська p -підгрупа групи N_G , що є негамільтоновою \overline{H}_p -групою і $(|x|, p) = 1$, то будь-яка силовська p' -підгрупа групи G циклічна.

Доведення. Позначимо $G_{p'}$ — довільну силовську p' -підгрупу групи G і розглянемо групу

$$G_1 = P \cdot G_{p'}.$$

Якщо $G_{p'}$ — нециклічна, то нециклічною буде й підгрупа $\langle g, G_{p'} \rangle$, де g — довільний елемент з P . Звідси $\langle g, G_{p'} \rangle \triangleleft G_1$ і

$$\langle g \rangle = \langle g, G_{p'} \rangle \cap P \triangleleft P.$$

Але у такому випадку підгрупа P дедекіндова, що суперечить умові. Отже, $G_{p'} = \langle y \rangle$ — циклічна підгрупа. \square

Наступна теорема описує будову нескінченних локально скінченних непримарних груп з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп. Виявляється, що такі групи локально нільпотентні, а нециклічна норма міститься у третьому гіперцентрі групи.

Теорема 2.5.1. *Нескінченні локально скінченні непримарні групи, що мають недедекіндову нециклічну норму N_G , локально нільпотентні та вичерпуються групами типів:*

- 1) G — нескінченна непримарна негамільтонова \overline{H} -група, $G = N_G$;
- 2) $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle d \rangle \times \langle y \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[b, c] = [d, c] = [d, b] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$, $(|y|, 2) = 1$; $N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y \rangle$, $|a| = 4$, $a \in A$;
- 3) $G = (A \times H) \langle d \rangle \times \langle y \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_2| = |h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|d| = 4$, $d^2 = a_1 \in A$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$, $[h_1, d] = a_1$, $[h_2, d] = 1$, $(|y|, 2) = 1$; $N_G = (\langle h_2 \rangle \rtimes \langle ah_1 \rangle) \times \langle y \rangle$, $a \in A$, $|a| = 4$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити, спираючись на доведення теореми 2.4.1. Доведемо їх необхідність.

Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. За теоремою 2.2.3 G є скінченним розширенням квазіциклічної q -підгрупи A і

$$N_G \subseteq C = C_G(A).$$

Якщо $|N_G| = \infty$, то за наслідком 2.2.4 маємо $G = N_G$ і G є групою типу 1) доводжуваної теореми.

Нехай $|N_G| < \infty$. За лемою 2.5.1 нециклічна норма N_G нільпотентна і тому є групою типу

$$N_G = P \times \langle x \rangle,$$

де P – негамільтонова \overline{H}_p -група, що є силовською p -підгрупою норми N_G і $(|x|, p) = 1$.

Розглянемо групу $G_1 = P \cdot A$. Оскільки $N_G \subseteq C$, то за наслідком 2.2.4 G_1 є нескінченною \overline{H} -групою. З опису останніх (див. твердження 2.1.2) випливає, що $q = p$ і A – квазіциклічна p -група.

Нехай G_p – силовська p -підгрупа групи G . Припустимо спочатку, що $p \neq 2$. Тоді за наслідком 1.3 [153] $A \subseteq Z(G_p)$. З цього випливає, що нециклічна норма N_{G_p} підгрупи G_p нескінченна і недедекіндова, оскільки

$$N_{G_p} \supseteq A \cdot P.$$

За наслідком 2.2.4 G_p є нескінченною \overline{H}_p -групою і за твердженням 2.1.1

$$G_p = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

$$|b| = |c| = p, A \subseteq Z(G_p), [b, c] = a_1 \in A, |a_1| = p.$$

Оскільки $G_p = A \cdot P$, де $A \triangleleft G$, $P \triangleleft G$, то $G_p \triangleleft G$ і за узагальненою теоремою Шура (див., наприклад, [153], стор. 214) G_p доповнювана в G ,

$$G = G_p \rtimes G_{p'}.$$

Далі, оскільки за лемою 2.5.2 будь-яка силовська p' -підгрупа $G_{p'}$ групи G циклічна, то

$$G = G_p \rtimes \langle y \rangle.$$

Враховуючи попередні міркування, одержимо

$$G' \subseteq G_p \cap (A \rtimes \langle y \rangle) = A,$$

звідки

$$[\omega(G_p), \langle y \rangle] \subseteq \omega(G_p) \cap A = \langle a_1 \rangle.$$

За теоремою Машке ([107], теорема 20.2.2) маємо:

$$\langle a_1, b \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle, \langle a_1, c \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle c_1 \rangle,$$

де $\langle b_1 \rangle$ і $\langle c_1 \rangle$ – y -інваріантні підгрупи і $[b_1, y] = [c_1, y] = 1$.

Оскільки $[b_1, c_1] = a_1$, то $a_1 \in Z(G)$ і за теоремою 1.14 [153] $A \subseteq Z(G)$. Але тоді $|N_G| = \infty$, що неможливо. Отже, при $p \neq 2$ нескінченних непримарних груп зі скінченною нециклічною нормою не існує.

Нехай $p = 2$. Силівська 2-підгрупа G_2 групи G містить підгрупу P , тому її нециклічна норма також недедекіндова і G_2 — група одного з типів 1)–4) теореми 2.4.1.

Якщо G_2 — група одного з типів 1) чи 2) цієї теореми, то $A \subseteq Z(G_2)$ і $A \subseteq Z(G)$, оскільки $[G : C] \leq 2$. Але у такому випадку $A \subseteq N_G$ і $|N_G| = \infty$, що суперечить припущенню.

Нехай G_2 — група типу 3) теореми 2.4.1:

$$G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle d \rangle,$$

де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[b, c] = [d, c] = [d, b] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

Оскільки $N_G \subseteq C$ і $A \subseteq Z(C)$, то за наслідком 2.2.4 $C \in \overline{H}$ -групою. Далі з твердження 2.1.1 випливає, що

$$C = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times \langle y \rangle,$$

де $(|y|, 2) = 1$.

Підгрупа $\langle y \rangle$ нормальна у G як характеристична підгрупа централізатора C і є силівською 2'-підгрупою групи G . Якщо $[d, y] = 1$, то $y \in Z(G)$ і G є групою типу 2) цієї теореми.

Нехай $[d, y] \neq 1$. Тоді $\langle y, d \rangle = \langle y \rangle \rtimes \langle d \rangle$ — нециклічна група і тому

$$N_G \subseteq N_G(\langle y, d \rangle).$$

Проте, останнє співвідношення не має місця, бо

$$[\omega(P), \langle d \rangle] = \langle a_1 \rangle \not\subseteq \langle y, d \rangle.$$

Отже, цей випадок неможливий.

Нехай G_2 — група типу 4) теореми 2.4.1:

$$G = (A \times H) \langle d \rangle \times \langle y \rangle,$$

де A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_2| = |h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|d| = 4$, $d^2 = a_1 \in A$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$, $[h_1, d] = a_1$, $[h_2, d] = 1$.

За цих умов централізатор C є групою типу

$$C = A \times H \times \langle y \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів і $(|y|, 2) = 1$.

Припустимо, що $[d, y] \neq 1$. Тоді $[d, y] \in \langle y \rangle$, оскільки $\langle y \rangle$ є характеристичною підгрупою групи $C \triangleleft G$.

З недедекіндовості підгрупи P та співвідношення

$$P \subseteq N_{G_2} = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 a \rangle,$$

де $a \in A$, $|a| = 4$ впливає, що $P = N_{G_2}$. Це неможливо, бо

$$h_1 a \notin N_G(\langle y \rangle \rtimes \langle dh_2 \rangle).$$

Отже, $[d, y] = 1$, $y \in Z(G)$ і G є групою типу 3) доводжуваної теореми. \square

Перейдемо тепер до вивчення скінченних непримарних груп з недедекіндовою нециклічною нормою N_G . Наступна теорема дає повний опис скінченних нільпотентних груп такого роду.

Теорема 2.5.2. *Будь-яка скінченна непримарна нільпотентна група G , що має недедекіндову нециклічну норму N_G , є групою виду:*

$$G = G_p \times \langle y \rangle,$$

де G_p – силовська p -підгрупа групи G , що є групою одного з типів 1)–3) теореми 2.3.2 або 1)–6) теореми 2.4.2, $(|y|, p) = 1$. При цьому

$$N_G = N_{G_p} \times \langle y \rangle.$$

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Доведемо їх необхідність. З твердження 2.1.3 та умови теореми випливає, що

$$N_G = P \times \langle z \rangle,$$

де P – силовська p -підгрупа групи N_G , що є негамільтоновою \overline{H}_p -групою і $(|z|, p) = 1$.

За лемою 2.5.2 будь-яка силовська p' -підгрупа $G_{p'}$ групи G циклічна, тому

$$G = G_p \times \langle y \rangle.$$

Оскільки $P \leq G_p$, то за лемою 2.1.1 нециклічна норма N_{G_p} підгрупи G_p також недедекіндова і містить P . Значить, G_p – група одного з типів 1)–3) теореми 2.3.2 або 1)–6) теореми 2.4.2. \square

У наступному твердженні буде показано, що деякі \overline{H} -групи не можуть виступати нециклічними нормами непримарних груп за умови, що $G \neq N_G$.

Лема 2.5.3. *Нехай G – скінченна непримарна група і N_G – її нециклічна норма. Якщо силовська p -підгрупа P групи N_G є \overline{H}_p -групою одного з типів 2)–6) твердження 2.1.1, то G – \overline{H} -група і $G = N_G$.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група. За умовою силовська p -підгрупа P нециклічної норми N_G є групою одного з типів 2)–6) твердження 2.1.1, тобто:

- 1) $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, $|a| = |c| = 9$, $|b| = 3$, $[a, b] = 1$, $[a, c] = b$, $[b, c] = c^3 = a^{-3}$;

- 2) $P = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 4$, $a^4 = b^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 3) $P = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $a^4 = b^4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 4) $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, $|a| = |b| = |c| = 4$, $c^2 = a^2b^2$, $[c, b] = c^2$, $[c, a] = a^2$;
- 5) $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle \langle d \rangle$, $|a| = |b| = |c| = |d| = 4$, $c^2 = d^2 = a^2b^2$, $[a, c] = [d, c] = a^2$, $[b, d] = b^2$, $[c, b] = [d, a] = c^2$.

Розіб'ємо доведення леми на пункти в залежності від будови підгрупи.

1. Нехай P — група типу 1), вказаного на початку доведення леми. За лемою 2.3.4 P збігається з силовською 3-підгрупою групи G . Використовуючи теорему Шура (див., наприклад, [107], теорема 20.2.6) та враховуючи лему 2.5.2, одержимо

$$G = P \rtimes \langle y \rangle,$$

де $(|y|, 3) = 1$.

Нехай $\omega(P) = \langle a^3, b \rangle$ — нижній шар підгрупи P . Тоді з умов $\omega(P) \triangleleft G$, $\langle a^3 \rangle \triangleleft G$ та теореми Машке ([107], теорема 20.2.2) випливає, що

$$\omega(P) = \langle a^3 \rangle \rtimes \langle b_1 \rangle,$$

де $\langle b_1 \rangle$ — y -інваріантна підгрупа. Якщо $[y, b_1] \neq 1$, то

$$\langle b_1 \rangle = \langle b_1, y \rangle \bigcap P \triangleleft P,$$

що суперечить визначальним співвідношенням підгрупи P . Отже, $[y, b_1] = 1$.

Нехай $[y, a^3] \neq 1$. Тоді

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \langle a^3, y \rangle \bigcap P = \langle a^3 \rangle, [a, y] \in \langle a^3 \rangle$$

і $[a^3, y] = 1$, що неможливо за припущенням. Отже, $[a^3, y] = 1$ і $\omega(P) \times \langle y \rangle$ — абелева нециклічна, а значить нормальна підгрупа групи G . Звідси $\langle y \rangle \triangleleft G$ і

$$G = N_G \times \langle y \rangle$$

— \overline{H} -група.

2. Нехай — група типу 2). За лемою 2.4.1 P є силовською 2-підгрупою групи G , тому $P \triangleleft G$. За теоремою Шура та лемою 2.5.2

$$G = P \rtimes \langle y \rangle,$$

де $(|y|, 2) = 1$. Оскільки фактор-група $C/C_G(P)$ ізоморфна деякій підгрупі з $\text{Aut}(P)$, котра, як відомо, є 2-групою, то

$$G = P \rtimes \langle y \rangle = N_G$$

— \overline{H} -група.

3. Розглянемо випадок, коли $\langle y \rangle$ є групою типу 3), вказаного на початку доведення леми. Використовуючи леми 2.4.1, 2.5.2 та теорему Шура, робимо висновок, що

$$G = P \rtimes \langle y \rangle,$$

де $\langle y \rangle$ — деяка силовська $2'$ -підгрупа групи G . Оскільки

$$\omega(P) = \langle a^4, a^2b^2 \rangle \triangleleft G$$

і $\langle a^4 \rangle \triangleleft G$, то за теоремою Машке одержимо

$$[\omega(P), \langle y \rangle] = E.$$

Значить, $\omega(P) \times \langle y \rangle \triangleleft G$, $\langle y \rangle \triangleleft G$ і знову

$$G = P \times \langle y \rangle = N_G.$$

4. Нехай тепер P є групою типу 4), вказаного на початку доведення.

Якщо P збігається з силовською 2 -підгрупою G_2 групи G , то за теоремою Шура підгрупа P доповнювана у G і неважко довести, що у такому випадку $G = N_G$.

Нехай $P \neq G_2$. Тоді з леми 2.1.1 та доведення леми 2.4.1 випливає, що G_2 є \overline{H}_2 -групою типу 6) твердження 2.1.1 і

$$G_2 = P \langle d \rangle, d^2 \in P.$$

Розглянемо групу $G_1 = PG_{2'}$, де $G_{2'}$ — деяка силовська $2'$ -підгрупа групи G . Оскільки за лемою 2.5.2 кожна силовська $2'$ -підгрупа групи G циклічна, то $G_{2'} = \langle y \rangle$ і

$$G_1 = P \rtimes \langle y \rangle.$$

Далі з умов

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \omega(P) \rtimes \langle y \rangle \cap P = \omega(P)$$

і $\omega(P) \leq Z(P)$ випливає, що $[P, \langle y \rangle] = E$ і тому $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$. Отже, $\langle \omega(P), y \rangle \triangleleft G_1$, а, значить, $\langle y \rangle \triangleleft G_1$. Оскільки $\langle y \rangle$ є характеристичною підгрупою групи G_1 і $[G : G_1] = 2$, то $\langle y \rangle \triangleleft G$. Отже,

$$G = \langle y \rangle \rtimes G_2.$$

Нехай $[d, y] \neq 1$, тоді $\langle y \rangle \rtimes \langle d \rangle \triangleleft G$ і

$$\langle d \rangle = \langle y, d \rangle \cap G_2 \triangleleft G_2,$$

що неможливо, оскільки G_2 не містить нормальних циклічних підгруп порядку 4. Отже, $[d, y] = 1$ і

$$G = \langle y \rangle \times G_2$$

є \overline{H} -групою, що суперечить припущенню $P \neq G_2$.

5. Нехай G — група типу 5). У цьому випадку за лемою 2.4.1 P збігається з силовською 2-підгрупою групи G . Тому $P \triangleleft G$ і за теоремою Шура

$$G = P \rtimes G_{2'},$$

причому $G_{2'} = \langle y \rangle$ за лемою 2.5.2. Оскільки $\omega(P) \subseteq Z(P)$ і

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \omega(P),$$

то $[\omega(P), \langle y \rangle] = 1$, звідки $\langle y \rangle \triangleleft G$. Отже, і у цьому випадку

$$G = P \times \langle y \rangle$$

є \overline{H} -групою.

Таким чином, у кожному з розглянутих випадків група G збігається зі своєю нециклічною нормою. \square

Лема 2.5.4. *Нехай G — скінченна непримарна група і N_G — її нециклічна норма. Якщо силовська 2-підгрупа P групи N_G є групою типу*

$$P = H \times \langle c \rangle, |c| = 2^n, n \geq 2, H = \langle h_1, h_2 \rangle, h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2], |h_1| = |h_2| = 4,$$

то G — нільпотентна група:

$$G = G_2 \times \langle y \rangle,$$

де G_2 — силовська 2-підгрупа групи G , причому або $G_2 = P$, або G_2 — група типу 4) теореми 2.4.2, $(|y|, 2) = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Позначимо G_2 — довільну силовську 2-підгрупу групи G . За лемою 2.1.1 $P \leq G_2$, тому нециклічна норма підгрупи G_2 негамільтонова і, використовуючи теорему 2.4.2,

$$G_2 = \langle x \rangle \rtimes H,$$

де $|x| = 2^k, k \geq n, [\langle x \rangle, H] \subseteq \langle x^{2^{k-1}} \rangle$. Отже, G_2 — циклічне розширення підгрупи P . За лемою 2.5.2 усі силовські підгрупи фактор-групи G/P циклічні, тому група G/P розв'язна. З цього випливає, що розв'язною буде й група G . За [110] (стор.487) підгрупа G_2 доповнювана у G , тому за лемою 2.5.2

$$G = G_2 \cdot \langle y \rangle,$$

де $(|y|, 2) = 1$.

Оскільки $\omega(P) \subseteq Z(G)$, то $\omega(P) \times \langle y \rangle$ — нециклічна, а, значить, нормальна підгрупа групи $P\langle y \rangle$. Як наслідок, маємо

$$\langle y \rangle \triangleleft P\langle y \rangle, [P, \langle y \rangle] = E.$$

Нехай $\langle y_q \rangle$ — довільна силовська q -підгрупа групи $\langle y \rangle$ за деяким простим числом q . Покажемо, що $\langle y_q \rangle$ належить центру свого нормалізатора в G . Для цього досить впевнитися, що кожен елемент $g \in G_2 \cap N_G(\langle y_q \rangle)$ переставний з y_q .

Припустимо протилежне: нехай $g \in G_2 \cap N_G(\langle y_q \rangle)$ і $[y_q, g] \neq 1$. За доведенням вище $g \notin P$, $|g| > 4$ і $g = x^m h^t$, де $h \in H$. Нехай $h_1 \in H$ і $[h, h_1] \neq 1$. Тоді

$$h \notin N_G(\langle y_q \rangle \rtimes \langle gh_1 \rangle),$$

що неможливо. Отже, кожна силовська q -підгрупа з G міститься у центрі свого нормалізатора. Застосовуючи кілька разів теорему Бернсайда (див. [151], теорема 14.3.1) приходимо до висновку, що $G_2 \triangleleft G$ і

$$G = G_2 \rtimes \langle y \rangle.$$

Знову перейдемо до фактор-групи $\bar{G} = G/P$. Її силовська 2-підгрупа $\langle \bar{x} \rangle$ нормальна. Враховуючи, що $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\langle \bar{x} \rangle)$ ізоморфна деякій підгрупі групи $\text{Aut}(\langle \bar{x} \rangle)$, а остання, як відомо, є абелевою 2-групою, робимо висновок, що $[\bar{x}, \bar{y}] = \bar{1}$. Отже, $P\langle y \rangle \triangleleft G$ і $\langle y \rangle \triangleleft G$. Значить, G — нільпотентна група і за теоремою 2.4.2 або $G_2 = P$, або $k = n + 1$ і G_2 — група типу 4) теореми 2.4.2. \square

З останньої леми випливає, що скінченні непримарні групи, в яких силовська 2-підгрупа нециклічної норми є групою типу 9) твердження 2.1.1, нільпотентні і є циклічними розширеннями цієї норми.

Далі розглянемо властивості скінчених ненільпотентних груп з недедекіндовою нормою N_G .

Лема 2.5.5. *Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Силовська p -підгрупа P нециклічної норми N_G , що є негамільтоновою \bar{H}_p -групою, збігається з силовською p -підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли G — група одного з типів:*

- 1) $G = P \rtimes \langle y \rangle$, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \rtimes \langle c \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 1$ ($n > 1$ при $p = 2$), $|b| = |c| = p$, $|y| = mk$, $m \neq 1$, $(m, 2(p-1)) = 1$, $(k, p) = 1$, $p \equiv -1 \pmod{m}$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$, $[y, a] = 1$ та $N_G(\langle x \rangle) = C_G(\langle x \rangle) = \langle a, y^m \rangle = Z(G)$ для кожного нецентрального елемента $x \in \langle b, c \rangle$; $N_G = P \times \langle y^m \rangle$;
- 2) $G = P \rtimes \langle y \rangle$, де $P = H \times \langle b \rangle \rtimes \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2] = [b, c]$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle c \rangle] = E$, $|y| = 5k$, $(k, 2) = 1$ та елемент y індукує незвідний автоморфізм порядку 5 на фактор-групі $P/\langle h_1^2 \rangle$; $N_G = P \times \langle y^5 \rangle$.

Доведення. Необхідність. З твердження 2.1.1 та умови леми випливає, що

$$N_G = P \times \langle z \rangle,$$

де P – силовська p -підгрупа групи N_G , що є негамільтоновою \overline{H}_p -групою і $(|z|, p) = 1$. Враховуючи леми 2.5.3 і 2.5.4 та твердження 2.1.1, робимо висновок, що P – група одного з типів 7), 8) або 10) цього твердження, тобто:

- 1) $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 2$, $|b| = p^m$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$;
- 2) $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = p$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$;
- 3) $P = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = h_1^2$.

Оскільки $P \triangleleft G$ і P – силовська p -підгрупа групи G , то за теоремою Шура та лемою 2.5.2

$$G = P \rtimes \langle y \rangle, (|y|, p) = 1.$$

Далі розглянемо кожен із вказаних для підгрупи P випадків окремо.

Нехай P – група типу 1), вказаного на початку доведення. Спочатку будемо вважати, що $p \neq 2$. Тоді $\omega(P) = \langle a^{p^{n-1}}, b^{p^{m-1}} \rangle \triangleleft G$ і

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \omega(P) \rtimes \langle y \rangle \cap P = \omega(P).$$

Оскільки $p \neq 2$, то $[x^p, y] = 1$ для будь-якого елемента $x \in P$ і тому $[a^{p^{n-1}}, y] = 1$. Зазначимо, що $[\omega(P), \langle y \rangle] \neq E$, бо інакше $\langle y \rangle$ є характеристичною підгрупою групи $\omega(P) \times \langle y \rangle$. Звідси $\langle y \rangle \triangleleft G$, що неможливо за умовою. Отже, $[b^{p^{m-1}}, y] \neq 1$ і тому $m = 1$ та $|b| = p$.

За теоремою Машке

$$\omega(P) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle \times \langle b_1 \rangle,$$

де $\langle b_1 \rangle$ – y -інваріантна підгрупа і $[b_1, y] \neq 1$. Звідси

$$\langle b_1 \rangle = \langle b_1, y \rangle \cap P \triangleleft P,$$

всупереч визначальним співвідношенням підгрупи.

Нехай $p = 2$. Якщо $\omega(P)$ – елементарна абелева група порядку 4, то, враховуючи теорему Машке, легко впевнитись, що $\omega(P) \subseteq Z(G)$. Значить,

$$\langle y \rangle \times \omega(P) \triangleleft G,$$

тому $\langle y \rangle \triangleleft G$ і, всупереч умові G – нільпотентна група. Отже, $\omega(P) = P$ – група діедра порядку 8. Відомо, що фактор-група $G/C_G(P)$ ізоморфна деякій підгрупі групи $\text{Aut}(P)$. Оскільки остання є 2-групою, то $[P, \langle y \rangle] = E$. Протиріччя доводить, що й цей випадок неможливий

Нехай P — група типу 2), вказаного на початку доведення леми. За доведеним у попередньому пункті $n > 2$ при $p = 2$. Покажемо, що $a \in Z(G)$. Припустимо протилежне. Тоді з умови $\langle a, y \rangle \triangleleft G$ випливає, що $\langle a, y \rangle$ — нециклічна, а значить, нормальна у G підгрупа. Звідси

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \langle a, y \rangle \cap \langle \omega(P), y \rangle \subseteq Z(P)$$

і, враховуючи, що $[\omega^p(P), \langle y \rangle] = E$, одержимо

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

Застосовуючи теорему Машке до підгруп $\langle a^{p^{n-1}}, b \rangle$ та $\langle a^{p^{n-1}}, c \rangle$, приходимо до висновку, що

$$\langle a^{p^{n-1}}, b \rangle = \langle a^{p^{n-1}} \rangle \times \langle b_1 \rangle,$$

$$\langle a^{p^{n-1}}, c \rangle = \langle a^{p^{n-1}} \rangle \times \langle c_1 \rangle,$$

де $\langle b_1 \rangle$ та $\langle c_1 \rangle$ — y -допустимі підгрупи. Звідси $[y, b_1] = [y, c_1] = 1$ і $[a^{p^{n-1}}, y] = 1$. Тому

$$\langle b, c \rangle \times \langle y \rangle \triangleleft G$$

і $\langle y \rangle \triangleleft G$, що неможливо за умовою. Отже, $a \in Z(G)$.

Позначимо $\langle y^m \rangle = \langle y \rangle \cap Z(G)$ і розглянемо фактор-групу

$$\bar{G} = G/Z(G) \cong \bar{P} \rtimes \langle \bar{y} \rangle.$$

Покажемо, що \bar{P} — мінімальна нормальна підгрупа групи \bar{G} . Справді, інакше \bar{P} містить \bar{y} -інваріантну підгрупу \bar{P}_1 порядку p і за теоремою Машке

$$[\bar{P}_1, \langle \bar{y} \rangle] = \bar{E}.$$

Прообраз групи $\bar{P}_1 \times \langle \bar{y} \rangle$ є нільпотентною нециклічною і тому нормальною в G підгрупою. Звідси $\langle y \rangle \triangleleft G$, що неможливо за умовою. Отже, \bar{P} — мінімальна нормальна у \bar{G} підгрупа. Неважко бачити, що в \bar{G} нормальна будь-яка нециклічна підгрупа, тому \bar{G} — ненільпотентна \bar{H} -група. Використовуючи твердження 2.1.1 робимо висновок, що \bar{G} — група типу 5) цього твердження. Тому $p \equiv -1 \pmod{m}$, $(2(p-1), m) = 1$ і G — група типу 1) леми.

Нехай P — група типу 3), вказаного на початку доведення леми. У такому випадку нормалізатор $N_G(\langle y \rangle)$ силовської $2'$ -підгрупи $\langle y \rangle$ циклічний і збігається з її централізатором $C_G(\langle y \rangle)$. Позначимо

$$C = C_G(\langle y \rangle) \cap P.$$

Тоді $|C| \leq 4$.

Нехай $|C| = 4$. За теоремою Машке фактор-група $\bar{G} = G/Z(P)$ містить \bar{y} -інваріантну підгрупу $\bar{N} \leq \bar{P}$ порядку 8 і $\bar{C} \cap \bar{N} = E$. Неважко переконатись, що N є групою одного з типів:

- 1) $N = (\langle h \rangle \times \langle b_1 \rangle) \rtimes \langle c_1 \rangle$, $[h, c_1] = 1$, $|h| = 4$, $[b_1, c_1] = h_2$;
- 2) $N = Q \times \langle b_1 \rangle$, Q – група кватерніонів, $|b_1| = 2$.

У першому випадку N містить характеристичну підгрупу $\langle h \rangle$ і тому $[h, y] = 1$, що суперечить циклічності підгрупи C . У другому випадку $|\omega(N)| = 4$ і за теоремою Машке $[\omega(N), \langle y \rangle] = 1$. Протиріччя доводить, що $|C| = 2$ і $C = Z(P)$.

Покладемо $\langle y^m \rangle = \langle y \rangle \cap Z(G)$ і розглянемо фактор-групу

$$\bar{G} = G/Z(G).$$

Оскільки \bar{P} – мінімальна нормальна підгрупа групи \bar{G} , то кожна підгрупа порядку 2 з \bar{P} визначає у \bar{G} клас спряжених підгруп порядку m . Але число усіх підгруп порядку 2 групи \bar{G} дорівнює 15, тому $m|15$.

Припустимо, що $3|m$. Тоді силовська 3-підгрупа $\langle \bar{y}_3 \rangle$ групи $\langle \bar{y} \rangle$ має неодиначний централізатор у \bar{P} . Справді, якщо \bar{g} – неодиначний елемент підгрупи \bar{P} , то нормальне замикання $\langle \bar{g} \rangle^{\langle \bar{y}_3 \rangle}$ підгрупи $\langle \bar{g} \rangle$ є власною \bar{y}_3 -допустимою підгрупою \bar{P} і, повторюючи наведені вище міркування, приходимо до висновку, що

$$[\bar{P}, \langle \bar{y}_3 \rangle] = \bar{E},$$

звідки $y_3 \in Z(G)$. Отже, $m = 5$ і \bar{y} індукує на \bar{P} регулярний автоморфізм порядку 5. Без порушень загальності міркувань G є групою типу 2) доведеної леми.

Достатність. Нехай G – група типу 1) леми. Доведемо, що нециклічна норма N_G цієї групи збігається з підгрупою

$$N = P \times \langle y^m \rangle.$$

Нехай H – довільна нециклічна підгрупа групи G . Якщо підгрупа H ненільпотентна, то

$$H \supseteq \omega(P) = G$$

і $H \triangleleft G$. Отже, далі будемо вважати, що H – нільпотентна група. Тоді вона має нециклічну силовську p -підгрупу і $N \subseteq N_G(H)$. Враховуючи, що для довільного нецентрального елемента $g \in G$, $(|g|, p) = 1$ має місце $g \notin N_G(\langle a, b \rangle)$, робимо висновок, що $N = N_G$.

Нехай G – група типу 2) леми. Доведемо, що

$$N = P \times \langle y^5 \rangle$$

нормалізує довільну нециклічну підгрупу H групи G . Якщо H – ненільпотентна група, то $P \subseteq H$, звідки $H \triangleleft G$. Нехай H – нільпотентна група. Тоді її

силовська p -підгрупа нециклічна, а силовська p' -підгрупа міститься у центрі $Z(G)$, тому

$$N \subseteq N_G(H), N = N_G$$

□

Наведемо приклади груп, що ілюструють лему 2.5.5.

Приклад 2.5.1. $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|a| = 2^n$, $n > 1$, $|b| = |c| = 2$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{2^{n-1}}$, $|y| = 3k$, $(k, 2) = 1$, $[y, a] = 1$, $y^{-1}by = c$, $y^{-1}cy = cba^{2^{n-2}}$.

У цьому випадку $N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^3 \rangle$.

Приклад 2.5.2. $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|a| = 5^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = 5$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{5^{n-1}}$, $|y| = 3k$, $(k, 5) = 1$, $[y, a] = 1$, $y^{-1}by = b^3c$, $y^{-1}cy = cb^2$.

Неважко переконатись, що у цій групі $N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^3 \rangle$.

Приклад 2.5.3. $G = H \times \langle b \rangle \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2] = [b, c]$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle c \rangle] = E$, $|y| = 5k$, $(k, 2) = 1$ та $y^{-1}by = h_1bc$, $y^{-1}cy = b$, $y^{-1}h_1y = h_2$, $y^{-1}h_2y = bc$.

У цій групі $N_G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^5 \rangle$.

Наступна теорема дає вичерпну характеристику скінченних ненільпотентних груп, що мають недедекіндову нециклічну норму.

Теорема 2.5.3. *Скінченні ненільпотентні групи, що мають нільпотентну недедекіндову нециклічну норму, вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$, де $|x| = p^n$, $n \geq 1$ ($n > 1$ при $p = 2$), $|b| = |c| = p$, $|y| = mk$, $m \neq 1$, $(m, 2(p-1)) = 1$, $(k, p) = 1$, $p \equiv -1 \pmod{m}$, $[x, c] = 1$, $[b, c] = x^{p^{n-1}}$, $[y, x] = 1$ та $N_G(\langle g \rangle) = C_G(\langle g \rangle) = \langle x, y^m \rangle = Z(G)$ для кожного нецентрального елемента $g \in \langle b, c \rangle$; $N_G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^m \rangle$;
- 2) $G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2] = [b, c]$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle c \rangle] = E$, $|y| = 5k$, $(k, 2) = 1$ та елемент y індукує незвідний автоморфізм порядку 5 на факторгрупі $(H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle / \langle h_1^2 \rangle$; $N_G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^5 \rangle$;
- 3) $G = \langle y \rangle \rtimes (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|y| = sn$, $(n, ps) = (s, p) = 1$, $|x| = p^k$, $k > 1$ ($k > 2$ при $p = 2$), $|b| = |c| = p$, $[x, c] = 1$, $[b, c] = x^{p^{k-1}}$, $Z(G) = \langle x^{p^r} \rangle \times \langle y^s \rangle$, $[y, b] = [y, c] = 1$, $x^{-1}yx = y^\beta$, $\beta \neq 1$, $\beta^{p^r} \equiv 1 \pmod{s}$, $1 \leq r < k$ ($1 \leq r < k-1$ при $p = 2$), $(\beta-1, ps) = 1$, $N_G = (\langle x^{p^r} \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^s \rangle$;

- 4) $G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2] = [b, c]$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle c \rangle] = E$, $|y| = 3k$, $(k, 2) = 1$, $\langle y \rangle \cap Z(G) = \langle y^3 \rangle$, $[y, b] = [y, c] = 1$, $y^{-1}h_1y = h_2$, $y^{-1}h_2y = h_1h_2^{-1}$; $N_G = (\langle h_1^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \times \langle y^3 \rangle$;
- 5) $G = \langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|y| = sn$, $(n, s) = (s, p) = 1$, $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m > 1$, $k \geq m + r$, $k > 3$ при $m = 2$ та $p = 2$, $Z(G) = \langle x^{p^{r+1}} \rangle \times \langle b^{p^{r+1}} \rangle \times \langle y^s \rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}\alpha}$, $(\alpha, p) = 1$, $[y, b] = 1$, $x^{-1}yx = y^\beta$, $\beta \neq 1$, $\beta^{p^r} \equiv 1 \pmod{s}$, $(\beta - 1, ps) = 1$, $N_G = \langle x^{p^r} \rangle \rtimes \langle b \rangle \times \langle y^s \rangle$;
- 6) $G = H \rtimes Q \rtimes \langle y \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $Q = \langle a, d \rangle$, $|a| = |d| = 4$, $a^2 = d^2 = [a, d]$, $[H, \langle a \rangle] = E$, $[h_1, d] = h_2^2$, $[h_1, d] = 1$, $|y| = 3k$, $(k, 2) = 1$, $\langle y \rangle \cap Z(G) = \langle y^3 \rangle$, $[a, y] = [dh_1, y] = 1$, $y^{-1}h_1y = h_2a^{2t}$, $y^{-1}h_2y = h_1h_2a^{2t}$; $N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle dh_1 \rangle \times \langle y^3 \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми легко перевірити безпосередньо. Доведемо їх необхідність.

З умови теореми та твердження 2.1.1 випливає, що

$$N_G = P \times \langle z \rangle,$$

де P — силовська p -підгрупа N_G , що є негамільтоновою \overline{H}_p -групою і $(|z|, p) = 1$. Позначимо G_p силовську p -підгрупу групи G .

Якщо $P = G_p$, то за лемою 2.5.5 G є групою одного з типів 1) або 2) доводжуваної теореми. Тому далі будемо вважати, що $P \neq G_p$.

Враховуючи леми 2.5.3, 2.5.4 та твердження 2.1.1, робимо висновок, що P — група одного з типів:

- 1) $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = p$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$;
- 2) $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 2$, $|b| = p^m$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$.

Подальше доведення теореми продовжимо у лемах 2.5.6—2.5.12. \square

Лема 2.5.6. *Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Якщо силовська p -підгрупа P нециклічної норми N_G є групою типу*

$$P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $|a| = p^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = p \neq 2$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$, то G — група типу 3) теореми 2.5.3 при $p \neq 2$ і $r \leq k - 1$.

Доведення. Нехай група G та її нециклічна норма N_G задовольняють умови леми. Тоді з урахуванням леми 2.1.1 та теореми 2.3.2 довільна силовська p -підгрупа G групи G є групою одного з типів:

- 1) $G_p = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = p^{r+n}$, $r \geq 1$, $|b| = |c| = p$, $[x, c] = 1$, $[b, c] = x^{p^{n+r-1}}$;

$$2) G_p = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |x| = p^{r+n}, r \geq 1, |b| = |c| = p, [b, c] = x^{p^{n+r-1}}, [x, c] = bx^{p^{n+r-1}l}, l \in \{0, 1\}.$$

Без порушень загальності будемо вважати, що $x^{p^r} = a$. Розглянемо фактор-групу

$$\bar{G} = G/\omega(P).$$

З циклічності її силовських p -підгруп та леми 2.5.2 випливає, що всі силовські підгрупи групи \bar{G} циклічні. Тому за теоремою 9.4.3 [151] вона є метациклічною групою і без порушень загальності можна вважати, що

$$\bar{G} = \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{y} \rangle, (|\bar{y}|, p) = 1,$$

де $\bar{G}_p \cong \langle \bar{x} \rangle$.

Якщо \bar{G} — абелева група, то $G' \subseteq \omega(P)$, $G_p \triangleleft G$ і за теоремою Шура

$$G = G_p \rtimes \langle y \rangle.$$

Неважко довести, що

$$\langle x \rangle \cap \omega(P) \subseteq Z(G),$$

тому $\omega(P)$ не містить нециклічних y -допустимих підгруп. Отже, G_p — \bar{H}_p -група типу 1), вказаного на початку доведення.

Оскільки $\langle x \rangle = Z(G_p) \triangleleft G$ і $x \notin Z(G)$, то

$$[\omega(P), \langle y \rangle] \subseteq \langle x, y \rangle \cap \omega(P) \subseteq Z(G),$$

звідки $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$. Тому з умови $\omega(P) \times \langle y \rangle \triangleleft G$ випливає, що $\langle y \rangle \triangleleft G$ і G — нільпотентна група, що неможливо за умовою.

Отже, \bar{G} — неабелева група. Припустимо, що $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Тоді, враховуючи циклічність силовських p' -підгруп та теорему 9.4.3 [151], можемо вважати, що $\bar{G}' = \langle \bar{x} \rangle$, тобто

$$\bar{y}^{-1} \bar{x} \bar{y} = \bar{x}^\alpha,$$

де $(\alpha - 1, |\bar{y}|) = 1$, $\alpha^{|\bar{y}|} \equiv 1 \pmod{p^{n+r-1}}$.

Зрозуміло, що за таких умов $G_p \triangleleft G$ і

$$G = G_p \rtimes \langle y \rangle.$$

Нехай G_p — група типу 1), вказаного на початку доведення. Тоді $\langle x \rangle \triangleleft G$ як характеристична підгрупа групи $G_p \triangleleft G$ і

$$[\omega(P), \langle y \rangle] \subseteq \omega(P) \cap \langle x, y \rangle = \langle x^{p^{n+r-1}} \rangle.$$

Використовуючи теорему Машке, неважко довести, що $[x^{p^{n+r-1}}, y] = 1$ і, як наслідок, $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$. Значить,

$$\langle y \rangle \times \omega(P) \triangleleft P \langle y \rangle, [P, \langle y \rangle] = 1$$

і $[x^{p^r}, y] = 1$. З іншого боку

$$y^{-1}x^{p^r}y = x^{p^r}\alpha,$$

тому $\alpha p^r \equiv p^r \pmod{p^{n+r}}$ і $\alpha \equiv 1 \pmod{p^n}$. Оскільки $n \geq 1$, то $(\alpha - 1, p) \neq 1$, що неможливо.

Нехай G_p — група типу 2), вказаного на початку доведення леми. Оскільки $\langle x^{p^{n+r-1}} \rangle \triangleleft G$, і

$$G'_p \subseteq \langle x^{p^{n+r-1}}, b \rangle \triangleleft G,$$

то застосовуючи теорему Машке до підгруп G'_p та $\omega(P)$, неважко довести, що

$$[\omega(P), \langle y \rangle] = [P, \langle y \rangle] = E.$$

Окрім того, $C_{G_p}(G'_p) = \langle x, b \rangle \triangleleft G$ і, враховуючи доведене вище, одержимо

$$y^{-1}xy = x^\alpha z,$$

де $z \in \langle x, b \rangle \cap \omega(P)$. Значить,

$$y^{-1}x^{p^r}y = x^{p^r\alpha}z^{p^r\alpha} = x^{p^r},$$

тому $\alpha p^r \equiv p^r \pmod{p^{n+r}}$ і $\alpha \equiv 1 \pmod{p^n}$. Отже, і цей випадок не має місця.

Нехай $\langle \bar{x} \rangle \not\triangleleft \bar{G}$. Тоді якщо $\bar{G}' = \langle \bar{y}_1 \rangle$, то за теоремою 9.4.3 [151]

$$\bar{G} = \langle \bar{y}_1 \rangle \rtimes \langle \bar{h} \rangle$$

і без порушень загальності можна вважати, що

$$\langle \bar{h} \rangle = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y}_2 \rangle,$$

де $\langle \bar{y}_1 \rangle, \langle \bar{x} \rangle, \langle \bar{y}_2 \rangle$ — холловські s -, p -, і t -підгрупи відповідно, $[\bar{y}_1, \bar{y}_2] = 1$, $\bar{x}^{-1}\bar{y}_1\bar{x} = \bar{y}_1^\beta$, $\beta^{p^{n+r-1}} \equiv 1 \pmod{s}$ і $(\beta - 1, pst) = 1$.

З доведеного у попередньому пункті та леми 2.5.2 випливає, що $[y_1, y_2] = 1$ та $y_2 \in Z(G)$. Нехай $[\omega(P), \langle y_1 \rangle] = E$. Тоді з умов

$$\omega(P)\langle y_1 \rangle \triangleleft G, \langle y_1 \rangle \triangleleft G$$

та теореми Шура одержимо

$$G = \langle y_1 \rangle \rtimes G_p \times \langle y_2 \rangle.$$

Зазначимо, що при цьому G_p — група типу 1), оскільки у випадку 2)

$$\omega(G_p) = \omega(P) \not\subseteq N_G(\langle y_1 \rangle \rtimes \langle x \rangle),$$

всупереч умові $\omega(P) \subseteq N_G$. Отже, у цьому випадку G — група типу 3) теореми 2.5.3.

Нехай $[\omega(P), \langle y_1 \rangle] \neq E$. Позначимо $\langle y_q \rangle$ – таку силовську q -підгрупу групи $\langle y_1 \rangle$, що $[\omega(P), \langle y_q \rangle] \neq E$ і розглянемо її нормалізатор $N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$ у групі

$$G_1 = \langle y_q \rangle G_p.$$

Візьмемо довільний елемент $g \in G_p \cap N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$, непереставний з y_q . Тоді якщо $g \in \omega(P)$, то

$$[g, y_q] \in (\langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle) \cap \omega(P) = \langle g \rangle$$

і за теоремою Машке $[\omega(P), \langle y_q \rangle] = E$. Отже, $g \notin \omega(P)$ і, враховуючи співвідношення

$$[\omega(P), y_q] \in (\langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle) \cap \omega(P) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle,$$

неважко довести, що $[\omega(P), \langle y_q \rangle] = E$. Останнє суперечить вибору підгрупи $\langle y_q \rangle$.

Отже, $\langle y_q \rangle$ міститься у центрі свого нормалізатора $N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$ і за теоремою Бернсайда ([151], теорема 14.3.1)

$$G_1 = G_p \rtimes \langle y_q \rangle.$$

Але у такому випадку у фактор-групі $\overline{G} = G/\omega(P)$ перетин $\overline{G}' \cap \overline{G}_1 \not\subseteq \langle \overline{y} \rangle$, що неможливо. Отже, розглядуваний випадок не має місця. \square

Лема 2.5.7. *Нехай G – скінченна ненільпотентна група. Якщо силовська p -підгрупа P нециклічної норми $N_G \in$ групою типу*

$$P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |a| = 4, |b| = |c| = 2, [a, c] = 1, [b, c] = a^2,$$

то G – група типу 3) теореми 2.5.3 при $p = 2, k = r + 2$.

Доведення. Позначимо G_2 – довільну силовську 2-підгрупу групи G . Оскільки $P \leq N_{G_2}$, то за лемою 2.1.1 та теоремою 2.4.2 G_2 є групою одного з наступних типів:

- 1) $G_2 = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |x| = 2^{r+2}, r \geq 1, |b| = |c| = 2, [x, c] = 1, [b, c] = x^{2^{r+1}};$
- 2) $G_2 = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |x| = 2^{r+2}, r \geq 1, |b| = |c| = 2, [x, b] = [b, c] = x^{2^{r+1}}, [x, c] = bx^{\pm 2^r};$
- 3) $G_2 = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle, |x| = 2^{r+2}, r \geq 1, |b| = |c| = |d| = 2, [d, b] = [d, c] = [b, c] = x^{2^{r+1}}, [x, c] = 1, d^{-1}xd = x^{-1}.$

Без порушень загальності будемо вважати, що $x^{2^r} = a$ і далі будемо розглядати кожен із вказаних для підгрупи G_2 випадків окремо.

1. Нехай $G_2 - \bar{H}_2$ -група типу 1). Тоді фактор-група $G/P = \bar{G}$ має циклічні силовські підгрупи і за теоремою 9.4.3 [151] є прямим чи напівпрямим добутком своїх циклічних холловських підгруп

$$\bar{G} = \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{y} \rangle,$$

де $\bar{G}_p \cong \langle \bar{x} \rangle, (|\bar{y}|, |\bar{x}|) = 1$.

Припустимо, що $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Тоді, як відомо, фактор-група $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\langle \bar{x} \rangle)$ ізоморфна деякій підгрупі групи $\text{Aut}(\langle \bar{x} \rangle)$ і, оскільки остання є 2-групою, то група \bar{G} – абелева. Значить,

$$G = G_2 \rtimes \langle y \rangle,$$

де $\langle y \rangle$ – силовська $2'$ -підгрупа групи G і $G' \subseteq P$. Очевидно, що $\langle x \rangle \triangleleft G$, тому $[x, y] = 1$. Значить $x \in Z(G)$ і $P = G_2$, що суперечить умові леми.

2. Нехай $\langle \bar{x} \rangle \not\triangleleft \bar{G}$. Враховуючи лему 2.5.2 та теорему 9.4.3 [151] можна вважати, що

$$\bar{G} = \langle \bar{y}_1 \rangle \rtimes \langle \bar{h} \rangle,$$

де $\langle \bar{h} \rangle = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y}_2 \rangle$ і $\langle \bar{y}_1 \rangle, \langle \bar{x} \rangle, \langle \bar{y}_2 \rangle$ – холловські s -, 2 -, і t -підгрупи відповідно. Очевидно, що $[\bar{y}_1, \bar{y}_2] = 1$. Нехай $\bar{x}^{-1} \bar{y}_1 \bar{x} = \bar{y}_1^\beta$, де β – деяке ціле число. Тоді $\beta^{2^r} \equiv 1 \pmod{s}$ і $(\beta - 1, 2st) = 1$.

Якщо $[\langle y_1 \rangle, P] = E$, то $\langle y_1 \rangle \triangleleft G$ і

$$G = \langle y_1 \rangle \rtimes (G_2 \langle y_2 \rangle).$$

Зазначимо, що $[y_1, y_2] = 1$ і оскільки $[G_2, \langle y_2 \rangle] \subseteq G_2$, то $[x, y_2] = 1$. Отже, $\langle y_2 \rangle$ – характеристична підгрупа групи

$$\langle y_1 \rangle \rtimes \langle x \rangle \times \langle y_2 \rangle \triangleleft G.$$

Тому $\langle y_2 \rangle \triangleleft G$, $y_2 \in Z(G)$ і G – група типу 3) теореми 2.5.3 при $p = 2$ і $k = r + 2$.

Нехай тепер $[\langle y_1 \rangle, P] \neq E$. Тоді існує силовська q -підгрупа $\langle y_q \rangle \subseteq \langle y \rangle$, така, що $[\langle y_q \rangle, P] \neq E$. Покажемо, що у такому випадку підгрупа $\langle y_q \rangle$ міститься у центрі свого нормалізатора $N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$, де

$$G_1 = \langle y_q \rangle G_2.$$

Нехай $g \in N_{G_1}(\langle y_q \rangle) \cap G_2$ і $[g, y_q] \neq 1$. Якщо $|g| \leq 4$, то враховуючи, що $g \in P$ і P породжується інволюціями, можна вважати, що $|g| = 2$. Звідси $\langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle \triangleleft P \langle y_q \rangle$ і

$$\langle g \rangle = \langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle \bigcap P \triangleleft P,$$

що суперечить циклічності центра $Z(P)$. Отже, $|g| > 4$. Тоді

$$\langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle \triangleleft P \langle g, y_q \rangle,$$

$$[P, \langle y_q \rangle] \subseteq P \cap \langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle = \langle a \rangle$$

і використовуючи теорему Машке, переконуємось, що $[\langle y_q \rangle, P] = E$, всупереч вибору підгрупи $\langle y_q \rangle$. Отже, $\langle y_q \rangle$ міститься у центрі свого нормалізатора у G_1 і за теоремою Бернсайда $\langle y_q \rangle$ інваріантно доповнювана, що, очевидно, неможливо.

2. Нехай G_2 — група типу 2), вказаного на початку доведення леми. Як і раніше, фактор-група $\overline{G} = G/P$ має циклічні силовські підгрупи і за теоремою 9.4.3 [151] є прямим чи напівпрямим добутком циклічних холловських підгруп

$$\overline{G} = \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{y} \rangle, \overline{G}_p \cong \langle \bar{x} \rangle, (|\bar{y}|, |\bar{x}|) = 1.$$

Якщо $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G}$, то $[\bar{x}, \bar{y}] = 1$, $G_2 \triangleleft G$ і $G = G_2 \rtimes \langle y \rangle$. Враховуючи, що $[Z(G_2), \langle y \rangle] = E$ і $G'_2 \triangleleft G$, робимо висновок, що

$$[a, y] = [b, y] = 1,$$

звідки $y \in C_G(P)$. Оскільки

$$C_G(P) = \langle x^2 \rangle \times \langle y \rangle,$$

то $\langle y \rangle \triangleleft G$ і G — нільпотентна група, що неможливо за умовою.

Нехай $\langle \bar{x} \rangle \not\triangleleft \overline{G}$. Без порушень загальності будемо вважати, що

$$\overline{G} = \langle \bar{y} \rangle \rtimes \langle \bar{x} \rangle, (|\bar{y}|, 2) = 1.$$

Оскільки $P \triangleleft G$ і $\langle a \rangle \triangleleft G$, то за теоремою Машке у фактор-групі $\tilde{G} = G/\langle a^2 \rangle$ підгрупи $\langle \tilde{a} \rangle$ та $\langle \tilde{b}, \tilde{c} \rangle \in \tilde{y}$ -інваріантними. Звідси $\langle b, c \rangle$ — також y -інваріантна підгрупа і, враховуючи, що її група автоморфізмів є 2-групою, одержимо

$$[\langle b, c \rangle, \langle y \rangle] = E.$$

Отже, $[P, \langle y \rangle] = E$ і $\langle y \rangle \triangleleft G$. Оскільки $P\langle y \rangle \triangleleft G$, то $\langle y \rangle \triangleleft G$. Тому $\langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle \triangleleft G$, що неможливо, бо $c \notin N_G(\langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle)$.

3. Нехай G_2 — група типу 3). Позначимо $C = C_G(\langle a \rangle)$. Зрозуміло, що $C \triangleleft G$ і $[G : C] = 2$. Враховуючи міркування, застосовані у пункті 1 доведення, робимо висновок, що C — розв'язна група і

$$C = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \langle y \rangle,$$

де $\langle y \rangle$ — силовська $2'$ -підгрупа групи G .

Якщо — нільпотентна група, то $\langle y \rangle \triangleleft C$ і $\langle y \rangle \triangleleft G$. Тому, якщо $[y, d] \neq 1$, то

$$\langle y \rangle \rtimes \langle d \rangle \triangleleft G_1 = P\langle y, d \rangle,$$

що неможливо, оскільки $P \not\subseteq N_{G_1}(\langle y, d \rangle)$. Значить $[d, y] = 1$. Але у такому випадку G — нільпотентна група, що суперечить умові.

Отже, далі будемо вважати, що група G нелінійнопотентна. Нехай її силовська 2-підгрупа нормальна. Позначимо $\langle y_q \rangle$ довільну силовську q -підгрупу з $\langle y \rangle$ і припустимо, що підгрупа $N_G(\langle y_q \rangle)$ нециклічна. Оскільки підгрупа $\langle y_q \rangle$ характеристична у $N_G(\langle y_q \rangle)$, то з умови $[x, y_q] = 1$ випливає, що

$$[C, \langle y_q \rangle] = E.$$

Звідси $\langle y_q \rangle \triangleleft G$.

Якщо $[d, y_q] \neq 1$, то

$$[P, \langle d \rangle] \subseteq P \cap \langle y_q \rangle \rtimes \langle d \rangle = E,$$

всупереч умові. Отже, $[d, y_q] = 1$ і $y_q \in Z(G)$. Тому далі будемо вважати, що $N_G(\langle y_q \rangle)$ циклічний. Тоді $\langle y_q \rangle$ міститься у центрі $N_G(\langle y_q \rangle)$, і за теоремою Бернсайда $\langle y_q \rangle$ інваріантно доповнювана у G . Враховуючи довільність вибору підгрупи $\langle y_q \rangle$ та використовуючи кілька разів теорему Бернсайда, приходимо до висновку, що

$$G = G_2 \rtimes \langle y \rangle.$$

Розглянемо фактор-групу

$$\bar{G} = G / \langle x \rangle \cong (\bar{C} \times \langle \bar{d} \rangle) \langle \bar{y} \rangle.$$

Оскільки $\bar{C} \triangleleft \bar{G}$, $\bar{G}_2 \triangleleft \bar{G}$, то застосовуючи теорему Машке, одержимо, що $[\bar{d}, \bar{y}] = 1$. Отже, $\langle x, d \rangle$ — y -інваріантна підгрупа. Звідси

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \langle x, d \rangle \rtimes \langle y \rangle \cap P = \langle a \rangle$$

і знову за теоремою Машке $[P, \langle y \rangle] = E$. Тоді C — нелінійнопотентна, всупереч припущенню.

Нехай силовська 2-підгрупа з C неінваріантна. Тоді, виходячи з пункту 1 доведення, робимо висновок, що $C = \langle y \rangle \rtimes C_2$, де $\langle y \rangle$ — силовська 2-підгрупа групи C , а C_2 — її холловське доповнення. Без порушень загальності можна вважати, що

$$C_2 = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$$

і оскільки $\langle y \rangle \triangleleft G$, $[d, y] = 1$ та $[x, y] \neq 1$, одержимо $[dx, y] \neq 1$. Звідси $P \not\subseteq N_G(\langle y, xd \rangle)$, що неможливо. \square

Лема 2.5.8. *Нехай G — скінченна нелінійнопотентна група. Якщо силовська 2-підгрупа P нециклічної норми N_G є групою типу*

$$P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |a| = 2^n, n \geq 3, |b| = |c| = 2, [a, c] = 1, [b, c] = a^{2^{n-1}},$$

то G — група типу 3) теореми 2.5.3 при $p = 2, k > r + 2$.

Доведення. Позначимо G_2 — силовську 2-підгрупу групи G . За лемою 2.1.1 $P \leq N_{G_2}$, де N_{G_2} — нециклічна норма групи G_2 , тому за теоремою 2.4.2 G_2 — група одного з типів:

1) $G_2 = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = 2^{r+n}$, $r \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[x, c] = 1$, $[b, c] = x^{2^{r+n-1}}$;

2) $G_2 = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = 2^{r+n}$, $r \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[x, b] = [b, c] = x^{2^{r+n-1}}$, $[x, c] = bx^{\pm 2^{r+n-2}}$.

Далі розглянемо кожен із вказаних для підгрупи G_2 випадків окремо.

1. Нехай G_2 — група типу 1). Тоді $G/P \cong \bar{G}$ має циклічні силовські підгрупи й за теоремою 9.4.3 [151] є прямим чи напівпрямим добутком своїх циклічних холловських підгруп.

Припустимо, що $\bar{G}_2 \cong \langle \bar{x} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Тоді $G_2 \triangleleft G$, $\langle x \rangle \triangleleft G$ і $x \in Z(G)$, оскільки фактор-група $G/C_G(\langle x \rangle)$ ізоморфна деякій підгрупі з $\text{Aut}(\langle x \rangle)$, а остання є 2-групою. Значить $G_2 = P$, що неможливо. Отже, далі будемо вважати, що $\langle \bar{x} \rangle \not\triangleleft \bar{G}$. Тоді з леми 2.5.2 та теореми 9.4.3 [151] випливає, що

$$\bar{G} = \langle \bar{y}_1 \rangle \rtimes \langle \bar{h} \rangle,$$

де $\langle \bar{h} \rangle = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y}_2 \rangle$ і $\langle \bar{y}_1 \rangle$, $\langle \bar{x} \rangle$, $\langle \bar{y}_2 \rangle$ — холловські s -, 2- і t -підгрупи відповідно. При цьому

$$[\bar{y}_1, \bar{y}_2] = 1, \bar{x}^{-1} \bar{y}_1 \bar{x} = \bar{y}_1^\beta, \beta^{2^r} \equiv 1 \pmod{s}, (\beta - 1, 2st) = 1.$$

Якщо $[P, \langle y_1 \rangle] = E$, то $\langle y_1 \rangle \triangleleft G$ і за теоремою Шура

$$G = \langle y_1 \rangle \rtimes H,$$

де $(|H|, s) = 1$. Оскільки $[y_1, y_2] = 1$ та $[G_2, \langle y_2 \rangle] \subseteq P$, то з характеристичності підгрупи $\langle y_2 \rangle$ у $\langle y_1, x \rangle \times \langle y_2 \rangle \triangleleft G$ випливає $\langle y_2 \rangle \triangleleft G$. Значить, $y_2 \in Z(G)$ і G — група типу 3) теореми 2.5.3 при $p = 2$ і $k > r + 2$.

Нехай $[P, \langle y_1 \rangle] \neq E$. Позначимо $\langle y_q \rangle$ — таку силовську q -підгрупу з $\langle y \rangle$, що $[P, \langle y_q \rangle] \neq E$ і покажемо, що $\langle y_q \rangle$ міститься у центрі свого нормалізатора $N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$ в $G_1 = G_2 \langle y_q \rangle$.

Нехай $g \in G_p \cap N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$, $[g, y_q] \neq 1$. Якщо $|g| \leq 4$ то враховуючи, що $g \in \omega(P)$ і підгрупа $\omega(P)$ породжується інволюціями, можна вважати $|g| = 2$. Звідси

$$\langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle \triangleleft \langle y_q \rangle P$$

і $\langle g \rangle \triangleleft P$, що суперечить циклічності підгрупи $Z(P)$. Нехай $|g| > 4$. Тоді

$$[P, \langle y_q \rangle] \subseteq \langle y_q \rangle \rtimes \langle g \rangle \bigcap P = \langle a \rangle.$$

Використовуючи теорему Машке, одержимо $[P, \langle y_q \rangle] = E$, що неможливо за припущенням. Отже, $\langle y_q \rangle$ міститься у центрі свого нормалізатора $N_{G_1}(\langle y_q \rangle)$ і за теоремою Бернсайда інваріантно доповнювана у G_1 . Тоді

$$G_1/P \cong \langle \bar{x} \rangle \rtimes \langle \bar{y}_q \rangle,$$

що неможливо, оскільки $[\bar{x}, \bar{y}_q] \in \langle \bar{y}_q \rangle$.

2. Нехай G_2 — група типу 2), вказаного на початку доведення леми. Повторюючи міркування, наведені у пункті 2) доведення леми 2.5.7, приходимо до висновку, що цей випадок не має місця. Лему доведено. \square

Лема 2.5.9. *Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Якщо силовська p -підгрупа P нециклічної норми N_G є групою типу*

$$P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = p^n, n \geq 2, |b| = p, [a, b] = a^{p^{n-1}},$$

то $p = 2, n = 2$ і G — група типу 4) теореми 2.5.3.

Доведення. 1. Нехай спочатку $p \neq 2$. Як і вище через G_p позначимо силовську p -підгрупу групи G . Тоді з лем 2.1.1 та 2.3.7 випливає, що G_p — група одного з типів:

1) $G_p = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |x| = p^m, m > 1, |b| = |c| = p, [x, c] = 1, [b, c] = x^{p^{m-1}}, P = \langle x^{p^r} c \rangle \rtimes \langle b \rangle, 0 \leq r < m;$

2) $G_p = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, |x| = p^m, m > 1, |b| = |c| = p, [b, c] = x^{p^{m-1}}, [x, c] = bx^{p^{m-1}l}, l \in \{0, 1\}, P = \langle x^{p^r} c \rangle \rtimes \langle b \rangle, 0 < r < m.$

Позначимо $\langle y \rangle$ — довільну силовську p' -підгрупу групи G . Тоді враховуючи циклічність підгрупи $Z(P)$ та теорему Машке, одержимо $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$. Звідси

$$\omega(P) \times \langle y \rangle \triangleleft P \langle y \rangle$$

і $[P, \langle y \rangle] = E$.

Оскільки фактор-група $\bar{G} = G/P$ має циклічні силовські підгрупи, то за теоремою 9.4.3 [151] та лемою 2.5.2

$$\bar{G} = \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{y} \rangle,$$

де $\langle \bar{x} \rangle, \langle \bar{y} \rangle$ — образи підгруп $\langle x \rangle$ та $\langle y \rangle$ відповідно. Припустимо, що $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Тоді

$$G_p \triangleleft G, \omega(P) \triangleleft G,$$

звідки $\omega(G_p) \triangleleft G$ і $\langle x^{p^{m-1}} \rangle \triangleleft G$ і за теоремою Машке неважко довести, що $[\omega(G_p), \langle y \rangle] = E$. Але тоді $\omega(G_p) \subseteq N_G$, що неможливо.

Отже, $\langle \bar{x} \rangle \not\triangleleft \bar{G}$. Враховуючи циклічність силовських p' -підгруп та теореми 9.4.3 [151], можна вважати, що

$$\bar{G} = \langle \bar{y} \rangle \rtimes \langle \bar{x} \rangle,$$

де $\langle \bar{y} \rangle$ — деяка силовська p' -підгрупа групи \bar{G} .

Оскільки $[\langle y \rangle, P] = E$ та $\langle y \rangle \times P \triangleleft G$, то $\langle y \rangle \triangleleft G$. Якщо $[y, c] \neq 1$, то $\langle y \rangle \rtimes \langle c \rangle$ — нециклічна підгрупа і $P \not\subseteq N_G \langle y \rangle \rtimes \langle c \rangle$, що неможливо. Отже, $[y, c] = 1$. Тоді з умов $x^{p^r} c \in P$ і

$$[x^{p^r} c, y] = 1 = [x^{p^r}, y]$$

впливає, що $x^{p^r} \in Z(G)$. Це неможливо, оскільки $x^{p^r} \notin N_G$.

2. Нехай $p = 2$ і $n > 2$. З умови $P \leq N_{G_2}$ та теореми 2.4.2 випливає, що силовська 2-підгрупа G_2 є групою одного з типів:

1) $G_2 = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = 2^m$, $m > 2$, $|b| = |c| = 2$, $[x, c] = 1$, $[b, c] = x^{2^{m-1}}$, $P = \langle x^{p^r} c \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $0 \leq r < m$;

2) $G_2 = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = 2^m$, $r \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[x, b] = [b, c] = x^{2^{m-1}}$, $[x, c] = bx^{\pm 2^{m-2}}$, $P = \langle x^{p^r} c \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $0 < r < m$;

3) $G_2 = \langle x \rangle \langle a \rangle$, $x^2 = a^2 b$, $a^{-1} x a = x^{-1}$, $P = \langle a \rangle \rtimes \langle x^2 a^{-2} \rangle$.

Позначимо $\langle y \rangle$ — силовську $2'$ -підгрупу групи G . Тоді з умов $\omega(P) \triangleleft G$, $\langle x^{2^{m-1}} \rangle \triangleleft G$ та теореми Машке випливає, що $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$. Звідси

$$\omega(P)\langle y \rangle \triangleleft P\langle y \rangle, \langle y \rangle \triangleleft P\langle y \rangle$$

і тому $[P, \langle y \rangle] = E$.

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/P \cong \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{y} \rangle.$$

Нехай її силовська 2-підгрупа $\langle \bar{x} \rangle$ інваріантна. Тоді \overline{G} — абелева група, звідки

$$G_2 = P\langle x \rangle \triangleleft G$$

і $\langle y \rangle P \triangleleft G$. Але у такому випадку $\langle y \rangle \triangleleft G$ і G — нільпотентна група, що суперечить умові.

Тому далі вважаємо, що $\langle \bar{x} \rangle \not\triangleleft \overline{G}$. За теоремою 9.4.3 [151] без порушень загальності можна вважати, що $\langle \bar{y} \rangle \triangleleft \overline{G}$ і враховуючи доведене

$$\langle y \rangle \times P \triangleleft G,$$

звідки $\langle y \rangle \triangleleft G$. Як і в попередньому пункті переконуємось, що G_2 не може бути групою типів 1) або 2).

Нехай G_2 — група типу 3). Оскільки $[y, x] \neq 1$ і $[y, a] = 1$, то $[y, ax] \neq 1$ і підгрупа $\langle y, ax \rangle$ нециклічна, що суперечить співвідношенню $P \not\leq N_G(\langle y, ax \rangle)$. Отже, і цей випадок не має місця.

3. Нехай $n = 2$, тобто $P = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle ab \rangle$ — група діедра. За теоремою 2.4.2 з умови $P \leq N_{G_2}$ випливає, що G_2 — група одного з типів:

1) $G_2 = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle ab \rangle$, $|x| = 2^{r+1}$, $r \geq 1$, $|b| = |ab| = 2$, $[x, ab] = 1$, $[b, ab] = x^{2^r} = a^2$;

2) $G_2 = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle ab \rangle$, $|x| = 2^{r+1}$, $r > 2$, $|b| = |ab| = 2$, $[x, b] = [b, ab] = x^{2^r} = a^2$, $[x, ab] = bx^{\pm 2^{r-1}}$;

3) $G_2 = \langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|x| = 2^3$, $|b| = 2$, $b^{-1} x b = x^3 = x^{-1} a^2$;

4) $G_2 = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle ab \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|x| = 2^{r+1}$, $r \geq 1$, $|b| = |ab| = |d| = 2$, $[x, ab] = 1$, $[b, d] = [ab, d] = [b, ab] = x^{2^r} = a^2$, $d^{-1} x d = x^{-1}$.

Очевидно, що $C = C_G(P) \triangleleft G$ і враховуючи, що група автоморфізмів $\text{Aut}(P)$ є 2-групою, приходимо до висновку, що силовська $2'$ -підгрупа $\langle y \rangle$ групи G міститься у C і тому $[P, \langle y \rangle] = 1$.

Нехай G_2 — група типу 1) або 2), вказаних вище. Тоді

$$C \cap G_2 = Z(G_2)$$

— циклічна підгрупа. Якщо $Z(G_2) \triangleleft C$, то C — абелева і $\langle y \rangle \triangleleft G$ як характеристична підгрупа групи $C \triangleleft G$. З цього випливає, що

$$Z(P) \subset Z(G_2) \subseteq Z(G),$$

а це суперечить умові.

Нехай $Z(G_2) \not\triangleleft C$. Тоді, враховуючи лему 2.5.2 та теорему 9.4.3 [151], можна вважати, що

$$C = \langle y \rangle \rtimes \langle g \rangle.$$

Оскільки $x^{2^{r-1}} \in Z(G_2) \setminus Z(G)$, то $[y, x^{2^{r-1}}] \neq 1$ і для елемента $a \in P$ маємо $[y, ax^{2^{r-1}}] \neq 1$. Отже, $\langle y, ax^{2^{r-1}} \rangle$ — нециклічна підгрупа, що суперечить співвідношенню $P \not\subseteq N_G(\langle y, ax^{2^{r-1}} \rangle)$.

Нехай G_2 — група типу 3). Тоді з умови

$$C \cap G_2 = \langle a_2 \rangle \subseteq Z(G)$$

робимо висновок, що C — абелева група і тому $\langle y \rangle \triangleleft C$. Значить $\langle y \rangle \triangleleft G$ і з урахуванням ненільпотентності групи G , одержимо $[x, y] \neq 1$. Це неможливо, бо нормалізатор нециклічної підгрупи $\langle xb, y \rangle$ не містить підгрупи P .

Далі будемо вважати, що G_2 — група типу 4). Тоді

$$C \cap G_2 = \langle x, da \rangle = H$$

— узагальнена 2-група кватерніонів.

Нехай $|H| = 8$. Позначимо $\langle y_q \rangle$ — довільну силовську q -підгрупу групи $\langle y \rangle \leq C$. Якщо $H \cap N_C(\langle y_q \rangle) = H_1$ — нециклічна підгрупа, то $H_1 = H$ і $\langle y_q \rangle \triangleleft C$.

Покажемо, що кожен елемент $g \in H$ переставний з y_q . Справді, нехай $[g, y_q] \neq 1$. Тоді $[ga, y_q] \neq 1$ і підгрупа $\langle ga, y_q \rangle$ нециклічна, де $|ga| = 2$ а її нормалізатор не містить підгрупи P . Отже, $[g, y_q] = 1$ і, враховуючи циклічність силовських $2'$ -підгруп та умову $[P, \langle y \rangle] = 1$, приходимо до висновку, що $y_q \in Z(C)$.

Нехай $H \cap N_C(\langle y_q \rangle) = H_1$ — циклічна підгрупа. Тоді $|H_1| \leq 4$ і неважко переконатись, що $[\langle y_q \rangle, H_1] = E$. Отже, у будь-якому випадку $\langle y_q \rangle$ належить центру свого нормалізатора у C . Враховуючи довільність вибору підгрупи $\langle y_q \rangle$ та застосовуючи кілька разів теорему Бернсайда, одержимо

$$C = H \rtimes \langle y \rangle.$$

Зрозуміло, що $[H, \langle y \rangle] \neq E$ і оскільки $\text{Aut}(H) \cong S_4$, то $|y| = 3k, y^3 \in C_G(H)$. Звідси

$$G = G_2 \rtimes \langle y \rangle$$

і G — група типу 4) теореми 2.5.3.

Нехай $|H| > 8$. Якщо кожна силовська q -підгрупа $\langle y_q \rangle$ з $\langle y \rangle$ міститься у центрі свого нормалізатора в C , то як і вище переконуємось, що

$$C = H \rtimes \langle y \rangle.$$

Оскільки група автоморфізмів узагальненої групи кватерніонів є 2-групою, то з цього випливає, що $\langle y \rangle \triangleleft G$. Отже,

$$G_2 = HP \triangleleft G$$

і, всупереч умові G — нільпотентна група.

Позначимо

$$\langle y_{q_1} \rangle, \langle y_{q_2} \rangle, \dots, \langle y_{q_n} \rangle$$

— силовські q_i -підгрупи групи $\langle y \rangle$, що належать центрам своїх нормалізаторів у C . Тоді за теоремою Бернсайда

$$C = C_1 \rtimes \langle y_1 \rangle,$$

де C_1 — інваріантне доповнення підгрупи $\langle y \rangle$, що є прямим добутком підгруп $\langle y_{q_1} \rangle, \langle y_{q_2} \rangle, \dots$ та $\langle y_{q_n} \rangle$. Оскільки силовська 2-підгрупа з C_1 ізоморфна H і жодна з її силовських s -підгруп $(s, 2) = 1$ не міститься у центрі свого нормалізатора $N_{C_1}(\langle y_s \rangle)$, то за доведеним у попередньому пункті силовська 2-підгрупа групи $N_{C_1}(\langle y_s \rangle) \cap H$ циклічна, порядку вищого за 4. Тоді

$$N_{C_1}(\langle y_s \rangle) = \langle y_2 \rangle \rtimes \langle x_1 \rangle,$$

де $\langle y_2 \rangle$ — силовська $2'$ -підгрупа з C_1 і $|x_1| = 2^k > 4$.

Нехай $[x_1^{2^{k-2}}, y_s] \neq 1$. Тоді $[ax_1^{2^{k-2}}, y_s] \neq 1$ і $\langle y_s \rangle \rtimes \langle ax_1^{2^{k-2}} \rangle$ — нециклічна, а значить інваріантна підгрупа групи $(\langle y_s \rangle \rtimes \langle x_1^{2^{k-2}} a \rangle)P$, що неможливо. Отже, $[x_1^{2^{k-2}}, y_s] = 1$ для будь-якої підгрупи $\langle y_s \rangle$.

Позначимо $K = C_{C_1}(x_1^{2^{k-2}})$. Оскільки $\langle x_1^{2^{k-2}} \rangle \triangleleft C_1$, то $K \triangleleft C_1$. За лемою Фраттіні ([107], теорема 17.8.1)

$$C_1 = K \cdot N_{C_1}(\langle y_s \rangle),$$

і тому $N_{C_1}(\langle y_s \rangle) \cap H$ — нециклічна підгрупа, що суперечить припущенню. Отже, цей випадок неможливий. \square

Лема 2.5.10. *Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Якщо силовська p -підгрупа P нециклічної норми N_G є групою типу*

$$P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = p^n, n \geq 2, |b| = p^m, m > 1, p \neq 2, [a, b] = a^{p^{n-1}},$$

то G — група типу 5) теореми 2.5.3.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. Позначимо G_p — силовську p -підгрупу групи G . Оскільки за умовою $P \neq G_p$, то враховуючи леми 2.3.6–2.3.8, будемо вважати, що $m \leq n$.

З умови $P \leq N_{G_p}$, де N_{G_p} — нециклічна норма підгрупи G_p , та теореми 2.3.2 випливає, що G_p — група типу:

$$G_p = \langle x \rangle \langle b \rangle,$$

де $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m > 1$, $k \geq m + r$, $Z(G) = \langle x^{p^{r+1}} \rangle \times \langle b^{p^{r+1}} \rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}} b^{p^{m-1}t}$, $(s, p) = 1$, $x^{p^r} = a \in P$.

За лемою 2.5.2 усі силовські p' -підгрупи групи G циклічні. Позначимо $\langle y \rangle$ довільну силовську p' -підгрупу групи G і розглянемо групу

$$G_1 = P \cdot \langle y \rangle.$$

Оскільки $\omega(P) \triangleleft G$ та $\langle x^{p^{k-1}} \rangle \triangleleft G$, то за теоремою Машке

$$\omega(P) = \langle x^{p^{k-1}} \rangle \times \langle b_1 \rangle,$$

де $\langle b_1 \rangle$ — y -інваріантна підгрупа. Якщо $[b_1, y] \neq 1$, то підгрупа $\langle b_1, y \rangle$ нециклічна і тому

$$[P, \langle y \rangle] \subseteq \langle b_1, y \rangle \bigcap P = \langle b_1 \rangle.$$

Але тоді $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$, що суперечить припущенню. Аналогічно переко-
нуємось, що $[x^{p^{k-1}}, y] = 1$. Отже,

$$[\omega(P), \langle y \rangle] = E, \omega(P) \times \langle y \rangle \triangleleft G_1$$

і $[P, \langle y \rangle] = E$.

Покладемо $C = C_G(P)$. Оскільки

$$C \bigcap P = C \bigcap G_p = \langle a^p, b^p \rangle \triangleleft G,$$

то $C = \langle a^p, b^p \rangle \times \langle y \rangle$. Враховуючи інваріантність підгрупи C в G , одержимо $\langle y \rangle \triangleleft G$ і за теоремою Шура

$$G = \langle y \rangle \rtimes G_2.$$

Тоді $[x, y] \neq 1$ і $\langle x, y \rangle$ — нециклічна, а значить нормальна в G підгрупа. Звідси

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle \bigcap G_2 \triangleleft G_2$$

і $t = 0$. За лемою 5.10 [157]

$$\langle y \rangle = \langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle,$$

де

$$\langle y_1 \rangle = [\langle y \rangle, G], \langle y_2 \rangle = \langle y \rangle \cap Z(G).$$

Тому

$$G = \langle y_1 \rangle \rtimes G_p \times \langle y_2 \rangle,$$

$$x^{-1}y_1x = y_1^\beta, (\beta - 1, p|y_1|) = 1 \text{ і } \beta^{p^l} \equiv 1 \pmod{|y_1|}, 1 \leq l \leq r.$$

Оскільки $[x, y_1] \neq 1$, $[xb, y_1] \neq 1$, то $\langle y_1 \rangle \rtimes \langle xb \rangle$ — нециклічна підгрупа і $P \subseteq N_G(\langle y_1, xb \rangle)$. Значить $k > m + r$ і G — група типу 5) теореми 2.5.3. \square

Лема 2.5.11. *Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Якщо силовська p -підгрупа P нециклічної норми N_G є групою типу*

$$P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n, n \geq 2, |b| = 2^m, m > 1, m = n, n > 2, [a, b] = a^{2^{n-1}},$$

то G — група типу 5) теореми 2.5.3 при $p = 2$.

Доведення. Нехай $m > n \geq 2$. За лемою 2.1.1 з умови $P \subseteq N_{G_2}$ та теореми 2.4.2 випливає, що $n = 2$ і

$$G_2 = \langle x \rangle \rtimes H,$$

де $|x| = 2l$, $H = \langle a, c \rangle$ — група кватерніонів, $[\langle x \rangle, H] \subseteq \langle x^{2^{l-1}} \rangle$, $l > 2$ і $l > 3$, якщо $[\langle x \rangle, H] \neq E$. При цьому

$$P = \langle y \rangle \rtimes \langle cx^{2^k} \rangle,$$

де $k \leq l$, якщо $[\langle x \rangle, H] = 1$ і $k < l$, якщо $[\langle x \rangle, H] \neq E$.

Враховуючи лему 2.5.2, позначимо $\langle y \rangle$ — довільну силовську $2'$ -підгрупу групи G . Оскільки $\omega(P) \triangleleft G$, то використовуючи теорему Машке неважко довести, що $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$, звідки $\langle y \rangle \triangleleft \langle y \rangle \cdot P$ і

$$\langle y \rangle \subseteq C = C_G(P).$$

Зазначимо, що

$$C \cap G_2 = Z(G_2) = \langle x^2, H^2 \rangle$$

і розглянемо фактор-групу $C/\omega(P) = \overline{C}$.

Нехай $\overline{Z(G_2)} \triangleleft \overline{C}$. Тоді \overline{C} — абелева група і $\langle y \rangle \triangleleft G$. Оскільки G ненільпотентна, то $[x, y] \neq 1$. Тому $\langle y \rangle \rtimes \langle ax \rangle$ — нециклічна підгрупа, що неможливо, бо $cx^{2^k} \notin N_G(\langle y, ax \rangle)$.

Отже, $\overline{Z(G_2)} \not\triangleleft \overline{C}$. За теоремою 9.4.3 [151] \overline{C} — метациклічна група і

$$\overline{C}' = \langle \bar{y}_1 \rangle, (|\bar{y}_1|, 2) = 1.$$

Зрозуміло, що $\langle y_1 \rangle \triangleleft G$ і $[y_1, x] \neq 1$. Але у такому випадку

$$P \not\subseteq N_G(\langle y_1 \rangle \rtimes \langle xa \rangle),$$

всупереч умові. Отже, цей випадок неможливий і далі вважаємо, що $m \leq n$.

За теоремою 2.4.2 з умови $P \subseteq N_{G_2}$ випливає, що

$$G_2 = \langle x \rangle \langle b \rangle,$$

де $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, $m > 1$, $k \geq m + r$, $Z(G) = \langle x^{2^{r+1}} \rangle \times \langle b^{2^{r+1}} \rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}} b^{2^{m-1}}$, $(s, p) = 1$, і $k > 2m - 1$, $t = 0$ при $m = 2$.

Без порушення загальності міркувань будемо вважати, що $x^{p^r} = a \in P$. Повторюючи міркування, проведені у доведенні попередньої лема, переко-нуємось, що $\langle y \rangle \triangleleft G$ і G — група типу 5) теореми 2.5.3 при $p = 2$. \square

Лема 2.5.12. *Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Якщо си-ловська 2-підгрупа P нециклічної норми N_G є групою типу*

$$P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 4, |b| = 4, [a, b] = a^2,$$

то G — група типу 6) теореми 2.5.3.

Доведення. Враховуючи лему 2.5.2, позначимо $\langle y \rangle$ — довільну силовську 2'-підгрупу групи G . Тоді, використовуючи теорему Машке до підгрупи

$$\omega(P) = \langle a^2, b^2 \rangle \triangleleft G,$$

де $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, одержимо $[\omega(P), \langle y \rangle] = E$, звідки $\langle y \rangle \triangleleft P \langle y \rangle$ і

$$\langle y \rangle \subseteq C = C_G(P).$$

Нехай G_2 — силовська 2-підгрупа групи G . З умови $P \subseteq N_{G_2}$ та теореми 2.4.2 випливає, що G_2 — група одного з типів:

1) $G_2 = \langle x \rangle \rtimes H$, де $|x| = 2^k$, $H = \langle a, d \rangle$ — група кватерніонів, $[\langle x \rangle, H] \subseteq \langle x^{2^{k-1}} \rangle$, $k \geq 2$ і $k > 3$, якщо $[\langle x \rangle, H] \neq 1$, $P = \langle a \rangle \rtimes \langle dx^{2^{k-2}} \rangle$, $b = dx^{2^{k-2}}$;

2) $G_2 = H \rtimes Q$, де $Q = \langle a, d \rangle$ — група кватерніонів, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 2^k$, $|h_2| = 4$, $h_2^2 = h_1^{2^{k-1}}$, $h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1}$, $[\langle a \rangle, H] = E$, $[d, h_1] = 1$, $[d, h_2] = h_2^2$, $P = \langle a \rangle \rtimes \langle h_1^{2^{k-2}} d \rangle$, $b = dh_1^{2^{k-2}}$.

Розглянемо кожен з випадків окремо.

1. Нехай G_2 — група типу 1). Оскільки $C \triangleleft G$ і фактор-група $C/\omega(P) \cong \overline{C}$ має циклічні силовські підгрупи, то за теоремою 9.4.3 [151] вона розв'язна і без порушення загальності

$$\overline{C} = \langle \bar{x}_1 \rangle \langle \bar{y} \rangle,$$

де $\langle \bar{x}_1 \rangle = \bar{G}_2 \cap \overline{C}$.

Якщо $\langle \bar{x}_1 \rangle \triangleleft \overline{C}$, то \overline{C} — абелева група, звідки

$$\langle y \rangle \omega(P) \triangleleft C, \langle y \rangle \triangleleft C$$

і $\langle y \rangle \triangleleft G$. Неважко переконатися, що $P \not\subseteq N_G(\langle y \rangle \rtimes \langle xd \rangle)$, всупереч співвідношенню $P \subseteq G_2$.

Отже, враховуючи циклічність силовських $2'$ -підгруп, можна вважати, що $\langle \bar{y} \rangle \triangleleft \bar{C}$. За доведеним

$$\langle y \rangle \times \omega(G) \triangleleft C$$

і тому $\langle y \rangle \triangleleft G$, оскільки вона є характеристичною підгрупою групи. З умови леми робимо висновок, що $[y, x_1] \neq 1$, тому $\langle y \rangle \rtimes \langle x_1 a \rangle$ — нециклічна підгрупа. Але, як і у попередньому випадку

$$P \not\subseteq N_G(\langle y \rangle \rtimes \langle x_1 \rangle),$$

що неможливо. Випадок 1) розглянуто повністю.

2. Нехай $G_2 = CP$ — група типу 2). За доведеним вище $\langle y \rangle \leq C$ і

$$C \cap G_2 = H \times \langle a^2 \rangle.$$

Нехай $\langle y_q \rangle$ — довільна силовська q -підгрупа з $\langle y \rangle$. Візьмемо будь-який елемент $g \in N_C(\langle y_q \rangle)$, такий що $[y_q, g] \neq 1$. Враховуючи циклічність силовських $2'$ -підгруп групи G та розв'язність підгрупи C , можна вважати, що

$$g \in C \cap G_2.$$

Очевидно, що $g \notin \omega(P)$. Тому при $g = h_2 a^{2k}$ одержимо

$$b = dh_1^{2^{k-2}} \notin N_G(\langle y_q \rangle \rtimes \langle ga \rangle),$$

що неможливо. Отже, $g = h_1 a^{2k}$, але $a \notin N_G(\langle y_q, gb \rangle)$, що також неможливо. З цього слідує, що будь-яка силовська q -підгрупа $\langle y_q \rangle$ належить центру свого нормалізатора у і за теоремою Бернсайда є інваріантно доповнюваною. Застосовуючи цю теорему кілька разів, приходимо до висновку, що

$$C = (C \cap G_2) \rtimes \langle y \rangle.$$

Розглянемо фактор-групу $C/\langle a^2 \rangle = \tilde{C}$. Якщо, $|\tilde{H}| > 8$ то оскільки фактор-група $\tilde{C}/C_{\tilde{C}}(\tilde{H})$ ізоморфна деякій підгрупі групи $Aut(\tilde{H})$, а остання є 2-групою, одержимо $[\tilde{H}, \langle \tilde{y} \rangle] = \tilde{E}$. У такому випадку $G_2 \triangleleft G$, $\langle y \rangle \triangleleft G$ і G — нільпотентна група, що неможливо за умовою.

Отже, $|\tilde{H}| = 8$. Тоді з умови

$$Aut(\tilde{H}) \cong S_4$$

впливає, що $|\tilde{y}| = 3k$ і $\tilde{y}^3 \in Z(\tilde{C})$. Переходячи до прообразів, покладемо

$$y^{-1} h_1 y = h_2 a^{2t}, y^{-1} h_2 y = h_1 h_2 a^{2t}.$$

Отже, у цьому випадку G — група типу 6) теореми 2.5.3. □

Перейдемо до вивчення непримарних груп, що мають ненільпотентну нециклічну норму.

Лема 2.5.13. *Якщо нециклічна норма N_G скінченної групи G є групою одного з типів 3)–5) твердження 2.1.3, то*

$$G = P \cdot \langle c \rangle,$$

де P – силовська p -підгрупа групи N_G і

$$P \cap \langle c \rangle \subseteq P \cap Z(N_G).$$

Доведення. Нехай група G та її нециклічна норма N_G задовольняють умови леми.

Позначимо P – силовську p -підгрупу норми N_G . Оскільки $P \triangleleft G$, то за [46] існує така підгрупа C , що $G = P \cdot C$, причому

$$P \cap C \subseteq Z(N_G).$$

Припустимо, що C – нециклічна підгрупа. Тоді, якщо N_G є групою типу 3) або 4) твердження 2.1.3 з умови

$$P \cap C \subseteq P \cap Z(N_G) = E$$

та інваріантності підгрупи C у G випливає, що

$$G = P \times C.$$

Звідси $P \subseteq Z(N_G)$, що неможливо за будовою групи N_G .

Нехай N_G є групою типу 5) твердження 2.1.3. Тоді

$$P \cap C \subseteq Z(N_G) = \langle a_1 \rangle.$$

Оскільки $C \triangleleft G$ і $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, то $[\langle a^2 \rangle, C] = E$ і $a^2 \in Z(G)$, що суперечить визначальним співвідношенням підгрупи N_G . Отже, група $C = \langle c \rangle$ циклічна і

$$G = P \cdot \langle c \rangle.$$

Якщо N_G є групою типів 3) або 5) твердження 2.1.3, то враховуючи, що $P \cap Z(N_G) = E$, та використовуючи теорему Шура та [46], одержимо

$$G = P \rtimes \langle c \rangle.$$

Лему доведено. □

Теорема 2.5.4. *Будь-яка локально скінченна група G з ненільпотентною нециклічною нормою N_G скінченна, збігається з N_G та є групою одного з типів 3)–6) твердження 2.1.3.*

Доведення. Достатність умов теореми очевидна, тому будемо доводити лише їх необхідність.

Нехай досліджувана група G та її нециклічна норма N_G задовольняють умову теореми. Тоді N_G є групою одного з типів 3)–6) твердження 2.1.3 і $|G| < \infty$ за наслідком 2.5.1.

Розглянемо кожен з вказаних для підгрупи N_G випадків окремо.

1. Нехай нециклічна норма N_G є групою типу 3) твердження 2.1.2. За лемою 2.5.13

$$G = P \rtimes \langle c \rangle,$$

де $P = \langle a \rangle$, $|a| = p \neq 2$. Оскільки кожна нециклічна підгрупа групи G містить $\langle a \rangle = G'$, то $G \in \overline{H}$ -групою і $G = N_G$.

2. Нехай група G має нециклічну норму N_G типу 4) твердження 2.1.3. З доведення леми 2.5.13 випливає, що

$$G = P \rtimes \langle c \rangle,$$

де $P = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_i| = p$, $i = 1, 2$. Покажемо, що $(|c|, p) = 1$. Справді, інакше існує елемент $c_1 \in \langle c \rangle$, $|c_1| = p$.

Розглянемо підгрупу $G_1 = P \rtimes \langle c_1 \rangle$. Оскільки $P \triangleleft G_1$, то

$$Z(G_1) \cap P \neq E.$$

Не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $a_1 \in Z(G_1)$. Тоді

$$\langle a_1, c_1 \rangle \triangleleft G_2 = \langle c_1 \rangle N_G,$$

звідки $P \triangleleft G_2$ і

$$\langle a_1, c_1 \rangle \cap P = \langle a_1 \rangle \triangleleft G_2.$$

Останнє суперечить тому, що P — мінімальна нормальна підгрупа групи N_G . Отже, $(|c|, p) = 1$ і P є силовською p -підгрупою групи G .

Стверджуємо, що P міститься у кожній нециклічній підгрупі групи G . Справді, якщо існує нециклічна підгрупа $M \not\subseteq P$, то з умов $M \triangleleft MN_G$ і $P \triangleleft MN_G$ випливає, що перетин $P \cap M \neq E$ є нормальною підгрупою норми N_G . Це неможливо. Тому $P = G'$ міститься у кожній нециклічній підгрупі групи G , $G \in \overline{H}$ -групою і знову $G = N_G$.

3. Нехай N_G є групою типу 5) твердження 2.1.3. За лемою 2.5.13

$$G = P \cdot \langle c \rangle,$$

де $P = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = p^n$, $n \geq 1$, $|a_2| = p \neq 2$ і $P \cap \langle c \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle$. Позначимо $\langle c_1 \rangle$ — силовську p -підгрупу групи $\langle c \rangle$. Тоді

$$\langle c \rangle = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle,$$

де $(|c_2|, p) = 1$ і

$$G = P\langle c \rangle = (P\langle c_1 \rangle)\langle c_2 \rangle.$$

Оскільки група $G_p = P\langle c_1 \rangle$ є силовською p -підгрупою групи G і $G_p \triangleleft G$, то за теоремою Шура

$$G = G_p \rtimes \langle c_2 \rangle.$$

Доведемо, що $P = G_p$. Припустимо протилежне. Тоді група G_p містить елемент x , що не належить P . Стверджуємо, що $|x| > p$. Справді, інакше

$$\langle x, a_1^{p^{n-1}} \rangle \triangleleft G_1 = N_G \rtimes \langle x \rangle,$$

$\langle x, a_2 \rangle \triangleleft G_1$ і $\langle x \rangle \triangleleft G_1$. Звідси

$$G_1 = N_G \times \langle x \rangle = N_{G_1},$$

що неможливо для \overline{H} -груп (див. [113], лема 1.2). Отже, $|x| > p$.

Позначимо $\omega(P) = \langle a_1^{p^{n-1}}, a_2 \rangle$ і покажемо, що

$$\langle x \rangle \bigcap \omega(P) = \langle a_1^{p^{n-1}} \rangle.$$

Припустимо, що це не так. Тоді

$$\langle x, a_1^{p^{n-1}} \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G,$$

звідки

$$[\langle x \rangle, N_G] \subseteq \langle x, a_1^{p^{n-1}} \rangle \bigcap N_G = \omega(P)$$

і $[\langle x \rangle, N_G] = E$, всупереч циклічності центра $Z(N_G)$. Отже, елемент $a_1^{p^{n-1}}$ міститься у кожній циклічній підгрупі складеного порядку з G_p і за твердженням 2.1.2 фактор-група $G_p/\langle a_2 \rangle$ циклічна. Тоді

$$G_p = \langle x_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$$

— абелева група, оскільки $a_2 \in Z(G_p)$. За теоремою Машке без порушення загальності міркувань, будемо вважати, що $\langle x_1 \rangle \triangleleft G$. Тому, якщо $[x_1, c_2] \neq 1$, то

$$[P, \langle c_2 \rangle] \subseteq P \bigcap \langle x_1, c_2 \rangle = \langle a_1 \rangle \neq \langle a_2 \rangle.$$

Отже, $[x_1, c_2] = 1$ і $x_1 \in Z(G)$, що неможливо, бо $x_1 \notin N_G$.

Таким чином, $G_p = P$. Оскільки

$$G' \subseteq P \bigcap \langle a_2 \rangle \rtimes \langle c_2 \rangle = \langle a_2 \rangle,$$

то $a_1 \in Z(G)$ і кожна нециклічна підгрупа з G містить $\langle a_2 \rangle = G'$. Отже, G є \overline{H} -групою і $G = N_G$.

4. Нехай G має нециклічну норму N_G , що є групою типу 6) твердження 2.1.3. Позначимо G_2 — довільну силовську 2-підгрупу групи G . Зрозуміло, що $H \subseteq G_2$, $H \triangleleft G_2$ де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів з N_G .

Припустимо, що існує інволюція $x \in G_2 \setminus H$. Тоді

$$\langle x, h_1^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G.$$

Застосовуючи теорему Машке до підгрупи $\langle x, h_1^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де b — нецентральный елемент підгрупи N_G , $(|b|, 2) = 1$, та враховуючи, що $[h_1^2, b] = 1$, приходимо до висновку, що $b \in C_{G_1}(\langle x, h_1^2 \rangle)$. Звідси

$$\langle x, h_1^2 \rangle \times \langle b \rangle \triangleleft G_1$$

і $\langle b \rangle \triangleleft G_1$ як нормальна холловська підгрупа групи $\langle x, h_1^2 \rangle \times \langle b \rangle$. Це неможливо, оскільки суперечить будові групи N_G . Отже, h_1^2 — єдина інволюція групи G_2 і за твердженням 2.1.2 G_2 є кватерніонною 2-групою. З умови $H \triangleleft G$ випливає, що $|G_2| \in \{2^3, 2^4\}$.

Припустимо, що G_2 є узагальненою групою кватерніонів порядку 24. Відомо, що група автоморфізмів узагальненої групи кватерніонів порядку більше, ніж 8 є 2-групою. Тому $[G_2, \langle b \rangle] = E$, що неможливо за $[H, \langle b \rangle] \neq E$. Отже, $G_2 = H$.

За теоремою Шура з умови $H \triangleleft G$ випливає, що

$$G = H \rtimes C$$

і $C = \langle c \rangle$ — циклічна підгрупа. Справедливість останнього твердження випливає зі співвідношення $H \subseteq N_G$ та означення підгрупи N_G .

Оскільки $\text{Aut} H \cong S_4$, то $(|c|, 3) \neq 1$. Тоді з умови

$$\langle c^3 \rangle = \langle c \rangle \bigcap Z(G)$$

робимо висновок, що $G = N_G$. □

Наслідок 2.5.2. *Якщо локально скінченна група G містить неінваріантну нециклічну підгрупу, то її нециклічна норма N_G нільпотентна класу не вище 2.*

Безпосередньо з теорем 2.3.1, 2.3.2, 2.4.2, 2.5.3, 2.5.4 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.5.3. *Будь-яка локально скінченна група, що має недедекіндову нециклічну норму N_G , розв'язна, і ступінь її розв'язності не перевищує 3.*

2.6 Неперіодичні майже локально розв'язні групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп

У цьому підрозділі будемо розглядати неперіодичні майже локально розв'язні групи, що мають недедекіндову норму нециклічних підгруп. Властивості таких підгруп досліджувалися авторами в роботі [125].

Наступне твердження дає достатні умови дедекіндовості нециклічної норми в неперіодичних майже локально розв'язних групах.

Лема 2.6.1. *Нециклічна норма N_G неперіодичної майже локально розв'язної групи G дедекіндова, якщо виконується хоча б одна з умов:*

- 1) *нециклічна норма N_G групи G періодична;*
- 2) *група G містить циклічну N_G -допустиму підгрупу $\langle g \rangle$, що задовольняє умову $\langle g \rangle \cap N_G = E$;*
- 3) *група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2.*

Доведення. 1. Нехай N_G — періодична недедекіндова група. Візьмемо елемент $x \in G$, такий що $|x| = \infty$ і розглянемо групу

$$G_1 = \langle x \rangle N_G.$$

Виходячи з опису періодичних негамільтонових \overline{H} -груп (твердження 2.1.4), до яких відноситься норма N_G , остання містить скінченну характеристичну підгрупу M . Тоді $M \triangleleft G_1$, $C_{G_1}(M) \triangleleft G_1$ і

$$[G_1 : C_{G_1}(M)] < \infty.$$

Отже, існує елемент $x_1 \in \langle x \rangle$, $|x_1| = \infty$, для якого $[\langle x_1 \rangle, M] = E$. Але тоді $\langle x_1, M \rangle$ — нециклічна, а отже N_G -допустима підгрупа.

Нехай $|M| = m$, тоді підгрупа $\langle x_1^m \rangle$ також буде N_G -допустимою. Оскільки

$$[\langle x_1^m \rangle, N_G] \subseteq \langle x_1^m \rangle \cap N_G = E,$$

то для довільного елемента $a \in N_G$ підгрупа $\langle a, x_1^m \rangle$ — абелева нециклічна і тому N_G -допустима. Але тоді для довільного натурального числа k

$$\langle a \rangle = \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle a, x_1^{km} \rangle \cap N_G \triangleleft N_G,$$

звідки N_G — дедекіндова група.

2. Нехай $\langle g \rangle$ — циклічна підгрупа, що задовольняє умову 2) леми. Припустимо, що норма N_G недедекіндова. За доведеним вище вона неперіодична і тому є негамільтоновою \overline{H} -групою одного з типів 1)–3) твердження 2.1.4.

Оскільки

$$[\langle g \rangle, N_G] \subseteq \langle g \rangle \cap N_G = E,$$

то для довільного елемента $x \in N_G, |x| = \infty$, підгрупа $\langle g, x \rangle$ — абелева нециклічна. Звідси

$$\langle g, x \rangle \cap N_G = \langle x \rangle \triangleleft N_G$$

і в нормі N_G нормальними є усі нескінченні циклічні підгрупи, що суперечить властивостям підгрупи N_G .

3. Припустимо, що група G містить вільну абелеву підгрупу

$$A = \langle x \rangle \times \langle y \rangle,$$

де $|x| = |y| = \infty$, а її нециклічна норма N_G — недедекіндова. Тоді за доведеним вище N_G — неперіодична \overline{H} -група, яка є групою одного з типів 1)–3) твердження 2.1.4. Оскільки норма N_G не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, можна вважати, що $\langle x \rangle \cap N_G = E$.

Враховуючи, що для довільного натурального числа k підгрупа $\langle x, y^k \rangle$ є N_G -допустимою, N_G -допустимою буде й підгрупа

$$\langle x \rangle = \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle x, y^k \rangle.$$

За пунктом 2) даної теореми підгрупа N_G дедекіндова. □

Наслідок 2.6.1. *Якщо норма N_G нециклічних підгруп неперіодичної майже локально розв'язної групи G недедекіндова, то кожна нециклічна підгрупа та кожна нормальна в G циклічна підгрупа мають з нормою N_G неединичний перетин.*

Далі будемо розглядати неперіодичні майже локально розв'язні групи, в яких нециклічна норма недедекіндова. Наведена нижче лема стверджує, що центр таких груп містить елементи нескінченного порядку.

Лема 2.6.2. *Якщо неперіодична майже локально розв'язна група G має недедекіндову норму нециклічних підгруп N_G , то центр $Z(G)$ групи G неперіодичний.*

Доведення. Нехай група G має недедекіндову нециклічну норму N_G . Тоді за лемою 2.6.1 N_G — неперіодична \overline{H} -група. З опису таких груп випливає, що N_G є групою одного з типів 1)–3) твердження 2.1.4.

Позначимо Z — такий натуральний степінь центра $Z(N_G)$, що не містить відмінних від одиниці елементів скінченного порядку. Тоді Z — нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі двійкових дробів. Покажемо, що $Z \subseteq Z(G)$.

Нехай $x \in G, |x| < \infty$. Тоді

$$\langle x, Z^{p^k} \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

для простого числа $p \neq 2$ і довільного натурального числа k . Тому

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \langle Z^{p^k}, x \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$$

і $[\langle x \rangle, Z] \subseteq Z \cap \langle x \rangle = E$.

Доведемо, що підгрупа Z централізує й кожен елемент $x \in G$ нескінченного порядку. Припустимо, що

$$\langle x \rangle \bigcap Z = E.$$

Оскільки $Z \triangleleft G$, то підгрупи $\langle x, Z \rangle$ і $\langle x, T(N_G) \rangle$, де $T(N_G)$ — періодична частина норми N_G , нециклічні, а значить, N_G -допустимі. Тоді N_G -допустимою буде й підгрупа

$$\langle x \rangle = \langle x, Z \rangle \bigcap \langle x, T(N_G) \rangle.$$

З цього слідує, що

$$[\langle x \rangle, N_G] = E$$

і G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2. За лемою 2.6.1 норма N_G має бути дедекіндовою, що неможливо. Отже,

$$\langle x \rangle \bigcap Z \neq E.$$

Нехай $z \in Z$. Покладемо $x^{-1}zx = z_1, z_1 \in Z$. Виходячи з локальної циклічності групи Z , маємо $z^n \in \langle x \rangle$ для деякого натурального числа n . Звідси

$$x^{-1}z^n x = z_1^n = z^n, z = z_1$$

і $[x, z] = 1$. Отже, $Z \subseteq Z(G)$, що й треба було довести. \square

Наслідок 2.6.2. *Неперіодична майже локально розв'язна група G , що має дедекіндову нециклічну норму N_G , не містить скінченних абелевих нециклічних підгруп.*

Доведення. Нехай A — скінченна абелева нециклічна підгрупа групи G . Припустимо, що всупереч умові нециклічна норма N_G даної групи недедекіндова. Тоді за лемою 2.6.1 вона є неперіодичною \overline{H} -групою одного з типів 1)–3) твердження 2.1.4.

Оскільки за лемою 2.6.2 центр $Z(G)$ групи неперіодичний, то для довільного елемента $a \in A, a \neq 1$ підгрупа $\langle a, z \rangle$, де $z \in Z(G), |z| = \infty$ є нециклічною, а значить N_G -допустимою. З цього слідує, що N_G -допустимою буде й підгрупа $\langle a \rangle$.

Враховуючи твердження 2.1.4 маємо $A \not\subseteq N_G$. Тому завжди можна вказати елемент $x \in A$ такий, що

$$\langle x \rangle \cap N_G = E.$$

Оскільки підгрупа $\langle x \rangle \in N_G$ -допустимою, то нециклічна норма N_G дедекіндова за лемою 2.6.1. Протиріччя. \square

Наступне твердження описує будову неперіодичних майже локально розв'язних груп, в яких нециклічна норма недедекіндова. Як буде доведено нижче, групи з такою властивістю вичерпуються \overline{H} -групами, що узагальнює результати робіт [118], [119] та [113].

Теорема 2.6.1. *Неабелева неперіодична майже локально розв'язна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову нециклічну норму N_G , коли усі нециклічні підгрупи групи G є її нормальними підгрупами. При цьому $G = N_G$.*

Доведення. Достатність умов теореми не потребує доведення, тому доводити будемо лише їх необхідність.

Припустимо, що норма N_G містить усі елементи нескінченного порядку групи G . Покажемо, що у цьому випадку вона містить також усі елементи скінченного порядку, тобто $G = N_G$.

Нехай $x \in G$ — довільний елемент скінченного порядку. За лемою 2.6.2 центр групи містить елементи нескінченного порядку. Нехай $z \in Z(G)$ і $|z| = \infty$. Тоді $|zx| = \infty$ і за припущенням $zx \in N_G$ і $x \in N_G$. Отже, у цьому випадку $G = N_G$.

Далі будемо вважати, що група G містить елементи нескінченного порядку, що не належать нормі N_G . Покажемо, що за таких умов фактор-група G/N_G періодична. Припустимо, що це не так. Тоді існує елемент $x \in G \setminus N_G$ нескінченного порядку, для якого $\langle x \rangle \cap N_G = E$.

Розглянемо групу

$$G_1 = N_G \rtimes \langle x \rangle.$$

Оскільки норма N_G недедекіндова, то за лемою 2.6.1 вона неперіодична і є \overline{H} -групою одного з типів твердження 2.1.4:

1) $N_G = H \times B$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, B — нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі двійкових дробів;

2) $N_G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 1$, $|b| = \infty$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$ і $n > 1$, якщо $p = 2$

Очевидно, що в обох випадках комутант $N'_G = M$ норми N_G скінченний. Тому

$$[G_1 : C_{G_1}(M)] < \infty$$

і $x^k \in C_{G_1}(M)$ для деякого натурального числа k . Оскільки підгрупа $\langle x^k, M \rangle$ нециклічна, вона є N_G -допустимою, а значить N_G -допустимою буде й підгрупа $\langle x^{mk} \rangle$, де $|M| = m$. За лемою 2.6.1 норма N_G має бути дедекіндовою, що неможливо за умовою. Отже, фактор-група G/N_G періодична.

Враховуючи, що група G належить до класу майже локально розв'язних груп, з останнього зауваження також випливає, що фактор-група G/N_G локально скінченна, а норма N_G є неперіодичною \overline{H} -групою одного з двох типів, що вказані вище.

Позначимо через Z найменший натуральний степінь центра $Z(N_G)$, що не містить відмінних від одиниці елементів скінченного порядку. З доведення леми 2.6.2 випливає, що

$$Z \subseteq Z(G).$$

Враховуючи, що фактор-група G/Z локально скінченна та використовуючи твердження 3.9 роботи [153] і пункт 3) леми 2.6.1, робимо висновок, що періодична частина $T(G)$ групи G локально скінченна, а $G/T(G)$ — абелева група без скруту рангу 1.

Розглянемо два випадки у залежності від будови групи N_G .

1) Нехай група G має нециклічну норму N_G типу 1), що вказаний вище.

Покажемо, що усі елементи скінченного порядку групи G містяться в нециклічній нормі, тобто

$$T(G) = T(N_G).$$

Припустимо, що це не так і розглянемо підгрупу $G_1 = N_G \langle x \rangle$, де $x \in T(G) \setminus (N_G)$. Оскільки $[G_1 : N_{G_1}] < \infty$ і підгрупа N_G недедекіндова, то за теоремою 2.2.4 маємо $G_1 = N_{G_1}$. Останнє суперечить будові неперіодичних \overline{H} -груп. Отже,

$$T(G) = T(N_G) = H,$$

де H — група кватерніонів.

Розглянемо взаємний комутант $[G, H]$. Якщо $x \in H$, то

$$[\langle x \rangle, H] \subseteq \langle h_1^2 \rangle.$$

Нехай $x \in G \setminus H$. Тоді $\langle x, h_1^2 \rangle$ — нециклічна підгрупа, й тому

$$[\langle x \rangle, H] \subseteq H \cap \langle x, h_1^2 \rangle = \langle h_1^2 \rangle.$$

Отже, $[G, H] \subseteq \langle h_1^2 \rangle$ і $\langle h \rangle \triangleleft G$ для довільного елемента $h \in H$. З цього, зокрема, випливає, що

$$[G : C_G(\langle h_1 \rangle)] = [G : C_G(\langle h_2 \rangle)] = 2,$$

тому $[G : C_G(H)] = 4$ і

$$G = H \cdot C_G(H).$$

Враховуючи тепер, що G/H — локально циклічна група і

$$G/H = HC_G(H)/H \cong C_G(H)/H \bigcap C_G(H) = C_G(H)/\langle h_1^2 \rangle,$$

робимо висновок, що група $C_G(H)/\langle h_1^2 \rangle$ також локально циклічна.

Покажемо, що повний прообраз цієї групи — абелева група. Справді, нехай $x, y \in C_G(H)$, $|x| = |y| = \infty$. Оскільки фактор-група $\langle x, y, h_1^2 \rangle / \langle h_1^2 \rangle$ циклічна, то підгрупа $\langle x, y, h_1^2 \rangle$ — абелева і $[x, y] = 1$. Отже, підгрупа $C_G(H)$ — абелева і

$$C_G(H) = \langle h_1^2 \rangle \times C,$$

де C — абелева група без скруту ранга 1. Але у такому випадку $C \subseteq Z(G)$, $[G : Z(G)] < \infty$ і за теоремою 2.2.4 $G = N_G$, що й треба було довести.

2) Нехай нециклічна норма $N_G \in \overline{H}$ -групою типу 2).

За доведеним вище періодична частина $T(G)$ групи G локально скінченна. Припустимо, що $T(G)$ містить елемент x простого порядку, що не належить нормі N_G . За лемою 2.6.2 центр групи $Z(G)$ неперіодичний. Тоді для $z \in Z(G)$, $|z| = \infty$ і довільного натурального числа k одержимо

$$\langle x, z^k \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$$

і тому

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \langle z^k, x \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

Це означає, що підгрупа $\langle x \rangle \in N_G$ -допустимою, що неможливо за лемою 2.6.1. Отже, $T(G)$ — примарна локально скінченна група, що має єдину підгрупу простого порядку.

Припустимо, що $|T(G)| = \infty$. Тоді $T(G)$ є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи A , і $A \triangleleft G$ як характеристична підгрупа $T(G)$. Враховуючи, що

$$[A, N_G] \subseteq A \bigcap N_G \subseteq \langle a \rangle,$$

одержимо $[\langle a \rangle, N_G] = E$, що неможливо. Отже, $|T(G)| < \infty$ і $T(G)$ — примарна циклічна або узагальнена група кватерніонів.

Нехай $T(G) = \langle g \rangle$ — циклічна підгрупа. Якщо $|g| = p^k > |a|$, то для елементів $b \in N_G$, $z \in Z(G)$, $|z| = \infty$, одержимо

$$[b, zg] = [b, g] \in \langle g^{p^{k-1}}, gz \rangle \bigcap \langle g \rangle = \langle g^{p^{k-1}} \rangle.$$

Значить, $[b, g^p] = 1$ і тому $[b, a] = 1$, що неможливо за умовою. Отже,

$$T(G) = T(N_G) = \langle a \rangle.$$

Доведемо, що підгрупа $C = C_G(\langle a \rangle)$ абелева. Справді, якщо $x, y \in C$, то з локальної циклічності фактор-групи

$$G/T(G) = G/\langle a \rangle$$

випливає, що фактор-група $\langle x, y, a \rangle / \langle a \rangle$ циклічна. Тому $\langle x, y, a \rangle$ — абелева група і $[x, y] = 1$. З довільності вибору елементів x та y випливає, що підгрупа C також абелева.

Отже, $C = \langle a \rangle \times C_1$, де C_1 — абелева група без скруту рангу 1. Припустимо, що підгрупа C_1 нециклічна. Тоді нециклічною буде й підгрупа $C_1^{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$ і для довільного елемента $y \in G \setminus C$ виконується

$$[y, a] \in \langle a \rangle \bigcap \langle y, C_1^{p^n} \rangle = E,$$

що неможливо за його вибором.

З цього випливає, що $C_1 = \langle c \rangle$ — нескінченна циклічна група. Враховуючи співвідношення $[G : \langle c \rangle] < \infty$ і $\langle b \rangle \bigcap \langle c \rangle \neq E$, робимо висновок, що $[c, b] = 1$. Отже, $[G : Z(G)] < \infty$ і за теоремою 2.2.4 $G = N_G$.

Розглянемо тепер випадок, коли періодична частина $T(G)$ групи G є узагальненою групою кватерніонів:

$$T(G) = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = 2^k \geq 4, |h_2| = 4, h_2^2 = h_1^{2^{k-1}}, h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1}.$$

Оскільки

$$\langle a \rangle = T(N_G) \triangleleft G,$$

то не порушуючи загальності міркувань можна вважати, що $a \in \langle h_1 \rangle$. Нехай h — довільний елемент порядку 4 з $T(G)$ і $z \in Z(G)$, $|z| = \infty$. Тоді для натурального числа m маємо

$$\langle h, z^m \rangle \triangleleft G_1 = \langle h \rangle N_G$$

і

$$\langle h \rangle = \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle z^m, h \rangle \triangleleft G_1.$$

З цього випливає, що $T(G)$ — група кватерніонів і $|a| = 4$.

Позначимо $C = C_G(a)$. Оскільки $[G : C] = 2$, то $C = T(G) \cdot C$. Враховуючи, що фактор-група

$$G/T(G) \cong C/C \bigcap T(G) = C/\langle a^2 \rangle$$

— локально скінченна і використовуючи наведені вище міркування, переконуємося, що група C абелева. Але у такому випадку $[G : Z(G)] < \infty$ і за теоремою 2.2.4 група G буде збігатися з нормою N_G , що неможливо. \square

З останньої теореми випливають наступні твердження.

Наслідок 2.6.3. *Якщо нециклічна норма N_G неперіодичної майже локально розв'язної групи G неабелева, то або N_G є групою кватерніонів, або $N_G = G$ і $G \in \overline{H}$ -групою.*

Існування неперіодичних майже локально розв'язних груп, нециклічна норма яких є групою кватерніонів, підтверджує приклад 2.1.4.

Наслідок 2.6.4. *Якщо неперіодична майже локально розв'язна група G без інволюцій містить неінваріантну нециклічну підгрупу, то її нециклічна норма абелева.*

Наслідок 2.6.5. *Довільна неперіодична майже локально розв'язна група, що має недедекіндову нециклічну норму, розв'язна степеня 2.*

ГРУПИ З НЕДЕДЕКІНДОВОЮ НОРМОЮ АБЕЛЕВИХ НЕЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП

3.1 Деякі допоміжні результати

У цьому розділі будуть вивчатися взаємозв'язки між властивостями груп та їх норм абелевих нециклічних підгруп.

Нормою абелевих нециклічних підгруп групи G називається перетин нормалізаторів N_G^A усіх абелевих нециклічних підгруп групи G за умови, що система таких підгруп у групі непорожня [135].

Зрозуміло, що в групі G , яка містить хоча б одну абелеву нециклічну підгрупу і збігається з нормою N_G^A , усі абелеві нециклічні підгрупи нормальні. Неабелеві групи з такою властивістю детально вивчалися у роботах Лимана Ф. М. (див. [113, 114, 117, 120]) та були названі \overline{HA} -групами (\overline{HA}_p -групами, якщо вони є p -групами).

Норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп є характеристичною підгрупою групи, містить центр групи, норму $N(G)$ та нециклічну норму N_G групи. Окрім того, N_G^A може бути нециклічною дедекіндовою групою або \overline{HA} -групою, або ж взагалі не містити абелевих нециклічних підгруп. Ми будемо вивчати властивості груп, в яких норма N_G^A недедекіндова і містить хоча б одну абелеву нециклічну підгрупу (тобто, є негамільтоновою \overline{HA} -групою).

У роботі [113] було встановлено, що будь-яка періодична \overline{HA} -група локально скінченна. Будову таких груп характеризують наведені нижче твердження 3.1.1 – 3.1.3 (див. [113, 114, 120]).

Твердження 3.1.1. *Будь-яка періодична \overline{HA}_p -група при $p \neq 2$ є \overline{H}_p -групою, тобто групою одного з наступних типів:*

- 1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = p^n$, $|b| = |c| = p$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$;

- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p^n$, $|b| = p^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$;
- 3) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle d \rangle$, де $|a| = |d| = 9$, $|b| = 3$, $[a, b] = 1$, $[a, d] = b$, $[b, d] = d^3 = a^{-3}$;
- 4) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, A – квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$.

Твердження 3.1.2. *Періодичні негамільтонові $\overline{HA_2}$ -групи локально скінченні і вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = 2^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{2^{n-1}}$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$;
- 3) $G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $|b| = |c| = 2$, $[h_1, h_2] = h_1^2$, $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = h_1^2$;
- 4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $|a| = |b| = |c| = 4$, $c^2 = a^2b^2$, $[c, b] = c^2$, $[c, a] = a^2$;
- 5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle \langle d \rangle$, де $|a| = |b| = |c| = |d| = 4$, $c^2 = d^2 = a^2b^2$, $[a, c] = [d, c] = a^2$, $[b, d] = b^2$, $[c, b] = [d, a] = c^2$;
- 6) $G = H \times \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $[h_1, h_2] = h_1^2$, $|c| = 2^n$, $n \geq 2$;
- 7) $G = H \times Q$, де H і Q – групи кватерніонів;
- 8) $G = (H \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = |b| = |c| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[H, \langle c \rangle] = E$, $c^2 = b^2h_1^2$, $[b, c] = b^2$;
- 9) $G = (\langle h_2 \rangle \times \langle c \rangle) \langle h_1 \rangle$, де $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $|c| = 2^n > 2$, $[c, h_1] = c^{2^{n-1}}$;
- 10) $G = (H \times \langle a \rangle) \langle b \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|a| = 2$, $|b| = 8$, $[a, b] = [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $b^2 = h_1$, $[h_2, b] = a$;
- 11) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, де $|a| = 2^n > 2$, $|b| = 8$, $b^4 = a^{2^{n-1}}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 12) $G = A \langle b \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 13) $G = A \langle b \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $|b| = 8$, $b^4 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 14) $G = A \times H$, A – квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $[h_1, h_2] = h_1^2$;

15) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

Таким чином, при $p \neq 2$ класи \overline{HA}_p -груп та \overline{H}_p -груп збігаються, а клас \overline{HA}_2 -груп є значно ширшим за клас \overline{H}_2 -груп. Проте, як і у випадку $p \neq 2$, будь-яка негамільтонова \overline{HA}_2 -група не містить елементарних абелевих підгруп порядку 2^3 .

Наступне твердження характеризує будову періодичних непримарних локально нільпотентних \overline{HA} -груп.

Твердження 3.1.3. *Періодична локально нільпотентна негамільтонова група G тоді і тільки тоді є \overline{HA} -групою, коли*

$$G = G_p \times B,$$

де G_p – силовська p -підгрупа групи G , що є негамільтоновою \overline{HA}_p -групою, а B – скінченна дедекіндова група, всі абелеві підгрупи якої циклічні.

Подальшу характеристизацію властивостей та будови періодичних не локально нільпотентних \overline{HA} -груп можна знайти у роботах [113, 120]. Зазначимо лише, що у нескінченному випадку періодичні \overline{HA} -групи розв'язні, проте, на відміну від \overline{H} -груп, існують скінченні нерозв'язні \overline{HA} -групи (див. приклад 2.1 [113]).

Наступне твердження дає вичерпний опис неперіодичних \overline{HA} -груп ([113, 117]).

Твердження 3.1.4. *Неперіодичні \overline{HA} -групи вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p^n$, $n \geq 1$ (при $p = 2$ $n > 1$), $|b| = \infty$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$;
- 2) $G = H \times \langle b \rangle$, де H – група кватерніонів, $|b| = \infty$;
- 3) $G = H \times B$, де H – група кватерніонів, B – нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів;
- 4) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, де A – неперіодична нециклічна абелева група без інволюцій, $|b| = 2$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 5) $G = A \langle b \rangle$, де A – неперіодична абелева група, $|b| = 4$, b^2 – єдина інволюція групи, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 6) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, де A – група, ізоморфна адитивній групі p -ових дробів, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^m$, $m = \pm p^n$, $n \geq 1$ для будь-якого елемента $a \in A$;

- 7) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, де A — нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів, $|b| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 8) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, де A — нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі p -ових дробів ($p \neq 2$), $|b| = 2p$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 9) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p \neq 2$, $|b| = 2$, $|c| = \infty$, $c^{-1}ac = a^{-1}$, $[a, b] = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$.

Розглянемо загальні властивості норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп.

Лема 3.1.1. Якщо група G містить абелеву нециклічну підгрупу M , що задовольняє умову

$$M \cap N_G^A = E,$$

то підгрупа N_G^A дедекіндова.

Доведення. Оскільки підгрупа M нормальна в групі $G_1 = M \cdot N_G^A$ і

$$[M, N_G^A] \subseteq M \cap N_G^A = E,$$

то для довільного елемента $x \in N_G^A$ маємо

$$\langle M, x \rangle \cap N_G^A = \langle x \rangle \triangleleft N_G^A.$$

З цього випливає, що норма N_G^A дедекіндова. □

Наслідок 3.1.1. Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G недедекіндова, то кожна абелева нециклічна підгрупа M має з нормою N_G^A неединичний перетин.

Лема 3.1.2. Якщо Z — центральна нециклічна підгрупа групи G , то у фактор-групі $G/Z = \overline{G}$ має місце включення

$$\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G}),$$

де $N(\overline{G})$ — норма групи \overline{G} .

Доведення. Достатньо показати, що група $\overline{N_G^A}$ нормалізує довільну циклічну підгрупу групи $\overline{G} = G/Z$.

Нехай $\overline{x} \in \overline{G}$. Тоді повний прообраз підгрупи $\langle \overline{x} \rangle$ у групі G є абелевою нециклічною підгрупою $\langle x, Z \rangle$. Тому $N_G^A \subseteq N_G(\langle x, Z \rangle)$. У фактор-групі \overline{G} маємо

$$\overline{N_G^A} \subseteq \overline{N_G(\langle x, Z \rangle)} \subseteq N_{\overline{G}}(\langle \overline{x} \rangle).$$

Отже, $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$. □

Наступні приклади показують, що рівність $\overline{N_G^A} = N(\overline{G})$ може не виконуватись.

Приклад 3.1.1. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, де $|a| = 8$, $|b| = 2$, $|c| = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

У цій групі $N_G^A = \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle$. Справді,

$$\begin{aligned} N_G^A &\subseteq N_G(\langle b, c \rangle) \cap N_G(\langle ab, c^2 \rangle) = (\langle a^4 \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle) \cap (\langle a^4 \rangle \times \langle ab \rangle \times \langle c \rangle) = \\ &= \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G). \end{aligned}$$

Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G / \langle a^4, c^2 \rangle$. Її норма

$$N(\overline{G}) = Z(\overline{G}) = \langle \bar{a}^2 \rangle \times \langle \bar{c} \rangle.$$

З іншого боку, образом норми абелевих нециклічних підгруп є група $\overline{N_G^A} = \langle \bar{c} \rangle$ і $\overline{N_G^A} \neq N(\overline{G})$.

Приклад 3.1.2. $G = (A \rtimes \langle b \rangle) \times C$, де A, C - квазіциклічні 2-групи, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in A$.

У цій групі

$$\begin{aligned} N_G(\langle b, C \rangle) &= \langle a_1 \rangle \times \langle b \rangle \times C, a_1 \in A, |a_1| = 2, \\ N_G(\langle ab, c_1 \rangle) &= \langle a_1 \rangle \times \langle ab \rangle \times C, a \in A, |a| > 2, c_1 \in C, |c_1| = 2, \\ N_G^A &\subseteq N_G(\langle b, C \rangle) \cap N_G(\langle ab, c_1 \rangle) = \langle a_1 \rangle \times C = Z(G). \end{aligned}$$

Отже,

$$N_G^A = Z(G).$$

У фактор-групі $\overline{G} = G / \langle a_1, c_1 \rangle$, норма

$$N(\overline{G}) = Z(\overline{G}) = \langle \bar{a}_2 \rangle \times \overline{C},$$

де $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$. Оскільки $\overline{N_G^A} = \overline{C}$, то $N(\overline{G}) \neq \overline{N_G^A}$.

3.2 Локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою абелевих нециклічних підгруп

У цьому підрозділі розглядаються локально скінченні p -групи (p — просте непарне число) з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Властивості таких груп досліджувалися авторами у роботах [135] та [104].

Наведемо спочатку кілька тверджень, що характеризують властивості локально скінченних p -груп, де p — довільне просте число, з вказаними вище обмеженням на норму N_G^A .

Наступна лема встановлює зв'язок між існуванням абелевих нециклічних підгруп у групі та її нормі N_G^A .

Лема 3.2.1. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп скінченної p -групи G (p — довільне просте число) недедекіндова і не містить абелевих нециклічних підгруп, то таких підгруп не містить і сама група G .*

Доведення. Нехай норма N_G^A недедекіндова і не містить абелевих нециклічних підгруп. Тоді за твердженням 2.1.2 вона є кватерніонною 2-групою порядку більше 8, тобто $N_G^A = \langle a \rangle \langle b \rangle$, де $|a| = 2^n, n \geq 3, |b| = 4, a^{2^{n-1}} = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}$.

Покажемо, що $a_1 = a^{2^{n-1}}$ — єдина інволюція групи G . Припустимо супротивне. Нехай існує елемент $x \in G \setminus N_G^A, |x| = 2$. Оскільки $a_1 \in Z(G)$, то підгрупа $\langle a_1, x \rangle$ — абелева нециклічна і тому N_G^A -допустима. Тоді

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x, a_1 \rangle \cap N_G^A = \langle a_1 \rangle.$$

Позначимо y — елемент порядку 4 з норми N_G^A такий, що $\langle y \rangle \not\subseteq N_G^A$. Якщо $[y, x] = 1$, то підгрупа $\langle x \rangle \times \langle y \rangle \in N_G^A$ -допустимою і

$$[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq (\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \cap N_G^A = \langle y \rangle.$$

Тоді $\langle y \rangle \triangleleft N_G^A$, всупереч вибору елемента y .

Таким чином, $[y, x] \neq 1$ і $[y, x] = a_1 = y^2$. Тоді $x^{-1}bx = b^{-1}, |xb| = 2$ і

$$x^{-1}abx = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

З іншого боку,

$$x^{-1}abx = (x^{-1}ax)(x^{-1}bx) = x^{-1}axb^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Тому $x^{-1}ax = b^{-1}a^{-1}b = a$ і $[x, a] = 1$. Оскільки підгрупа $\langle a_1, xb \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle xb \rangle$ — абелева нециклічна, то вона має бути N_G^A -допустимою. Проте,

$$[a, xb] = [a, b] = \langle a^2 \rangle \not\subseteq \langle a_1, xb \rangle.$$

Протиріччя. Отже, G містить єдину інволюцію $a_1 \in N_G^A$ і за твердженням 2.1.2 не містить абелевих нециклічних підгруп. \square

Нагадаємо, що поняття норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп було уведене лише для груп, в яких система абелевих нециклічних підгруп непорожня. Тому за лемою 3.2.1 дослідження локально скінченних p -груп з недедекіндовою нормою N_G^A будемо проводити за умови, що N_G^A містить хоча б одну абелеву нециклічну підгрупу, тобто N_G^A є негамільтоновою \overline{HA}_p -групою.

Доведення наступних трьох лем значною мірою спираються на опис негамільтонових \overline{HA}_p -груп та повторюють доведення аналогічних лем 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 попереднього підрозділу, що стосувалися властивостей нециклічної норми в p -групах.

Лема 3.2.2. *Локально скінченна p -група G (p — довільне просте число), що має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 .*

Лема 3.2.3. *Якщо локально скінченна p -група (p — довільне просте число) G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нижній шар $\omega(N_G^A)$ норми нециклічний та міститься у центрі $Z(G)$ групи, то $\omega(G) = \omega(N_G^A)$.*

Лема 3.2.4. *Нехай G — локально скінченна p -група (p — довільне просте число), в якій норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Якщо центр $Z(N_G^A)$ норми N_G^A локально циклічний, то елемент $a \in Z(N_G)$, $|a| = p$ міститься у кожній циклічній підгрупі складеного порядку групи G .*

Наслідок 3.2.1. *Якщо скінченна p -група G (p — довільне просте число) має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та містить нормальну циклічну підгрупу $\langle g \rangle$ порядку p^2 , то $g \in N_G^A$.*

Доведення. Нехай A — довільна абелева нециклічна підгрупа групи G . Оскільки $g^p \in Z(G)$ і за лемою 3.2.2 група G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 , то $g^p \in A$. Тоді для довільного елемента $x \in A$ маємо $[g, x] \in \langle g^p \rangle \subset A$. Отже, A — g -допустима підгрупа і $g \in N_G^A$. \square

Наслідок 3.2.2. *Нехай G — локально скінченна p -група (p — довільне просте число), в якій норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Якщо центр $Z(N_G^A)$ норми N_G^A локально циклічний, то група G не містить абелевих підгруп типу (p^2, p^2) .*

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^A задовольняють умови твердження. Оскільки центр $Z(N_G^A)$ локально циклічний, то за лемою 3.2.4 центральний елемент порядку p міститься в кожній циклічній підгрупі складеного порядку групи G , а значить, G не містить абелевих підгруп типу (p^2, p^2) . \square

Наступний результат стосується нескінченних локально скінченних p -груп, в яких норма N_G^A недедекіндова.

Лема 3.2.5. *Будь-яка нескінченна локально скінченна p -група (p — довільне просте число) G з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп є скінченням розширенням квазіциклічної p -групи A . Якщо при цьому $p \neq 2$, то $A \subseteq Z(G)$.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група і N_G^A — її норма абелевих нециклічних підгруп. За лемою 3.2.2 G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 і тому є групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп. За

основним результатом роботи [160] G — скінченне розширення повної абелевої групи P .

Нехай P містить прямий добуток двох квазіциклічних p -груп. Тоді

$$[P : P \cap N_G^A] = \infty,$$

звідки

$$PN_G^A/N_G^A \cong P/P \cap N_G^A$$

— повна абелева група. За теоремою 1.16 [153] група $G_1 = P \cdot N_G^A$ містить таку повну центральну підгрупу P_1 , що $G_1 = P_1 \cdot N_G^A$. Але тоді $G_1 = N_{G_1}^A$ і $G_1 \in \overline{HA}_p$ -групою, що суперечить їх опису. Отже, $P = A$ — квазіциклічна p -група і перше твердження леми доведене. Справедливість другого твердження випливає з наслідку 1.13 [153]. \square

Наслідок 3.2.3. *Якщо нескінченна локально скінченна p -група G не задовольняє умову мінімальності для підгруп або містить прямий добуток двох квазіциклічних p -груп, то її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп дедекіндова, а при $p \neq 2$ абелева.*

Подальші результати цього підрозділу будуть стосуватися локально скінченних p -груп з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп за умови, що $p \neq 2$. У цьому класі груп умова недедекіндовості групи еквівалентна умові неабелевості, тому будемо вважати, що норма N_G^A неабелева (і $\in \overline{HA}_p$ -групою одного з типів 1)–4) твердження 3.1.1).

Дослідимо спочатку властивості нескінченних локально скінченних p -груп ($p \neq 2$) з вказаним обмеженням на норму N_G^A .

Теорема 3.2.1. *Будь-яка нескінченна локально скінченна p -група ($p \neq 2$) G , що має неабелеву норму абелевих нециклічних підгруп, $\in \overline{HA}_p$ -групою виду*

$$G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де A — квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b,] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$ та збігається з нормою N_G^A .

Доведення. Достатність умов теореми очевидна, тому будемо доводити лише їх необхідність.

Нехай G — досліджувана група. За лемою 3.2.5 G є скінченим розширенням центральної квазіциклічної p -підгрупи. Тому норма N_G^A нескінченна і за твердженням 3.1.1 є групою виду:

$$N_G^A = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де A — квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b,] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$. Зрозуміло, що $[G : A] < \infty$ і $A \subseteq Z(G)$.

Припустимо, що $G \neq N_G^A$ і позначимо x — елемент найменшого порядку групи G , що не належить N_G^A . Якщо $|x| = p$, то підгрупа $\langle x, a_1 \rangle$ абелева нециклічна і

$$\langle x, a_1 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A,$$

де $a_1 \in A$, $|a_1| = p$.

Оскільки $[G_1 : C_{G_1}(\langle x, a_1 \rangle)] \leq p$, то в $N_G^A \setminus \langle a_1 \rangle$ можна вказати елемент y порядку p , переставний з x . Але у такому випадку група G містить елементарну абелеву підгрупу $\langle a_1, x, y \rangle$ порядку p^3 , що неможливо за лемою 3.2.2. Отже, $|x| > p$.

За вибором елемента x маємо $x^p \in N_G^A$. Покладемо $x^p = a_i b^m d^n$, де $|a_i| = p^i$, $i \geq 0$, $m, n \in \{0, 1\}$ та візьмемо такий елемент $a_{i+1} \in A$, що $a_{i+1}^p = a_i$. Оскільки за доведеним $G \setminus N_G^A$ не містить елементів простого порядку, то

$$(x a_{i+1}^{-1})^p = b^m d^n \neq 1.$$

Останнє суперечить лемі 3.2.4, бо підгрупа $\langle x a_{i+1} \rangle$ не містить центральний елемент a_1 . Отже, $G = N_G^A$ і теорему доведено. \square

Наслідок 3.2.4. *Якщо нескінченна локально скінченна p -група ($p \neq 2$) G містить неінваріантні абелеві нециклічні підгрупи, то її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп абелева.*

Наслідок 3.2.5. *Якщо нескінченна локально скінченна p -група ($p \neq 2$) G має неабелеву норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, то в G нормальні усі нециклічні, усі абелеві нециклічні, усі нескінченні та усі нескінченні абелеві підгрупи групи i*

$$N_G = N_G^A = N_G(\infty) = N_G(A_\infty) = G.$$

Доведення наслідку 3.2.5 впливає з теореми 3.2.1 та теореми 2.1 роботи [153].

Наслідок 3.2.6. *Будь-яка нескінченна локально скінченна p -група ($p \neq 2$) G , що має неабелеву норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп скінченна над центром $Z(G)$.*

Наступний приклад підтверджує, що у наслідку 3.2.6 відмовитись від неабелевості норми N_G^A не можна.

Приклад 3.2.1. $G = A\langle b \rangle$, де $A = A_1 \times A_2$ — прямий добуток двох квазіциклічних 3-груп, $|b| = 9$, $b^3 \in A$ і група A породжується елементами комутаторної сходини елемента b .

Очевидно, що всі абелеві нециклічні підгрупи даної групи містяться в A , тому $N_G^A = A$ — абелева група, $[G : N_G^A] < \infty$, проте $[G : Z(G)] = \infty$.

Наслідок 3.2.7. *Будь-яка локально скінченна p -група G ($p \neq 2$), що має власну неабелеву норму N_G^A , скінченна.*

Як зазначалося вище, клас \overline{HA} -груп є ширшим за клас \overline{H} -груп і тому в загальному випадку має місце включення $N_G \subseteq N_G^A$, де N_G — нециклічна норма групи. З іншого боку, за теоремами 2.3.1 та 3.2.1 будь-яка нескінченна локально скінченна p -група ($p \neq 2$), в якій хоча б одна з норм N_G^A чи N_G неабелева, є \overline{H}_p -групою, тобто $N_G^A = N_G$.

Виникає питання: чи співпадають вказані норми в довільній локально скінченній p -групі ($p \neq 2$)? Частково відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 3.2.2. *Якщо G — локально скінченна p -група ($p \neq 2$), нециклічна норма N_G якої неабелева, то $N_G = N_G^A$.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо $|G| = \infty$, то за теоремою 2.3.1 вона є \overline{H}_p -групою. Оскільки при $p \neq 2$ класи \overline{HA}_p - та \overline{H}_p -груп збігаються (твердження 2.1.1 та 3.1.1), то

$$G = N_G^A = N_G.$$

Нехай тепер $|G| < \infty$. Тоді G — група одного з типів 1)–3) теореми 2.3.2. Якщо G — група типу 1) теореми 2.3.2, то за твердженням 3.1.1

$$G = N_G^A = N_G.$$

Нехай G є групою типу 2) теореми 2.3.2. Тоді з умов $[G : N_G] = p$, $N_G \subseteq N_G^A$ і $G \neq N_G^A$ випливає, що $N_G^A = N_G$.

Нехай G — група типу 3) теореми 2.3.2. У цьому випадку G не є \overline{HA}_p -групою і $G \neq N_G^A$. Оскільки норма N_G нециклічних підгруп неабелева, то й норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп також неабелева. Отже, норми N_G і N_G^A є \overline{H}_p -групами та мають комутанти простого порядку. Враховуючи включення $N_G \subseteq N_G^A$ та опис \overline{H}_p -груп (твердження 2.1.1) для $p \neq 2$, робимо висновок, що і у цьому випадку вказані норми співпадають: $N_G^A = N_G$. \square

Звернемо увагу, що теорема 3.2.2 не дає відповідь на питання, чи збігатимуться норми нециклічних та абелевих нециклічних підгруп, якщо неабелевою є норма N_G^A .

Наступне твердження характеризує будову скінченних p -груп ($p \neq 2$) з неабелевою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і разом з теоремою 3.2.1 дає вичерпний опис будови локально скінченних p -груп ($p \neq 2$) із вказаним обмеженням на норму N_G^A .

Теорема 3.2.3. *Скінченні p -групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) G — \overline{HA}_p -група, $G = N_G^A = N_G$;
- 2) $G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $|x| = p^n$, $n > 1$, $|b| = |c| = p$, $[x, b] = 1$, $[b, c] = x^{p^{n-1}}$, $[x, c] = x^{p^{n-1}\alpha}b^\beta$, $(\beta, p) = 1$, $N_G^A = N_G = (\langle x^p \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$;
- 3) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, де $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m \geq 2$, $k \geq m + r$, $Z(G) = \langle x^{p^{r+1}} \rangle \times \langle b^{p^{r+1}} \rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}s}b^{p^{m-1}t}$, $(s, p) = 1$, $N_G^A = N_G = \langle x^{p^r} \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Тому будемо доводити лише їх необхідність.

Якщо $G \in \overline{HA}_p$ -групою, то $G = N_G^A$ і G є групою типу 1) теореми 3.2.3.

Нехай G не є \overline{HA}_p -групою і має неабелеву норму N_G^A . Тоді $G \neq N_G^A$ і норма N_G^A є групою одного з типів 1)–3) твердження 3.1.1. Розглянемо кожен із вказаних для N_G^A випадків окремо і продовжимо доведення теореми у наступних лемах.

Лема 3.2.6. *Якщо скінченна p -група ($p \neq 2$) G має норму абелевих нециклічних підгруп виду:*

$$N_G^A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle d \rangle,$$

де $|a| = |d| = 9$, $|b| = 3$, $[a, b] = 1$, $[a, d] = b$, $[b, d] = d^3 = a^{-3}$, то в G нормальні всі абелеві нециклічні підгрупи і $G = N_G^A$.

Доведення. Оскільки $Z(N_G^A) = \langle a^3 \rangle$, то $\langle a^3 \rangle \triangleleft G$ і $\langle a^3 \rangle \subseteq Z(G)$.

Позначимо $C = C_G(\omega(N_G^A))$, де $\omega(N_G^A) = \langle a^3, b \rangle$ — нижній шар норми N_G^A . Оскільки $\omega(N_G^A) \triangleleft G$, то $C \triangleleft G$ і $[G : C] = 3$. Враховуючи, що елемент $d \notin C$, маємо

$$G = C \cdot \langle d \rangle, d^3 \in C.$$

Нехай x — елемент найменшого порядку централізатора C , що не міститься у нормі N_G^A . Тоді за лемою 3.2.3 $|x| > 3$.

Припустимо, що $|x| = 9$. Враховуючи циклічність центра групи та лему 3.2.4, робимо висновок, що $x^3 \in \langle a^3 \rangle$. Оскільки $x \in C$, то підгрупа

$$\langle x, b \rangle = \langle x \rangle \times \langle b \rangle$$

абелева нециклічна і тому нормальна в групі $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$. З цього випливає, що

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq (\langle x, b \rangle) \cap N_G^A = \omega(N_G^A)$$

і $G'_1 \subseteq \omega(N_G^A)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G_1 містить нижній шар $\omega(G_1)$, то $G_1 \in \overline{HA}_3$ -групою, що неможливо за твердженням 3.1.1.

Припустимо тепер, що існує елемент $y \in C \setminus N_G^A$, $|y| = 27$. Тоді за доведеним вище $y^3 \in N_G^A$. Оскільки

$$\langle y, b \rangle = \langle y \rangle \times \langle b \rangle \triangleleft G_2 = \langle y \rangle N_G^A,$$

то $y^3 \triangleleft G_2$. Далі з умови $y^3 \in C \cap N_G^A$ і будови норми N_G^A випливає, що $\langle y^3 \rangle = \langle a \rangle$. Але у такому випадку $\langle a \rangle \triangleleft G_2$, що неможливо. Отже, усі елементи централізатора C містяться у підгрупі N_G^A , звідки $C \subseteq N_G^A$ і

$$G = C \cdot \langle d \rangle = (C \cap N_G^A) \langle d \rangle = N_G^A.$$

Таким чином, в групі G нормальні всі абелеві нециклічні підгрупи і $G = N_G^A$. \square

Лема 3.2.7. *Якщо скінченна p -група ($p \neq 2$) G має норму $N_G^A \neq G$ абелевих нециклічних підгруп виду*

$$N_G^A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $|a| = p^n$, $|b| = |c| = p$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$, то G є групою типу 2) теореми 3.2.3.

Доведення. Припустимо, що існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$ такий, що $|x| = p$. Тоді з характеристичності підгрупи $\langle a^{p^{n-1}} \rangle$ в нормальній групі N_G^A випливає, що $\langle a^{p^{n-1}} \rangle \subseteq Z(G)$ і тому

$$\langle a^{p^{n-1}}, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A.$$

Позначимо $C = C_{G_1}(\langle a^{p^{n-1}}, x \rangle)$. Тоді $C \triangleleft G_1$ і $[G_1 : C] \leq p$. З цього випливає, що існує елемент $y \in \omega(N_G^A) \setminus \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ такий, що $y \in C$ і $[y, x] = 1$. Оскільки $\langle y, x \rangle \triangleleft G_1$, то

$$\langle y, x \rangle \cap N_G^A = \langle y \rangle \triangleleft N_G^A,$$

що неможливо, бо підгрупи простого порядку з $\omega(N_G^A) \setminus \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ не є нормальними в нормі N_G^A . Отже,

$$\omega(G) = \omega(N_G^A) = \langle b, c \rangle.$$

Розглянемо фактор-групу $\tilde{G} = G/\omega(N_G^A)$ і припустимо, що \tilde{G} містить підгрупу $\langle \tilde{x} \rangle \times \langle \tilde{y} \rangle$, де $|\tilde{x}| = |\tilde{y}| = p$. Оскільки $x^p \in \omega(N_G^A)$, то $|x| = p^2$ і, відповідно, $|y| = p^2$. Тоді за лемою 3.2.4 маємо

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

Розглянемо підгрупу

$$G_2 = \langle x, y \rangle \omega(N_G^A).$$

Оскільки $|G_2| = p^5$ і $|\langle x, y \rangle| = p^3$, $|\omega(N_G^A)| = p^2$, то $G_2' \subseteq \omega(N_G^A)$.

Перейдемо до фактор-групи $\overline{G}_2 = G_2 / \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ і позначимо

$$\overline{C} = C_{\overline{G}_2}(\omega(\overline{N_G^A})).$$

Тоді $\overline{C} \triangleleft \overline{G}_2$ і $[\overline{G}_2 : \overline{C}] \leq p$. Якщо $\overline{G}_2 = \overline{C}$, то $\overline{G}_2' = \overline{E}$, $G_2' \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ і $G_2 \in \overline{HA}_p$ -групою, що неможливо. Отже, $\overline{G}_2 \neq \overline{C}$. Без порушень загальності будемо вважати, що $\bar{x} \in \overline{C}$. Тоді

$$\overline{C} = \langle \bar{x} \rangle \times \omega(\overline{N_G^A})$$

і $\overline{C}' = \overline{E}$. Отже, $C' \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ і $C \in \overline{HA}_p$ -групою. Використовуючи опис \overline{HA}_p -груп (див. твердження 3.1.1), робимо висновок, що

$$C = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle, [x, c] = 1.$$

Оскільки підгрупа $\langle x \rangle$ характеристична у групі $C \triangleleft G_2$, то

$$\langle x \rangle \triangleleft G_2, |\langle x, y \rangle| = p^3$$

і знову $x \in \langle y \rangle \omega(N_G^A)$, що неможливо.

Отже, фактор-група $\overline{G} = G / \omega(N_G^A)$ не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^2 і за твердженням 2.1.2 є циклічною. Тому $G = \langle u \rangle \omega(N_G^A)$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G / \langle a^{p^{n-1}} \rangle$. Оскільки підгрупа $\omega(\overline{N_G^A})$ характеристична в групі $\overline{N_G^A}$, то $\omega(\overline{N_G^A}) \triangleleft \overline{G}$ і

$$\omega(\overline{N_G^A}) \cap Z(\overline{G}) \neq \overline{E}.$$

Нехай $\bar{b} \in Z(\overline{G})$. Тоді $[\bar{u}, \bar{b}] = \bar{1}$ і $[\overline{G} : \langle \bar{u}, \bar{b} \rangle] = p$. З цього слідує, що $\langle \bar{u}, \bar{b} \rangle \triangleleft \overline{G}$ і

$$\overline{G}' \subseteq \langle \bar{u}, \bar{b} \rangle \cap \omega(\overline{N_G^A}) = \langle \bar{b} \rangle.$$

Отже, $G' \subseteq \langle a^{p^{n-1}}, b \rangle$.

Якщо $G' \subseteq \langle a^{p^{n-1}} \rangle$, то $G \in \overline{HA}_p$ -групою, що неможливо. Отже, $G' = \langle a^{p^{n-1}}, b \rangle$ і $[u, c] = a^{p^{n-1}\alpha} b^\beta$. При цьому $[u, b] = a^{p^{n-1}\gamma}$, бо $\langle \bar{u}, \bar{b} \rangle$ — абелева підгрупа.

Оскільки $c^{-1}uc = ua^{p^{n-1}\alpha}b^\beta$, то

$$c^{-1}u^p c = (ua^{p^{n-1}\alpha}b^\beta)^p = u^p a^{p^n\alpha} b^{p\beta} [u, b]^{p(p-1)/2} = u^p (a^{p^{n-1}\gamma\beta})^{p(p-1)/2} = u^p,$$

$$[u^p, c] = 1, [u, a] = 1, [u, b] = a^{p^{n-1}\gamma},$$

$$b^{-1}ub = ua^{p^{n-1}\gamma}, b^{-1}u^pb = u^pa^{p^n\gamma} = u^p,$$

$[u^p, b] = 1$. Отже, $u^p \in Z(G)$ і $u^p \in N_G^A$.

Оскільки G не є \overline{HA}_p -групою, то $\langle u \rangle \not\triangleleft G$, звідки $\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Нехай $x = uc^{-\gamma}$, тоді

$$[x, b] = [uc^{-\gamma}, b] = [u, b]^{c^{-\gamma}}[c^{-\gamma}, b] = c^{-\gamma}a^{p^{n-1}\gamma}c^\gamma[c^{-\gamma}, b] = a^{p^{n-1}\gamma}a^{-p\gamma} = 1,$$

$$[x, c] = [uc^{-\gamma}, c] = [u, c] = a^{p^{n-1}\alpha}b^\beta, \beta \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Отже,

$$G = \langle x \rangle N_G^A = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

$x^p \in N_G^A$, $N_G^A = (\langle x^p \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$ і G є групою типу 2) теореми 3.2.3. \square

Лема 3.2.8. Якщо скінченна p -група ($p \neq 2$) G має норму $N_G^A \neq G$ абелевих нециклічних підгруп виду

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|a| = p^n$, $|b| = p^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$, то G є групою типу 3) теореми 3.2.3.

Доведення. 1. Нехай $\omega(N_G^A)$ є підгрупою центра $Z(G)$ групи. Тоді за лемою 3.3.3 $\omega(G) = \omega(N_G^A)$ і кожна нециклічна підгрупа (а, значить, і кожна абелева нециклічна) підгрупа, містить нижній шар $\omega(N_G^A)$. При цьому для кожного елемента x з будь-якої нециклічної підгрупи даної групи підгрупа $\langle x, \omega(N_G^A) \rangle$ буде абелевою нециклічною.

Отже, кожна нециклічна підгрупа покривається абелевими нециклічними підгрупами і $N_G^A = N_G$. З цього слідує, що нециклічна норма N_G також неабелева і за теоремою 2.3.2 G є групою типу 3) теореми 3.2.3.

2. Нехай тепер $\omega(N_G^A) \not\subset Z(G)$. Тоді $a^{p^{n-1}} \in Z(G)$, $b^{p^{m-1}} \notin Z(G)$.

Позначимо $C = C_G(\omega(N_G^A))$. Оскільки $\omega(N_G^A) \triangleleft G$ як характеристична підгрупа N_G^A , то $C \triangleleft G$, $[G : C] = p$ і

$$G = \langle y \rangle C, y^p \in C.$$

Розглянемо два випадки залежно від порядку елемента b .

2.1. Нехай $|b| = p$. Тоді $G = \langle a \rangle C$, де $a^p \in C$.

За лемою 3.2.2 C не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 , тому нижній шар $\omega(N_G^A)$ містить всі елементи простого порядку свого централізатора C . Оскільки елемент $a^{p^{n-1}}$ належить кожній циклічній підгрупі складеного порядку, то за твердженням 2.1.2 фактор-група $C/\langle b \rangle$ циклічна.

Отже, підгрупа C абелева і містить циклічну підгрупу індекса p . Враховуючи, що C нециклічна і $p \neq 2$, маємо

$$C = \langle x \rangle \times \langle b \rangle, |x| = p^k, k > 1.$$

Оскільки

$$[x, a] \in N_G^A \cap C = \langle a^p, b \rangle,$$

то можемо вважати, що $[x, a] = a^{\alpha p} b^\beta$. Тоді з умов $Z(N_G^A) = \langle a^p \rangle$, $a^p \in C$ і абелевості підгрупи C робимо висновок, що $a^p \in Z(G)$. Отже,

$$[x, a^p] = a^{\alpha p^2} b^{\beta p} = a^{\alpha p^2} = 1.$$

З цього випливає, що $\alpha p^2 \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\alpha \equiv 0 \pmod{p^{n-2}}$ і $\alpha = p^{n-2} \alpha_1$. Таким чином,

$$[x, a] = (a^{p^{n-2} \alpha_1})^p b^\beta = a^{p^{n-1} \alpha_1} b^\beta \in \omega(N_G^A)$$

і $G' \subseteq \omega(N_G^A)$.

Якщо $\omega(G) = \omega(N_G^A)$, то кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить комутант $G' = \omega(N_G^A)$ і тому є нормальною в G . Отже, $G - \overline{H}A_p$ -група і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Нехай $\omega(G) \neq \omega(N_G^A)$. Тоді існує елемент $y \in G \setminus \omega(N_G^A)$ такий, що $|y| = p$. Оскільки C не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 , то $y \notin C$ і тому

$$G = C \rtimes \langle y \rangle = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle y \rangle,$$

де $[x, y] = a^{p^{n-1}l} b^t$. Враховуючи умову $G \neq N_G^A$, робимо висновок, що $(t, p) = 1$ і G — група типу 2) теореми 3.2.3. Протиріччя. Отже, і у цьому випадку $G = N_G^A$.

2.2. Нехай тепер $|b| > p$. Тоді за доведеним вище

$$G = C \langle y \rangle, y \notin N_G^A, y^p \in C.$$

Розглянемо підгрупу

$$G_1 = \langle y \rangle N_G^A.$$

Якщо $|y| = p$, то $\langle y \rangle \cap N_G^A = E$. Оскільки $a^{p^{n-1}} \in Z(G)$, то $\langle y, a^{p^{n-1}} \rangle \triangleleft G_1$ і

$$[y, N_G^A] \subseteq \langle y, a^{p^{n-1}} \rangle \cap N_G^A = \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

Отже, $G'_1 \subset Z(G)$ і G_1 — регулярна підгрупа. Тоді

$$[b, y] = a^{p^{n-1}\alpha}, [b^p, y] = 1,$$

що неможливо за вибором елемента y . Отже, $|y| > p$ і $\omega(G) = \omega(N_G^A)$.

Оскільки $N_G^A \subseteq C$ і $\omega(G) = \omega(N_G^A)$, то враховуючи, що абелевими нециклічними підгрупами централізатора C вичерпуються всі абелеві нециклічні підгрупи групи G , одержимо

$$N_C^A = N_G^A \cap C = N_G^A.$$

Тоді з умови

$$\omega(N_C^A) = \omega(N_G^A) \subseteq Z(C)$$

та доведеного вище маємо $N_C^A = N_C$, де N_C — норма нециклічних підгруп централізатора C . При цьому для централізатора C можливі наступні випадки:

$$1) C = N_G^A;$$

$$2) C = \langle x \rangle \langle b \rangle, \text{ де } |x| = p^k, |b| = p^m, m \geq 2, k \geq m + r, 1 \leq r \leq m - 1, [x, b] = x^{p^{k-r-1}} s b^{p^{m-1}t}, (s, p) = 1, N_C^A = N_C = \langle x^{p^r} \rangle \rtimes \langle b \rangle.$$

2.2.1. Якщо $C = N_G^A$, то $y^p \in N_G^A$, $|y| = p^k > p$. Оскільки група G не містить неметациклічних підгруп, усі підгрупи яких метациклічні, то за результатами роботи [19] G є метациклічною групою,

$$G = \langle g \rangle \cdot \langle h \rangle,$$

причому хоча б одна з підгруп у добутку є нормальною в G . Нехай $g \notin C$. Враховуючи умову $y^p \in C$, без порушень загальності можемо вважати, що $\langle y \rangle = \langle g \rangle$ і $y^p = a^s b^t$.

Припустимо, що $\langle y \rangle \triangleleft G$. Тоді

$$[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \cap N_G^A = \langle y^p \rangle$$

і $G' \subseteq \langle y^p \rangle$. Якщо при цьому $y^p \in Z(G)$, то $G' \subseteq Z(G)$ і $[y, b^p] = [y^p, b] = 1$, що суперечить умові $[y, b^{p^{m-1}}] \neq 1$. Отже, $y^p \notin Z(G)$.

Покладемо $[y, b] = y^{p^l}$. Тоді

$$b^{-1} y^p b = y^p y^{p^{2l}} = y^p (a^s b^t)^{p^l} = y^p a^{slp} b^{tlp}.$$

З іншого боку, $b^{-1} y^p b = b^{-1} (a^s b^t) b = y^p a^{p^{n-1}s}$. Тому $tlp \equiv 0 \pmod{p^m}$, $slp \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$. З цього випливає, що $b^{-1} y b = y a^{p^{n-2}s_1} b^{p^{m-1}t_1}$, причому $a^{p^{n-2}s_1} b^{p^{m-1}t_1} \in \langle y^p \rangle$. Отже, група G має циклічний комутант порядку p^2 , звідки $[y^p, b] \in \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ і $[y, b^p] \in \langle a^{p^{n-1}} \rangle$. Це означає, що $|b| = p^2$ і G є групою типу 3) даної теореми при $r = 1$ і $m = 2$. Зазначимо, що у цій групі норма абелевих нециклічних підгруп N_G^A збігається з нециклічною нормою N_G .

Нехай тепер $\langle y \rangle \not\triangleleft G$. Тоді жодна з циклічних підгруп, що не міститься у підгрупі $C = N_G^A$, не є нормальною підгрупою G . Отже, як і вище, $G = \langle y \rangle \cdot \langle h \rangle$, де $\langle h \rangle \triangleleft G$, $h = a^l b^j \in C$ і $G' \subseteq \langle h \rangle$. Покладемо $y^{-1} h y = h h^k$. Оскільки $h^{p^{n-1}} \in Z(G)$, то $k:p$ і $y^{-1} h y = h h^{pk_1}$. Тоді враховуючи, що

$[y^p, h] \in \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ й використовуючи попередні співвідношення, будемо мати $y^{-p}hy^p = hh^{p^2k_1(1+pq)} = ha^{p^{n-1}i}$. Отже, $p^2k_1 \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$, $k_1 \equiv 0 \pmod{p^{n-3}}$ і $y^{-1}hy = hh^{p^{n-2}k_2}$. Тому G — p -група з циклічним комутантом порядку p^2 . З цього випливає, що для елемента $b \in N_G^A$ будемо мати $[y, b] \in \langle h^{p^{n-2}} \rangle$, тому $[y, b^p] \in \langle a^{p^{n-1}} \rangle$ і знову $|b| = p^2$. В результаті дістанемо метациклічну групу, в якій $N_G^A = N_G$. Отже, G — група типу 3) даної теореми при $r = 1$ і $m = 2$.

2.2.2. Нехай тепер централізатор C є групою типу 2), зазначеного вище. Оскільки у цьому випадку фактор-групи G/C і C/N_G^A циклічні та $|G/C| = p$ і $|C/N_G^A| \leq p^{m-1}$, то $|G/N_G^A| \leq p^m$.

Доведемо, що фактор-група G/N_G^A циклічна. Для цього достатньо показати, що фактор-група G/N_G^A містить єдину підгрупу простого порядку. Припустимо, що G/N_G^A містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^2 . Оскільки

$$G = \langle y \rangle C = \langle y \rangle (\langle x \rangle \langle b \rangle),$$

то $\bar{G} = G/N_G^A = \langle \bar{y} \rangle \langle \bar{x} \rangle$, причому $|\bar{y}| = p$, $|\bar{x}| = p^r$. Тоді

$$y^p \in N_G^A, x^{p^r} \in N_G^A,$$

де елементи x і y є прообразами елементів \bar{x} і \bar{y} відповідно.

Розглянемо підгрупу $G_1 = \langle y \rangle N_G^A$. Оскільки $|G_1/N_G^A| = p$, то фактор-група G_1/N_G^A циклічна з твірним елементом yN_G^A . Тоді

$$G_1 = \langle y, b \rangle$$

і використовуючи міркування попереднього випадку, дістанемо $N_{G_1}^A = N_{G_1}$.

Оскільки

$$N_G^A \subseteq N_{G_1}^A, N_G^A \subseteq N_C^A$$

і $G_1 \cap C = N_G^A$, то

$$N_G^A = N_{G_1}^A \cap N_C^A.$$

Аналогічно $N_G = N_{G_1} \cap N_C$. Але тоді

$$N_G^A = N_{G_1}^A \cap N_C^A = N_{G_1} \cap N_C = N_G$$

і G є групою типу 3) теореми 2.3.2, що суперечить припущенню.

Отже, фактор-група G/N_G^A циклічна з твірним елементом yN_G^A і $|G/N_G^A| \leq p^m$. Використовуючи міркування, застосовані у випадку 2.2.1, знову отримуємо, що $N_G^A = N_G$ і група є групою типу 3) теореми 3.2.3. \square

Теорему доведено. \square

Наслідок 3.2.8. *Будь-яка локально скінченна p -група ($p \neq 2$) G , що має неабелеву норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, є циклічним розширенням норми N_G^A .*

Як зазначалось вище, у довільній групі має місце включення

$$N_G \subseteq N_G^A,$$

де N_G — нециклічна норма групи. Тому, якщо нециклічна норма групи неабелева, то неабелевою буде й норма абелевих нециклічних підгруп. Більш того, за теоремою 3.2.2 у цьому випадку вказані норми збігаються. З іншого боку, за теоремою 3.2.3 з неабелевості норми N_G^A впливає неабелевість нециклічної норми N_G (і, відповідно, рівність цих норм). Отже, мають місце наступні твердження.

Наслідок 3.2.9. *Якщо в локально скінченній p -групі ($p \neq 2$) G хоча б одна з норм N_G^A чи N_G неабелева, то*

$$N_G^A = N_G.$$

Наслідок 3.2.10. *В локально циклічній p -групі ($p \neq 2$) G норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неабелева тоді і тільки тоді, коли неабелевою є її нециклічна норма N_G .*

Наступні приклади показують, що у випадку абелевої норми N_G^A норми N_G^A та N_G можуть як збігатися, так і бути різними підгрупами.

Приклад 3.2.2. $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times ((\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \rtimes \langle z \rangle)$, де $|a| = |b| = |c| = |x| = |y| = |z| = p$, $[a, b] = [a, c] = [x, y] = [x, z] = 1$, $[b, c] = a$, $[y, z] = x$.

У цій групі

$$\begin{aligned} N_G^A &\subseteq N_G(\langle b, x \rangle) \cap N_G(\langle c, x \rangle) \cap N_G(\langle a, y \rangle) \cap N_G(\langle a, z \rangle) = \\ &= (\langle a, b \rangle \times \langle x, y, z \rangle) \cap (\langle a, c \rangle \times \langle x, y, z \rangle) \cap (\langle a, b, c \rangle \times \langle x, y \rangle) \cap \\ &\quad \cap (\langle a, b, c \rangle \times \langle x, z \rangle) = \langle a \rangle \times \langle x \rangle = Z(G). \end{aligned}$$

Тому норми N_G^A та N_G абелеві і збігаються з центром $Z(G)$:

$$N_G^A = N_G = Z(G) = \langle a \rangle \times \langle x \rangle.$$

Приклад 3.2.3. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, де $|a| = p^2$, $|b| = |c| = p$, $[a, b] = a^p$, $Z(G) = \langle a^p \rangle \times \langle c \rangle$.

У цій групі норми N_G^A , N_G абелеві і збігаються, але відмінні від центра $Z(G)$:

$$N_G^A = N_G = Z(G) \times \langle b \rangle.$$

Прикладом групи, в якій норми нециклічних та абелевих нециклічних підгруп є різними підгрупами, є група з прикладу 3.2.1:

$$G = A \langle b \rangle,$$

де $A = A_1 \times A_2$, A_1, A_2 — квазіциклічні 3-групи, $|b| = 9$, $b^3 \in A$, підгрупа A породжується елементами комутаторної сходинки елемента b , $Z(G) = \langle b^3 \rangle$.

У цій групі усі абелеві нециклічні підгрупи містяться в A і нормальні у ній. Тому $N_G^A = A$. Враховуючи включення $N_G \subseteq N_G^A$, норма N_G абелева. Оскільки підгрупа $H = \omega(G) \langle b \rangle \not\trianglelefteq G$, то A містить елементи, що не нормалізують H . Отже, в цій групі G норми N_G^A та N_G абелеві, але $N_G^A \neq N_G$.

3.3 Нескінченні локально скінченні 2-групи, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова

Розглянемо властивості нескінченних локально скінченних 2-груп з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп.

Наступна теорема дає повний опис таких груп за умови, що вказана норма є нескінченною $\overline{HA_2}$ -групою. Як і у випадку локально скінченних p -груп ($p \neq 2$) з нескінченною недедекіндовою нормою N_G^A , такі групи вичерпуються є $\overline{HA_2}$ -групами і збігаються з нормою N_G^A .

Теорема 3.3.1. *Будь-яка локально скінченна 2-група G , що має нескінченну недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, є $\overline{HA_2}$ -групою одного з типів:*

- 1) $G = A \langle b \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 2) $G = A \langle b \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $|b| = 8$, $b^4 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;
- 3) $G = A \times H$, A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8;
- 4) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$

і збігається з N_G^A .

Доведення. За лемою 3.2.5 G — 2-група Чернікова, що є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи, а її норма N_G^A — $\overline{HA_2}$ -група одного з типів 12)–15) твердження 3.1.2.

Розглянемо кожен з можливих випадків окремо та розіб'ємо доведення теореми на пункти залежно від будови підгрупи N_G^A .

1. Нехай N_G^A — група типу 12) твердження 3.1.2:

$$N_G^A = A \langle b \rangle,$$

A — квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

Покажемо, що група G містить єдину інволюцію. Припустимо, що всупереч цьому існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$ порядку 2. Оскільки інволюція $a_1 \in A$ міститься у центрі групи, то $\langle a_1, x \rangle$ — абелева нециклічна і тому N_G^A -допустима підгрупа. Тоді

$$[N_G^A, \langle x \rangle] \subseteq \langle a_1, x \rangle \cap N_G^A = \langle a_1 \rangle$$

і $[A, \langle x \rangle] = E$. Якщо при цьому $[x, b] = 1$, то підгрупа $\langle x, b \rangle$ — N_G^A -допустима. Але у такому випадку

$$\langle b \rangle = \langle x, b \rangle \cap N_G^A \triangleleft N_G^A,$$

що неможливо за умовою. Отже, $[x, b] \neq 1$ і $\langle b, x \rangle$ — група діедра порядку 8. Оскільки $|bx| = 2$, то підгрупа $\langle bx, a_1 \rangle$ — абелева нециклічна, а значить, N_G^A -допустима. З цього слідує, що $[A, \langle bx \rangle] = E$ і $[A, \langle b \rangle] = E$. Маємо протиріччя з умовою.

Отже, група G має єдину інволюцію і за твердженням 2.1.2 є нескінченною кватерніонною 2-групою. Враховуючи, що така група за твердженням 3.1.2 відноситься до $\overline{HA_2}$ -груп, маємо

$$G = N_G^A.$$

2. Нехай N_G^A — група типу 13) твердження 3.1.2:

$$N_G^A = A\langle b \rangle,$$

A — квазіциклічна 2-група, $|b| = 8$, $b^4 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

Тоді з умови $A \not\subseteq Z(G)$ випливає, що $[G : C_G(A)] = 2$. Оскільки елемент $b \in N_G^A$ не належить централізатору $C_G(A)$, то без порушень загальності міркувань можемо вважати, що

$$G = C_G(A)\langle b \rangle,$$

де $b^2 \in C_G(A)$.

Враховуючи, що нижній шар норми N_G^A :

$$\omega(N_G^A) = \langle b^4, b^2a_2 \rangle,$$

де $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$, є підгрупою централізатора $C_G(A)$, за лемою 3.2.2 робимо висновок, що

$$\omega(N_G^A) = \omega(C_G(A)).$$

Позначимо y — елемент найменшого порядку групи $C_G(A)$, що не належить N_G^A . Оскільки

$$y^2 \in (N_G^A \cap C_G(A)) = A \times \langle b^2a_2 \rangle,$$

то можна вважати, що $y^2 = a_i(b^2a_2)^j$, де $a_i \in A$, $a_i = 2^i \geq 1$, $j \in 0, 1$. Тоді для елемента $y_1 = a_{i+1}^{-1}y$, де $a_{i+1} \in A$, $a_{i+1}^2 = a_i$ маємо

$$y_1^2 = (a_{i+1}^{-1}y)^2 = a_{i+1}^{-2}y^2 = a_i^{-1}a_i(b^2a_2)^j = (b^2a_2)^j.$$

Враховуючи, що $y_1 \in C_G(A)$ за доведеним вище маємо $|y_1| > 2$, тому $j \neq 0$ і $y_1^2 = b^2a_2$. З іншого боку за лемою 3.2.4 $a_1 \in \langle y_1 \rangle$, що неможливо. Отже,

$$C_{N_G^A}(A) = C_G(A) = A \times \langle b^2a_2 \rangle$$

і $G = N_G^A$.

3. Нехай N_G^A — група типу 14) твердження 3.1.2:

$$N_G^A = A \times H,$$

де A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8.

У цьому випадку всі інволюції норми N_G^A належать центру $Z(G)$. Тому за лемою 3.2.4

$$\omega(G) = \omega(N_G^A) = \langle h^2, a_1 \rangle,$$

де $a_1 \in A$, $|a_1| = 2$ і $h \in H$, $|h| = 4$. Оскільки для довільного елемента $g \in G$ підгрупа $\langle g, a_1, h^2 \rangle$ — абелева нециклічна, то вона є N_G^A -допустимою. З цього слідує, що $A \subset C_G(\langle g, a_1, h^2 \rangle)$ і $A \subset Z(G)$.

Отже, група G має три інволюції і центральну квазіциклічну підгрупу A . З опису таких груп (теорема 3.16 [113]) випливає, що

$$G = A \times Q,$$

де Q — кватерніонна 2-група.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/A \cong \overline{Q}$. Оскільки

$$\overline{N_G^A} \cong \overline{H} \leq \overline{Q}$$

і за лемою 3.2.1 $\overline{H} \leq N(\overline{G})$, то за результатами роботи [11] підгрупа $N(\overline{G})$ не містить елементів порядку 8. Тому $\overline{H} = \overline{Q}$ і $G = N_G^A$.

4. Нехай N_G^A — група типу 15) твердження 3.1.2:

$$N_G^A = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

Покажемо, що і в цьому випадку $G = N_G^A$. Припустимо, що група G містить інволюцію x , що не належить N_G^A . Тоді з умови $A \triangleleft G$ випливає, що інволюція $a_1 \in A$ міститься у центрі $Z(G)$ групи і, як наслідок,

$$\langle a_1, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A.$$

Оскільки $[G_1 : C_{G_1}(\langle x, a_1 \rangle)] \leq 2$, то в $N_G^A \setminus \langle a_1 \rangle$ знайдеться інволюція z , переставна з x . Тоді $\langle a_1, x, z \rangle$ — елементарна абелева підгрупа порядку 8, що неможливо за лемою 3.2.2. Отже, N_G^A містить всі інволюції групи G .

Позначимо y — елемент найменшого порядку групи G , що не належить N_G^A . Тоді $|y| > 2$ і $y^2 \in N_G^A$. Покладемо

$$y^2 = a_i b^m c^n,$$

де $a_i \in A$, $|a_i| = 2^i$, $i \geq 1$, $m, n \in 0, 1$ та візьмемо такий елемент $a_{i+1} \in A$, що $a_{i+1}^2 = a_i$.

Нехай $A \subseteq Z(G)$. Тоді

$$(y a_{i+1}^{-1})^2 = y^2 a_{i+1}^{-2} = b^m c^n \neq 1,$$

що неможливо за лемою 3.2.4. Тому далі будемо вважати, що $A \not\subseteq Z(G)$.

Нехай $C = C_G(A)$. Тоді з умов $N_G^A \subseteq C$, $[G : C] = 2$ і випливає, що

$$G = C \cdot \langle y \rangle,$$

причому $y^2 \in C$, $y^{-1} a y = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in A$. Оскільки

$$N_G^A \subseteq N_C^A,$$

де N^A — норма абелевих нециклічних підгруп централізатора, і $A \subseteq Z(C)$, то з міркувань, наведених у попередньому абзаці, випливає, що

$$N_G^A = N_C^A = C.$$

Отже, $G = N_G^A \cdot \langle y \rangle$. Тоді $y^2 \in N_G^A$, $|y| > 2$ і $\langle y \rangle \cap A \neq E$. З цього випливає, що $|y| = 4$ і $y^2 = a_1 \in A$.

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/A \cong \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle.$$

Припустимо, що група \overline{G} — абелева, тобто

$$\overline{G} = \langle \bar{b} \rangle \times \langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle.$$

Тоді $G' \subset A$ і з умови $[y, b^2] = [y, c^2] = 1$ випливає, що

$$[\langle y \rangle, \langle b, c \rangle] \subseteq \langle a_1 \rangle.$$

Тому в $\langle b, c, y \rangle \setminus \langle y, a_1 \rangle$ знайдеться елемент g , переставний з y . Але тоді підгрупа $\langle y, g \rangle$ інваріантна в G як абелева нециклічна і $A \subseteq C_G(\langle y, g \rangle)$, що суперечить вибору елемента y .

Отже, \bar{G} — неабелева і є групою діедра порядку 8. Далі без порушень загальності міркувань будемо вважати, що $\bar{b} \in Z(\bar{G})$ та позначимо \bar{y} — нецентральну інволюцію групи \bar{G} , що не належить $\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$. Тоді

$$\bar{G}' = \langle \bar{b} \rangle$$

і $[\bar{y}, \bar{c}] = \bar{b}$. Переходячи до прообразів та враховуючи, що $y \notin C_G(A)$, $|y| > 2$, одержимо $[y, c] = ba_i^n$, де $a_i \in A$, $|a_i| = 2^i \geq 1$ і $[y, b] = a_j$, $a_j \in A$.

Оскільки $[y, b^2] = 1$, то $[y, b] = a_1^s$, де $s \in \{0, 1\}$. Відповідно, з рівності

$$[y, c^2] = a_i^{2n+2^{i-1}} = 1$$

одержимо $2n + 2^{i-1} \equiv 0 \pmod{2^i}$ і $n \equiv 0 \pmod{2^{i-2}}$. Отже, $[y, c] = ba_2^k$, де $|a_2| = 4$, $a_2 \in A$. Далі з умови $[y^2, c] = 1$ випливає, що $[y, b] = 1$. Значить, підгрупа $\langle y, b \rangle$ — абелева нециклічна і тому N_G^A -допустима. Але у такому випадку

$$A \subseteq C_G(\langle y, b \rangle),$$

що суперечить вибору елемента y . Отже, $G = N_G^A$ і у цьому випадку. \square

Наслідок 3.3.1. *Норма абелевих нециклічних підгруп нескінченної локально скінченної 2-групи G , дедекіндова, якщо $1 < [G : N_G^A] < \infty$.*

Наслідок 3.3.2. *Якщо нескінченна локально скінченна 2-група G містить неінваріантну абелеву нециклічну підгрупу, то норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп цієї групи скінченна або дедекіндова.*

Наслідок 3.3.3. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп нескінченної локально скінченної 2-групи G є власною недедекіндовою підгрупою групи G , то $|N_G^A| < \infty$.*

Розглянемо тепер нескінченні локально скінченні 2-групи, в яких норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп є скінченною недедекіндовою підгрупою.

Теорема 3.3.2. *Нескінченні локально скінченні 2-групи зі скінченною недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = [b, d] = [c, d] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$; $N_G^A = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$;
- 2) $G = A \langle y \rangle \times H$, де A — квазіциклічна 2-група, $[A, H] = E$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|y| = 4$, $y^2 = a_1 \in A$, $y^{-1}ay = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$; $N_G^A = \langle a_2 \rangle \times H$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$;

- 3) $G = (A \times H)\langle y \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|y| = 4$, $y^2 = a_1 \in A$, $y^{-1}ay = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $[h_1, y] = a_1 \in A$, $[h_2, y] = 1$; $N_G^A = \langle a_2 \rangle \times H$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$;
- 4) $G = (H \rtimes A)\langle y \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|y| = 4$, $y^2 = a_1 \in A$, $y^{-1}ay = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $[A, H] = E$, $[h_1, y] = h_1^2$, $[h_2, y] = 1$; $N_G^A = \langle a_2 \rangle \times H$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$.

Доведення. Достатність умов теореми перевіряється безпосередньо. Тому будемо доводити лише їх необхідність.

З умови теореми та леми 3.2.4 випливає, що G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи A , причому

$$N_G^A \subset C_G(A) = C.$$

Оскільки C має нескінченну недедекіндову норму N_C^A абелевих нециклічних підгруп і $N_C^A \supseteq A \cdot N_G^A$, то за теоремою 3.3.1

$$C = N_C^A.$$

Тому C — нескінченна негамільтонова \overline{HA}_2 -група, що є центральним розширенням квазіциклічної підгрупи A . За твердженням 3.1.2 C — група одного з типів:

- 1) $C = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$;
- 2) $C = A \times H$, де A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів.

Враховуючи, що $A \not\subset Z(G)$, маємо $[G : C] = 2$. Тому $G = C\langle y \rangle$, де $y^2 \in C$.

Далі розглянемо кожен з вказаних для підгрупи C випадків окремо.

1. Нехай C — група типу 1). Розглянемо фактор-групу

$$G/A = \overline{G} \cong \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle.$$

Оскільки $\bar{y}^2 \in \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$, то $|\bar{y}| \leq 4$. Доведемо, що \overline{G} — абелева група. Справді, в іншому випадку вона є групою діедра порядку 8 і можна вказати інволюцію \bar{x} , прообраз якої не належить C .

Оскільки

$$Z(\overline{G}) \cap \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \neq \overline{E},$$

то можна вважати, що $\bar{b} \in Z(\overline{G})$ і відповідно $[\bar{c}, \bar{x}] = \bar{b}$. Переходячи до прообразів, одержимо $[b, x] = a_j$, $a_j = 2^j$ та

$$[c, x] = ba_i,$$

де $a_i \in A, |a_i| = 2^i \geq 1, |x| \leq 4, x^2 = a_1^t, t \in \{0, 1\}$. Тоді з умов $[b, c] = a_1$ і $[c^2, x] = [b^2, x] = 1$ випливає, що

$$[c, x] = ba_2^{\pm 1},$$

де $|a_2| = 4, [b, x] = a_1^l, l \in \{0, 1\}$, і $x^{-1}ax = a^{-1}$ для всіх $a \in A$.

Якщо $[b, x] = 1$, то підгрупа $\langle b, x \rangle$ — абелева нециклічна. Проте, елемент $c \in N_G^A$ не міститься у її нормалізаторі, що неможливо за означенням норми N_G^A . Отже, $[b, x] = a_1$. Якщо при цьому $|x| = 2$, то $\langle x, a_1 \rangle$ — абелева нециклічна підгрупа, нормалізатор якої також не містить елемента $c \in N_G^A$. У випадку $|x| = 4, |bx| = 2$ можна взяти підгрупу $\langle bx, a_1 \rangle$ і знову $c \notin N_G(\langle bx, a_1 \rangle)$, що неможливо. Таким чином,

$$\overline{G} = \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle$$

— абелева група порядку 8.

Нехай $|\bar{y}| = 4$. Тоді без порушень загальності міркувань можна вважати, що $\bar{y}^2 = \bar{b}$, звідки $y^2 = a_j b$. Враховуючи, що $G' \subseteq A$, покладемо $[c, y] = a_i$, де $a_i \in A, a_i = 2^i \geq 1$. Тоді з рівності $[c^2, y] = 1$, одержимо $[c, y] = a_1$. Проте у такому випадку

$$[c, y^2] = [c, ba_j] = 1,$$

що неможливо. Отже,

$$\overline{G} = \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle$$

— абелева група експоненти 2. Переходячи до прообразів та враховуючи лему 3.2.3, одержимо

$$y^2 \in \langle a_1 \rangle, [b, y] = a_1, [c, y] = a_1.$$

Тобто, з точністю до ізоморфізму G — група типу 1) даної теореми.

2. Нехай тепер C — група типу 2). Оскільки нижній шар $\omega(C) = \langle a_1, H^2 \rangle$ підгрупи C міститься у центрі групи, то за лемою 3.2.3 C містить усі інволюції групи G . Тому $|y| > 2$.

Враховуючи, що $y^2 \in C$, покладемо $y^2 = a_i h^k$, де $a_i \in A, a_i = 2^i \geq 1, h \in H, |h| = 4$. Тоді зі співвідношень

$$[y, y^2] = 1 = [y, a_i h^k] = [y, a_i][y, h^k]^{a_i}$$

та

$$[y, a_i] \in \langle a_i^2 \rangle, [y, h^{2k}] = 1$$

впливає, що $[y, h^k] \in \langle a_1 \rangle$, звідки $y^2 = a_2^m h^k$.

Припустимо, що $(m, 2) = 1, (k, 2) = 1$. Тоді з умови

$$\langle y \rangle \omega(C) \triangleleft G_1 = \langle y \rangle N_G^A$$

одержимо $\langle y^2 \rangle \triangleleft G_1$, що неможливо, бо існує елемент $h' \in N_G^A \cap H$, $|h'| = 4$ такий, що $[h, h'] \neq 1$ і $h' \notin N_{G_1}(\langle y^2 \rangle)$. Окрім того, неможливим є випадок $(m, 2) = 1$ та $(k, 2) \neq 1$, оскільки $y \notin C$ і $[y, a_2] \neq 1$. Тому далі будемо вважати $m \equiv 0 \pmod{2}$ і $y^2 = a_1^l h^t$. Якщо при цьому $|y| > 4$, то для будь-якого елемента $q \in N_G^A$ має місце включення

$$[y, q] \in \langle y^2 \rangle \omega(C).$$

Зрозуміло, що $[y, q] \notin \omega(C)$, бо інакше $[y^2, q] = 1$. Тому $[y, q] = y^{2l} z^s$, де $z \in \omega(C)$, $(l, 2) = 1$ і

$$(yq)^2 = yq^2 q^{-1} yq = y^2 q^2 y^{2l} z^s \in \omega(C).$$

Замінюючи елемент y на $y_1 = yq$, $|y_1| = 4$ одержимо

$$\langle y_1 \rangle \omega(C) \triangleleft G_1 = \langle y_1 \rangle N_G^A,$$

звідки

$$[N_G^A, \langle y_1 \rangle] \subseteq N_G^A \cap \langle y_1 \rangle \omega(C) = \omega(C),$$

всупереч доведеному вище.

Отже, можна вважати, що $|y| = 4$, $y^2 = a_1^l h^{2t}$. Тоді $[N_G^A, \langle y \rangle] \subseteq \omega(C)$ і

$$[\omega_2(C), \langle y \rangle] \subseteq \omega(C),$$

де $\omega_2(C)$ — підгрупа, породжена елементами порядку не вище 4 з C .

Оскільки для будь-якого елемента $z \in G$ порядку 4

$$[\omega_2(C), \langle z \rangle] \subseteq \omega(C)$$

та кожна абелева не локально циклічна підгрупа містить $\omega(C)$, робимо висновок, що

$$\omega_2(C) \subseteq N_G^A.$$

Більш того, $\omega_2(C) = N_G^A$, бо $a_i \notin N_G(\langle y \rangle \omega(C))$ і $y \notin N_G(\langle a_i y, h \rangle)$ де $|a_i| > 4$, $h \in H$.

Оскільки $[\omega_2(C), \langle y \rangle] \subseteq \omega(C)$, то

$$G_2 = \omega_2(C) \langle y \rangle$$

— $\overline{HA_2}$ -група. За твердженням 3.1.2 G_2 є прямим або напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Враховуючи, що

$$G = A \cdot G_2$$

і завжди можна вказати елемент $d \notin C$, $|d| = 4$, $d^2 = a_1$ такий, що $A \langle d \rangle$ — нескінченна кватерніонна 2-група, робимо висновок, що

$$G = Q_1 \rtimes Q_2,$$

де одна з груп Q_1 чи Q_2 є групою кватерніонів порядку 8, а інша — нескінченною кватерніонною 2-групою. Отже, G — група одного з типів 2)–4) теореми 3.3.2. \square

З теорем 3.3.1 та 3.3.2 випливає, що на відміну від локально скінченних p -груп ($p \neq 2$), в яких з недедекіндовості норми абелевих нециклічних підгруп випливає рівність $N_G = N_G^A$, у класі нескінченних локально скінченних 2-груп вказана рівність може не виконуватися.

Наслідок 3.3.4. *Якщо нескінченна локально скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A , що містить елемент порядку 8, то в G інваріантні всі абелеві нециклічні підгрупи.*

Наслідок 3.3.5. *Якщо нескінченна 2-група G містить неінваріантну абелеву нециклічну підгрупу, то її норма N_G^A дедекіндова або є недедекіндовою підгрупою експоненти 4 і порядку 2^m , де $m \in \{4, 5\}$.*

3.4 Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

У цьому підрозділі будуть вивчатися скінченні 2-групи, центр яких нециклічний, а норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, тобто, є негамільтоновою $\overline{HA_2}$ -групою.

Наступна лема характеризує скінченні $\overline{HA_2}$ -групи, центр яких нециклічний.

Лема 3.4.1. *Якщо G — скінченна недедекіндова 2-група з нециклічним центром, що збігається з нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп, то $G \in \overline{HA_2}$ -групою одного з типів 4)–9) або типу 2) при $m > 1$ твердження 3.1.2.*

Доведення лема випливає з твердження 3.1.2.

Теорема 3.4.1. *Якщо скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та нециклічний центр і не містить групи кватерніонів, то $N_G^A = N_G$.*

Доведення. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 3.2.3

$$\omega(G) = \omega(N_G^A).$$

Враховуючи, що група G не містить групи кватерніонів і має нециклічний центр, кожна нециклічна підгрупа, містить нижній шар $\omega(G)$. Тому для кожного елемента x довільної нециклічної підгрупи $\langle x, \omega(G) \rangle$ — абелева нециклічна підгрупа. Отже, кожна нециклічна підгрупа покривається абелевими

нециклічними підгрупами і тому $N_G^A = N_G$. \square

Відсутність групи кватерніонів в групі G є суттєвою вимогою в теоремі 3.4.1, що підтверджує наступний приклад.

Приклад 3.4.1. $G = Q \rtimes H$, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$, $|q_1| = 2^n$, $n > 2$, $|q_2| = 4$, $q_1^{2^{n-1}} = q_2^2$, $q_2^{-1}q_1q_2 = q_1^{-1}$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[q_2, h_2] = 1$, $[q_2, h_1] = q_2^2$, $[H, \langle q_1 \rangle] = E$.

У цій групі $N_G^A = \langle q_1^{2^{n-2}} \rangle \times H \neq N_G = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 q_1^{2^{n-2}} \rangle$.

Отже, на відміну від скінченних p -груп ($p \neq 2$) з неабелевою нормою N_G^A , в яких $N_G^A = N_G$, в 2-групах ця рівність може не виконуватись як у випадку $G = N_G^A$ (твердження 3.1.2, група типу 7), так і у випадку $G \neq N_G^A$ (приклад 3.4.1).

Лема 3.4.2. *Будь-яка скінченна 2-група G експоненти 4 з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром є \overline{HA}_2 -групою.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умови леми. Тоді за лемою 3.2.3 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$ — центральна елементарна абелева група порядку 4.

Оскільки фактор-група $\overline{G} = G/\omega(G)$ є групою експоненти 2, то \overline{G} — абелева і $G' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи тепер, що кожна абелева нециклічна підгрупа групи містить $\omega(G)$, вона нормальна в G . Отже, $G \in \overline{HA}_2$ -групою. \square

Наслідок 3.4.1. *Нехай G — скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо група G містить елементи порядку 4, що не належать нормі N_G^A , то $\exp G > 4$.*

Лема 3.4.3. *Нехай G — скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо група містить елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$, то підгрупа*

$$G_1 = \langle x \rangle N_G^A$$

є \overline{HA}_2 -групою.

Доведення. Оскільки центр $Z(G)$ нециклічний і за лемою 3.2.2 група G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 8, то $\omega(G)$ — центральна елементарна абелева підгрупа порядку 4.

Нехай $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. Тоді $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ і

$$G'_1 \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G).$$

Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G_1 містить $\omega(G)$, то вона нормальна в G_1 . Отже, $G_1 \in \overline{HA}_2$ -групою. \square

Існування групи, про яку йдеться в умові леми 3.4.3, підтверджує приклад 3.4.1.

Наслідок 3.4.2. *Нехай G — скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо норма N_G^A є групою одного з типів: 5), 7, 8), типу 2) при $n \geq m > 2$ або $m > n > 2$ чи групою одного типів 6) або 9) при $n > 2$ твердження 3.1.2, то*

$$\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$$

і $\omega_2(N_G^A)$ є групою експоненти 4.

Доведення. Нехай умови наслідку виконуються та існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. Тоді за лемою 3.4.3 підгрупа

$$G_1 = \langle x \rangle N_G^A$$

є $\overline{HA_2}$ -групою. Враховуючи будову норми N_G^A й опис $\overline{HA_2}$ -груп, приходимо до протиріччя. Отже,

$$\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G),$$

де $\omega_2(G)$ — підгрупа, породжена усіма елементами групи G , порядок яких не більше 4. \square

Наслідок 3.4.3. *Якщо в скінченній 2-групі G з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром має місце рівність*

$$\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G),$$

то група G не містить узагальнених груп кватерніонів порядку більше 8. Якщо група G містить групу кватерніонів, то $H \subset N_G^A$. Більш того, має місце рівність

$$N_G = N_{N_G^A},$$

де $N_{N_G^A}$ — нециклічна норма підгрупи N_G^A .

Наслідок 3.4.4. *Нехай G — скінченна 2-група з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A , яка не містить групи кватерніонів. Якщо*

$$\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G),$$

то група G також не містить групи кватерніонів і $N_G^A = N_G$.

Наступна теорема описує будову скінченних 2-груп, що мають нециклічний центр та недедекіндову норму N_G^A .

Теорема 3.4.2. *Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) G – недедекіндова \overline{HA}_2 -група одного з типів 4)–9) або типу 2) при $m > 1$ твердження 3.1.2, $G = N_G^A$;
- 2) $G = H \cdot Q$, де H – група кватерніонів порядку 8, Q – узагальнена група кватерніонів, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $|x| = 4$, $y^{2^{n-1}} = x^2$, $x^{-1}yx = y^{-1}$, $H \cap Q = E$, $[Q, H] \subseteq \langle x^2, h_1^2 \rangle$, $N_G^A = H \times \langle y^{2^{n-2}} \rangle$;
- 3) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, $m > 2$, $k \geq m + r$, $1 \leq r < m - 1$, $Z(G) = \langle x^{2^{r+1}} \rangle \times \langle b^{2^{r+1}} \rangle$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}s} b^{2^{m-1}t}$, $(s, 2) = 1$, $0 \leq t < 2$, $N_G^A = \langle x^{2^{m-1}} \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

За умовою норма N_G^A є негамільтоновою \overline{HA}_2 -групою з нециклічним центром. Тоді за лемою 3.4.1 вона є групою одного з типів 4)–9) або типу 2) при $m > 1$ твердження 3.1.2.

Продовжимо доведення теореми залежно від будови норми N_G^A .

Лема 3.4.4. Нехай скінченна 2-група G має нециклічний центр, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп є групою одного з типів 4), 5), 7), 8) або 9) при $n = 2$ твердження 3.1.2. Тоді G – \overline{HA}_2 -група і

$$G = N_G^A.$$

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$ і покажемо, що G – група експоненти 4. Нехай, всупереч припущенню, існує елемент $x \in G$, $|x| = 8$.

Якщо при цьому норма N_G^A є групою одного з типів 5), 7) або 8) твердження 3.1.2, то за наслідком 3.4.2

$$\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$$

і $x^2 \in N_G^A$.

Нехай норма N_G^A є групою одного з типів 4) або 9) при $n = 2$ твердження 3.1.2. Припустимо, що $x^2 \notin N_G^A$. Тоді з умов

$$\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A,$$

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \bigcap N_G^A = \omega(G)$$

впливає, що

$$\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1, [\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$$

і $x^2 \in Z(G_1)$. Але у такому випадку $\omega(G_1) \neq \omega(N_G^A)$, що неможливо за лемою 3.2.3. Отже, $x^2 \in N_G^A$ і

$$[\langle x \rangle, \omega(G)] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \bigcap N_G^A = \langle x^2 \rangle \omega(G).$$

Розглянемо фактор-групу $\overline{G}_1 = G_1/\omega(G)$. За доведеним $\overline{G}_1' \subseteq \langle \overline{x}^2 \rangle$. Якщо $\overline{G}_1' \neq \overline{E}$, то, враховуючи умови $\overline{x} \notin Z(\overline{G}_1)$ і $\langle \overline{x} \rangle \triangleleft \overline{G}_1$, одержимо

$$[\overline{G}_1 : C_{\overline{G}_1}(\langle \overline{x} \rangle)] = 2.$$

Отже, \overline{N}_G^A містить елемент \overline{y} порядку 2, непереставний з \overline{x} , $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ — група діедра порядку 8 і $|\overline{xy}| = 2$. Оскільки $\omega(G)$ — центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 3.1.2

$$\overline{N}_G^A \leq N(\overline{G}).$$

Тому $\langle \overline{xy} \rangle \triangleleft \overline{G}_1$, що неможливо.

Отже,

$$\overline{G}_1' = E, G_1' \subseteq \omega(N_G^A)$$

і $G_1 \in \overline{HA}_2$ -групою, що містить центральну циклічну підгрупу порядку 4, що неможливо, враховуючи будову норми N_G^A . Таким чином, G є групою експоненти 4. За лемою 3.4.2 G — \overline{HA}_2 -група. \square

Лема 3.4.5. *Нехай G — скінченна 2-група з нециклічним центром, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є прямим або напівпрямим добутком нормальної циклічної групи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Тоді $G = N_G^A$.*

Доведення. Нехай норма N_G^A задовольняє умови леми. Тоді вона є групою типу 6) або 9) твердження 3.1.2 при $n > 2$. Припустимо, що $G \neq N_G^A$.

Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 3.2.3 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Окрім того, за наслідком 3.4.2

$$\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G).$$

Якщо норма N_G^A є групою типу 6) при $n > 2$, то за наслідком 3.4.3

$$N_G = N_{N_G^A} = N_G^A.$$

Тоді за теоремою 2.4.2 попереднього розділу G — \overline{HA}_2 -група, що є напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Отже, $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Нехай норма N_G^A є групою типу 9) при $n > 2$. Тоді за наслідком 3.4.2 N_G^A містить усі групи кватерніонів даної групи. За наслідком наслідком 3.4.3 маємо

$$N_G = N_{N_G^A} = \langle c^2 \rangle \times H,$$

де $|c^2| \geq 4$. Тоді, як і у попередньому випадку, за теоремою 2.4.2 $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що неможливо. \square

Лема 3.4.6. Нехай G — скінченна 2-група з нециклічним центром, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 6) твердження 3.1.2

$$N_G^A = H \times \langle c \rangle,$$

де H — група кватерніонів, $|c| = 4$. Тоді або $G = N_G^A$, або G є групою типу 2) теореми 3.4.2.

Доведення. За лемою 3.2.3 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Якщо $N_G^A = \omega_2(G)$, то з наслідку 3.4.3 випливає, що

$$N_G = N_{N_G^A} = N_G^A.$$

Тоді за теоремою 2.4.2 $G \in \overline{HA_2}$ -групою і

$$G = N_G^A.$$

Отже, надалі будемо вважати, що $N_G^A \neq \omega_2(G)$, тобто існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 3.4.3 група

$$G_1 = \langle x \rangle N_G^A$$

є $\overline{HA_2}$ -групою експоненти 4. Якщо при цьому $[x, c] = 1$, то G_1 містить центральну циклічну підгрупу $\langle c \rangle$ порядку 4, що неможливо за твердженням 3.1.2 для групи порядку 64. Отже, $c \notin Z(G)$.

Якщо $\langle c \rangle \triangleleft G$, то, враховуючи нецентральність підгрупи $\langle c \rangle$, одержимо

$$[G : C] = 2,$$

де $C = C_G(\langle c \rangle)$. Покажемо, що за цих умов усі елементи, порядок яких більший за 4, переставні з елементом c .

Нехай $y \in G \setminus N_G^A$, $|y| = 2^s$, $s > 2$. Якщо при цьому $\langle y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то

$$[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$$

і $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Але у такому випадку $\omega(G) \neq \omega(N_G^A)$, що суперечить лемі 3.2.3. Тому

$$\langle y \rangle \cap N_G^A = \langle y^{2^{s-2}} \rangle.$$

Покладемо $y_1 = y^{2^{s-3}}$, $y_1^2 = c^m h^k$, де $h \in H$. Оскільки

$$[\langle y_1 \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y_1 \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \langle y_1^2 \rangle \omega(G),$$

то $\langle y_1^2 \rangle \triangleleft G_2 = \langle y_1 \rangle N_G^A$. З цього випливає, що або $m \equiv 0 \pmod{2}$ і $(k, 2) = 1$, або $k \equiv 0 \pmod{2}$ і $(m, 2) = 1$.

У першому випадку $y_1^2 = c^{2m_1} h^k$, де $(k, 2) = 1$. Тоді у фактор-групі $\overline{G} = G/\omega(G)$ має місце включення

$$[\langle \overline{y_1} \rangle, \overline{N_G^A}] \subseteq \langle \overline{y_1} \rangle \cap \overline{N_G^A} = \langle \overline{y_1^2} \rangle = \langle \overline{h} \rangle.$$

Нехай h_1 — елемент підгрупи H , непереставний з h . Тоді

$$[\langle \bar{h}_1 \rangle, \langle \bar{y}_1 \rangle] = \langle \bar{y}_1^{2l} \rangle = \langle \bar{h}^{kl} \rangle.$$

Якщо при цьому $(l, 2) = 1$, то $\langle \bar{y}_1, \bar{h}_1 \rangle$ — група дієдра і $|\bar{y}_1 \bar{h}_1| = 2$.

За лемою 3.1.2 $\langle \bar{y}_1 \bar{h}_1 \rangle \triangleleft \bar{G}_2$, тому

$$\bar{G}_2 = \bar{N}_G^A \times \langle \bar{y}_1 \bar{h}_1 \rangle.$$

Отже,

$$[\bar{y}_1 \bar{h}_1, \bar{h}_1] = [\bar{y}_1, \bar{h}_1] = 1,$$

що неможливо. Аналогічно, $(l, 2) \neq 1$ і $[\bar{h}_1, \bar{y}_1] = 1$. Але тоді

$$[h_1, y_1] \in \omega(G), [h_1, y_1^2] = [h_1, h] = 1,$$

всупереч вибору елемента h_1 . Отже, $y_1^2 = c^m h^{2k_1}$, де $(m, 2) = 1$ і $[y, c] = 1$. З цього також випливає, що усі елементи, порядок яких більший за 4, належать до централізатора C .

Нехай $x \notin C$. Тоді за доведенням вище $|x| = 4$ і

$$G = C \langle x \rangle,$$

де $x^2 \in \omega(G)$, $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$. Оскільки норма N_G^A містить усі елементи четвертого порядку централізатора C , то

$$N_G^A = \omega_2(C).$$

Якщо при цьому $\exp C = 4$, то $N_G^A = C$ і

$$G = N_G^A \cdot \langle x \rangle.$$

Тоді за лемою 3.4.3 G — \overline{HA}_2 -група відмінна від N_G^A , що неможливо. Отже, $\exp C > 4$.

Оскільки норма N_C^A підгрупи C містить N_G^A і $c \in Z(C)$, то норма N_C^A є групою одного з типів:

$$1) N_C^A = \langle y \rangle \times H, |y| = 2^n, n \geq 3, y^{2^{n-2}} = c;$$

$$2) N_C^A = \langle y \rangle \rtimes H, [\langle y \rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}} \rangle, |y| = 2^n, n \geq 3, y^{2^{n-2}} = c.$$

У кожному з цих випадків за лемою 3.4.5 маємо $N_C^A = C$. Далі розглянемо кожен з вказаних вище випадків окремо.

1. Нехай $C = N_C^A = \langle y \rangle \times H$, тоді

$$G = (\langle y \rangle \times H) \langle x \rangle, x^2 \in C.$$

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle \overline{y} \rangle \times \overline{H}) \langle \overline{x} \rangle.$$

Оскільки $\langle \overline{y} \rangle = \overline{Z(C)}$, то підгрупа $\langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$ містить циклічну підгрупу індекса 2 і можливі наступні співвідношення між елементами \overline{x} та \overline{y} :

1) $[\overline{y}, \overline{x}] = 1$. Тоді $G' \subseteq \omega(G)$ і $G \in \overline{HA_2}$ -групою, що суперечить умові $G \neq N_G^A$.

2) $\overline{x}^{-1}\overline{y}\overline{x} = \overline{y}^{-1}\overline{y}^{2^{n-2}}$, $n \geq 4$. Переходячи до прообразів, одержимо

$$x^{-1}yx = y^{-1}cz,$$

де $z \in \omega(G)$. Тоді

$$x^{-2}yx^2 = x^{-1}y^{-1}czx = yc^{-2},$$

що суперечить умові $x^2 \in Z(G)$.

3) $\overline{x}^{-1}\overline{y}\overline{x} = \overline{y}y^{2^{n-2}}$, де $n \geq 4$. У цьому випадку $|y| \geq 16$, $x^{-1}yx = ycz$, де $z \in \omega(G)$, і $x^{-1}y^2x = y^2c^2$. Оскільки $c \in \langle y \rangle$, то $y^2 = c$ і $|y| = 8$. Протиріччя.

4) Отже, $\overline{x}^{-1}\overline{y}\overline{x} = \overline{y}^{-1}$. Тоді

$$G = \langle y \rangle G_1,$$

де $G_1 = N_G^A \langle x \rangle \in \overline{HA_2}$ -групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Неважко довести, що існує елемент $x_1 \in G_1$, що $x_1^2 = c^2$ і $\langle y, x_1 \rangle$ — узагальнена група кватерніонів.

Отже, $G = H \cdot Q$ — група типу 2) теореми 3.4.2, де одна з груп H чи Q є узагальненою групою кватерніонів порядку більше 8, а інша — групою кватерніонів, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

2. Нехай тепер

$$C = N_C^A = \langle y \rangle \rtimes H,$$

$$[\langle y \rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}} \rangle, |y| = 2^n, n \geq 3, y^{2^{n-2}} = c.$$

Перейдемо до фактор-групи

$$\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle \overline{y} \rangle \rtimes \overline{H}) \langle \overline{x} \rangle,$$

де $[\overline{H}, \langle \overline{x} \rangle] = E$, $[\langle \overline{y} \rangle, \langle \overline{x} \rangle] \subseteq \langle \overline{y}, \overline{H} \rangle$. Покладемо

$$\overline{x}^{-1}\overline{y}\overline{x} = \overline{y}^\alpha \overline{h}^\beta,$$

де $\overline{h} \in \overline{H}$. Тоді з умови $[\overline{x}^2, \overline{y}] = 1$ випливає, що

$$\overline{x}^{-2}\overline{y}\overline{x}^2 = (\overline{y}^\alpha \overline{h}^\beta)^\alpha \overline{h}^\beta = \overline{y}^{\alpha^2} \overline{h}^{\beta(\alpha+1)} = \overline{y}.$$

Якщо $\beta \equiv 1 \pmod{2}$, то $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$ і $\alpha = \pm 1 + 2^{n-1}t$ або $\alpha = \pm 1 + 2^{n-2}t$.

Неважко перевірити, що кожному з випадків $[h_1, (xy)^2] \neq 1$ для елемента $h_1 \in H$, який непереставний з h . З іншого боку,

$$[h_1, x] \in \omega(G), [h_1, y] \in \omega(G).$$

Отже, $[h_1, xy] \in \omega(G)$ і $[h_1, (xy)^2] = 1$. Протиріччя.

Отже, $\beta \equiv 0 \pmod{2}$ і $\langle \bar{y} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Міркуючи аналогічно попередньому випадку отримуємо, що $\bar{x}^{-1}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}^{-1}$. Тоді

$$G = \langle y \rangle G_1,$$

де $G_1 = N_G^A \langle x \rangle - \overline{HA_2}$ -група, що є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Отже,

$$G = H \cdot Q$$

— група типу 2) теореми 3.4.2.

Припустимо, що $\langle c \rangle \not\triangleleft G$. Тоді $[\langle c \rangle, G] \subseteq \omega(G)$.

Нехай x — елемент G , такий що $|x| \geq 8$. Якщо $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$$

і $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$. Тоді група

$$G_1 = \langle x^2 \rangle N_G^A$$

є $\overline{HA_2}$ -групою, що має дві центральні циклічні підгрупи $\langle x \rangle$ та $\langle c \rangle$ порядку 4, що суперечить твердженню 3.1.2. Отже, $x^{2^k} = c^\alpha h^\beta$ (де або α , або β не діляться на 2) і

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x^{2^k} \rangle \omega(G).$$

Оскільки $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, то або $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і $\beta \equiv 1 \pmod{2}$, або $\alpha \equiv 1 \pmod{2}$ і $\beta \equiv 0 \pmod{2}$.

Якщо $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і $\beta \equiv 1 \pmod{2}$, то неважко довести, що

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G),$$

тому $[x^2, h_1] = 1$. З іншого боку,

$$[x^2, h_1] = [c^{2\alpha} h^\beta, h_1] = [h^\beta, h_1] \neq 1.$$

Отримали протиріччя. Отже, $x^{2^k} = c^\alpha h^{2\beta}$, де $(\alpha, 2) = 1$, звідки $[x, c] = 1$ і $\langle x \rangle \cap N_G^A = \langle ch^{2\beta} \rangle$, де $\beta \in \{0, 1\}$.

Позначимо $N = N_G(\langle c \rangle)$. Тоді $N \supseteq N_G^A$ і для будь-якого елемента $y \in G$ $|y| \geq 8$, $y \in N$. Якщо $N \neq G$, то існує елемент $a \in G \setminus N$, такий що $|a| = 4$,

$$a^2 \in \omega(G), [\langle a \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G).$$

Нехай $a, b \notin N$. Тоді $[a, c] = c^{2r}h^2$, $[b, c] = c^{2s}h^2$, звідки $[ab, c] \in \langle c \rangle$ і $ab \in N$, Неважко довести, що

$$a^{-1}N = aN = bN,$$

тому $[G : N] = 2$ і $N \triangleleft G$, $G = N\langle a \rangle$, $a^2 \in \omega(N_G^A)$.

За доведеним вище підгрупа N є добутком групи кватерніонів порядку 8 і узагальненої групи кватерніонів порядку більше 16:

$$N = H \cdot Q, |H| = 8, |Q| \geq 16,$$

$$H = \langle h_1, h_2 \rangle, Q = \langle y, x \rangle, |y| = 2^n > 4, y^{2^{n-2}} = c, [H, Q] \subseteq \omega(G).$$

Якщо $|y| > 8$, то $N' = \langle y^2 \rangle \times \langle h^2 \rangle \triangleleft G$, $\langle y^4 \rangle \triangleleft G$ і $\langle c \rangle \triangleleft G$, що суперечить припущенню. Отже, $|y| = 8$.

Розглянемо фактор-групу

$$G/N_G^A \cong (\langle \bar{y} \rangle \times \langle \bar{x} \rangle) \langle \bar{a} \rangle,$$

де $|\bar{y}| = |\bar{x}| = |\bar{a}| = 2$. Якщо G/N_G^A неабелева, то вона є групою діедра і містить елемент четвертого порядку виду $\langle \bar{a}\bar{t} \rangle$, де $\bar{t} \in \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$. Зрозуміло, що $|at| > 4$, а, отже, $at \in N$ і $a \in N$, що неможливо.

Таким чином, фактор-група G/N_G^A абелева, $[\bar{N}, \langle \bar{a} \rangle] = 1$ і $[y, a] = c^k h^m$. Якщо $m \equiv 0 \pmod{2}$, то $[y^2, a] = c^{2k} \in \langle c \rangle$, що неможливо, бо у такому випадку $a \in N$. Отже, $m = 1$ і $[y, a] = c^k h$. Тоді

$$(ya)^2 = ya^2yc^k h = c^{1+k}hz,$$

де $z \in \omega(G)$. З іншого боку, оскільки $|ya| > 4$, то за доведеним

$$\langle ya \rangle \cap N_G^A \subseteq \langle c \rangle \omega(G).$$

Протиріччя. □

Лема 3.4.7. Нехай G — скінченна 2-група з нециклічним центром, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 3.1.2

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$ при $m > n \geq 2$. Тоді

$$G = N_G^A = N_G.$$

Доведення. Нехай $G \neq N_G^A$. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то за наслідком 3.4.4 і лемою 2.4.1

$$G = N_G^A = N_G,$$

що суперечить припущенню.

Отже, далі будемо вважати, що $\omega_2(N_G^A) \neq \omega_2(N_G^A)$. Тоді існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. Окрім того, за наслідком 3.4.2 $|a| = 4$. За лемою 3.2.3 $x^2 \in \omega(G)$ і

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G).$$

Тому за лемою 3.4.3 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA}_2$ -групою.

Виходячи з опису \overline{HA}_2 -груп з нециклічним центром, G_1 є прямим чи напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи $\langle y \rangle$ порядку більше 2 та групи кватерніонів H . З цього випливає, що $|x| = |a| = 4$ і $|y| = |b|$. Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що

$$G_1 = \langle y \rangle \rtimes H,$$

де $H = \langle x, a \rangle$ — група кватерніонів і $[H, \langle y \rangle] \subseteq \langle b^{2^{m-1}} \rangle$. Неважко довести, що для довільного елемента $x \notin N_G^A$, $|x| > 2$ виконується

$$\langle x \rangle \cap N_G^A \subset \omega(G).$$

Припустимо, що фактор-група $\overline{G} = G/N_G^A$ містить підгрупу $\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle$, де $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 2$. Оскільки

$$\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G), \langle y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G),$$

то $|x| = |y| = 4$. За доведеним у кожному з суміжних класів xN_G^A та yN_G^A знайдуться такі елементи x_1 та y_1 , що

$$|x_1| = |y_1| = 4, x_1^2 = y_1^2 = a^2 = [x_1, a] = [y_1, a]$$

та $[x_1, b] = b^{2^{m-1}t}$, $[y_1, b] = b^{2^{m-1}l}$.

Оскільки $[\overline{x}, \overline{y}] = 1$, то $[x_1, y_1] \in N_G^A$. Покладемо $[x_1, y_1] = a^r b^s$, тоді

$$[x_1^2, y_1] = b^{2s} a^{2rs} b^{2^{m-1}ts} = 1$$

і $2s(1 + 2^{m-2}t) \equiv 0 \pmod{2^m}$. Оскільки $m > 2$, то $s \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$, $s = 2^{m-1}s_1$. Отже,

$$(x_1 y_1)^2 = a^{-r} b^{2^{m-1}s_1}.$$

Якщо $(r, 2) \neq 1$, то $|x_1 y_1 a^{\frac{-r}{2}} b^{2^{m-1}s_1}| = 2$. У такому випадку

$$(x_1 y_1 a^{\frac{-r}{2}} b^{2^{m-1}s_1}) \in N_G^A$$

і $x_1 \in y_1 N_G^A$, що неможливо.

Нехай $(r, 2) = 1$. Тоді з умови $[x_1 y_1, b] = b^{2^{m-1}t}$ випливає

$$[(x_1 y_1)^2, b] = [a^{-r} b^{2^{m-1}s}, b] = [a^r, b] = 1,$$

що також неможливо. Отже, група \overline{G} має єдину інволюцію.

Припустимо, що $|\overline{G}| = 2$, тоді $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню. Отже, фактор-група \overline{G} містить елемент \overline{g} порядку 4. Тоді $|g| = 8$ і за доведеним

$$\langle g \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G).$$

Оскільки

$$[\langle g \rangle, N_G^A] \subseteq \langle g \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G),$$

то комутант групи $G_1 = \langle g \rangle N_G^A$ міститься в $\omega(G)$ і $G_1 \in \overline{HA}_2$ -групою, що неможливо, враховуючи будову N_G^A та опис \overline{HA}_2 -груп. \square

Спираючись на наслідки 3.4.2 та 3.4.4 і лему 2.4.6 попереднього розділу, одержимо наступне твердження.

Лема 3.4.8. *Нехай G — скінченна 2-група з нециклічним центром, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 3.1.2*

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$ і $n \geq m > 2$. Тоді G є групою типу 3) теореми 3.4.2.

Застосовуючи міркування, які були використані при доведенні леми 3.4.7, неважко переконатися у справедливості наступного твердження.

Лема 3.4.9. *Якщо G — скінченна 2-група з нециклічним центром, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 3.1.2*

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$ і $n > m = 2$, то

$$G = N_G^A = N_G.$$

Лема 3.4.10. *Нехай G — скінченна 2-група з нециклічним центром, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 3.1.2*

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$ і $n = m = 2$. Тоді

$$G = N_G^A = N_G.$$

Доведення. Нехай $G \neq N_G^A$. Позначимо x — елемент найменшого порядку групи G , що не належить до норми N_G^A . Тоді $x^2 \in N_G^A$ і за лемою 3.2.3 $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = a^\alpha b^\beta$. Оскільки

$$\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A,$$

то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, звідки $\beta = 2\beta_1$.

Припустимо, що $(\alpha, 2) = 1$. Оскільки $\omega(G)$ центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 3.1.2 у фактор-групі

$$\widetilde{G}_1 = G_1/\omega(G)$$

має місце включення $\widetilde{N}_{G_1}^A \subseteq N(\widetilde{G}_1)$. Тому $\langle \widetilde{x} \rangle \triangleleft \widetilde{G}_1$ і

$$\widetilde{G}_1' \subseteq \langle \widetilde{x} \rangle \cap \widetilde{N}_{G_1}^A = \langle \widetilde{x}^2 \rangle = \langle \widetilde{a} \rangle.$$

Якщо $\widetilde{G}_1' = \widetilde{E}$, то $G_1' \subseteq \omega(G)$ і $[x, b] \in \omega(G)$, $[x^2, b] = 1$, що неможливо. Отже, $\widetilde{G}_1' = \langle \widetilde{a} \rangle$. Тоді

$$(\widetilde{b}\widetilde{x})^2 = (\widetilde{b}\widetilde{x})(\widetilde{b}\widetilde{x}) = \widetilde{b}^2\widetilde{x}^2\widetilde{a}^t = 1.$$

Але у такому випадку $\widetilde{b} \notin N_{\widetilde{G}}(\langle \widetilde{b}\widetilde{x} \rangle)$, що неможливо. Отже, $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і для довільного елемента $x \in G$, $|x| = 2^k$, $k > 1$,

$$\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G).$$

Якщо при цьому $k > 2$, то

$$\langle x \rangle \cap N_G^A = \langle a^2b^2 \rangle,$$

бо інакше з умови $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$ випливає існування елемента порядку 2, що не належить нормі N_G^A .

Нехай \overline{A} — максимальна елементарна абелева підгрупа фактор-групи

$$\overline{G} = G/N_G^A,$$

а \overline{x} та \overline{y} — довільні елементи з \overline{A} . За доведеним вище $x^2 \in \omega(G)$ та $y^2 \in \omega(G)$, тому

$$[x^2, y] = [x, y^2] = 1.$$

Покладемо $[x, y] = a^r b^t$. Тоді

$$(xy)^2 = a^r b^t z,$$

де $z \in \omega(G)$. Оскільки $(xy)^2 \in \omega(G)$, то $r \equiv t \equiv 0 \pmod{2}$. Отже, для довільних елементів $x, y \in A$, де A — повний прообраз підгрупи \overline{A} , виконується

$$[x, y] \in \omega(G),$$

$A' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з A містить $\omega(G)$, робимо висновок, що A — $\overline{H}A_2$ -група експоненти 4. З опису таких груп $|\overline{A}| \leq 4$.

Нехай $|\overline{A}| = 2$. Оскільки \overline{G} нільпотентна, то $Z(\overline{G}) \neq \overline{E}$ і \overline{G} має єдину інволюцію. Отже, \overline{G} або циклічна, або кватерніонна 2-група.

Якщо \overline{G} — циклічна, то

$$G = \langle x \rangle N_G^A.$$

При цьому $G' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з G містить $\omega(G)$, $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Нехай \overline{G} — кватерніонна 2-група. Тоді вона містить групу кватерніонів $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ порядку 8, $\overline{x}^2 = \overline{y}^2$. Переходячи до прообразів, покладемо

$$y^2 = x^2 a^m b^s.$$

Оскільки

$$[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G),$$

то $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Аналогічно $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$. Отже, $m \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$ і $x^2 \in Z(G)$, що неможливо.

Нехай $|\overline{A}| = 4$, $\overline{A} = \langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle$ елементарна абелева підгрупа порядку 4. Якщо $\overline{A} = \overline{G}$, то $G' \subseteq \omega(N_G^A)$ і $G \in \overline{HA}_2$ -групою, тобто $G = N_G^A$, що неможливо за припущенням.

Нехай $\overline{A} \neq \overline{G}$. Позначимо $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{A})$. Тоді

$$[\overline{N} : C_{\overline{N}}(\overline{A})] = 2.$$

Група $C_{\overline{N}}(\overline{A})$ не містить нециклічних абелевих підгруп порядку 8, оскільки повний прообраз такої групи $\in \overline{HA}_2$ -групою, що неможливо, враховуючи твердження 3.1.2. Тоді $C_{\overline{N}}(\overline{A}) = \overline{A}$ і

$$\overline{N} = C_{\overline{N}}(\overline{A}) \langle \overline{x}_1 \rangle,$$

де $\overline{x}_1^2 \in C_{\overline{N}}(\overline{A})$.

Остаточно маємо

$$\overline{N} = \overline{A} \langle \overline{x}_1 \rangle = (\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle) \langle \overline{x}_1 \rangle = \langle \overline{x}_2 \rangle \rtimes \langle \overline{y} \rangle, |\overline{x}_2| = 4,$$

де $[\overline{x}_2, \overline{y}] = \overline{x}_2^2 = \overline{x}$.

Позначимо $\overline{N}_1 = N_{\overline{G}}(\langle \overline{x}_2 \rangle)$. Оскільки $[\overline{N}_1 : C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle)] = 2$ і $\overline{y} \notin C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle)$, то

$$\overline{N}_1 = C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle) \rtimes \langle \overline{y} \rangle,$$

де $C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle)$ — циклічна підгрупа. Отже,

$$\overline{N}_1 = \langle \overline{z} \rangle \rtimes \langle \overline{y} \rangle, \overline{x}_2 \in \langle \overline{z} \rangle.$$

Тоді $\overline{N}_1' = \langle \overline{z}^2 \rangle$ і тому $\langle \overline{x}_2 \rangle$ — характеристична підгрупа групи \overline{N}_1 .

Покладемо $\bar{N}_2 = N_{\bar{G}}(\bar{N}_1)$. Тоді $\langle \bar{x}_2 \rangle \triangleleft \bar{N}_2$ і

$$\bar{N}_2 \subseteq N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle) = \bar{N}_1.$$

Це можливо лише за умови, що

$$\bar{N}_1 = \bar{G} = \langle \bar{z} \rangle \rtimes \langle \bar{y} \rangle, |\bar{z}| = 2^k > 2, |\bar{y}| = 2,$$

$$\bar{y}^{-1} \bar{z} \bar{y} = \bar{z}^{-1+2^{k-1}t}, t \in 0, 1.$$

Покажемо, що $t = 0$. Для довільного елемента $g \in \langle z, y \rangle$, $|g| \geq 8$ мають місце співвідношення $[g^2, N_G^A] = 1$ та $\langle g \rangle \cap N_G^A = \langle a^2 b^2 \rangle$. Нехай $z_1 = z^{2^{k-1}}$ і

$$y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a^\alpha b^\beta,$$

де z та y — прообрази елементів \bar{z} та \bar{y} відповідно. Оскільки $|z| > 8$, то $|zy| = 8$ і

$$(zy)^4 = a^2 b^2 = a^{2\alpha+2\beta\alpha} b^{2\beta}.$$

Таким чином, $\alpha \equiv \beta \equiv 0 \pmod{2}$ та $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a_1$, де $a_1 \in \omega(G)$.

Оскільки $[z_1, y] \in \omega(G)$, покладемо $[z_1, y] = a_2$, де $a_2 \in \omega(G)$. Враховуючи, що $y^2 \in \omega(N_G^A)$, маємо

$$y^{-2} z y^2 = y^{-1} z^{-1} z_1 a_1 y = z a_2 = z.$$

Отже, $a_2 = 1$ і $z_1 \in Z(G)$, що неможливо. Таким чином, $\bar{y}^{-1} \bar{z} \bar{y} = \bar{z}^{-1}$. Переходячи до прообразів, одержимо

$$y^{-1} z y = z^{-1} a^l b^s.$$

Тоді з умов

$$\langle zy \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(N_G^A)$$

та $(zy)^2 = y^2 a^l b^s \in N_G^A$ випливає, що $l \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$, тому

$$y^{-1} z y = z^{-1} a^{2l} b^{2s} = z^{-1} z_2,$$

де $z_2 \in \omega(N_G^A)$.

Враховуючи співвідношення

$$[\langle z \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G), [z^{2^{k-1}}, y] \in \omega(G),$$

робимо висновок, що

$$[\langle z^{2^{k-1}} \rangle, G] \subseteq \omega(G).$$

Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить $\omega(G)$, то елемент $z^{2^{k-1}}$ порядку 4 нормалізує кожну таку підгрупу. Це означає, що $z^{2^{k-1}}$ належить нормі N_G^A . Маємо протиріччя. Отже, $G = N_G^A$. \square

Теорему доведено. □

З теорем 3.3.1 та 3.4.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.4.5. *Будь-яка локально скінченна 2-група G з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп тоді і тільки тоді не містить підгрупи кватерніонів, коли такої підгрупи не містить норма N_G^A .*

3.5 Скінченні 2-групи з циклічним центром і недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

Розглянемо тепер властивості скінченних 2-груп, що мають циклічний центр і недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп.

Наступне твердження описує будову скінченних \overline{HA}_2 -груп, центр яких циклічний.

Лема 3.5.1. *Нехай G — скінченна недедекіндова 2-група з циклічним центром. Якщо G збігається з нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп, то $G \in \overline{HA}_2$ -групою одного з типів: 1), 2) при $m = 1, 3, 10$) або 11) твердження 3.1.2.*

Доведення леми випливає з твердження 3.1.2.

Наступне твердження стосується скінченних 2-груп, які мають недедекіндову норму N_G^A , й узагальнює результат леми 3.2.3 за умови, що нижній шар норми N_G^A — елементарна абелева група порядку 4.

Лема 3.5.2. *Нехай норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп скінченної 2-групи G недедекіндова і відмінна від групи типу 2) твердження 3.1.2 при $m = 1$. Якщо нижній шар $\omega(N_G^A)$ — елементарна абелева підгрупа порядку 4, то N_G^A містить усі інволюції групи G і*

$$\omega(N_G^A) = \omega(G).$$

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп задовольняють умови леми. Тоді $N_G^A \in$ групою одного з типів 4)–11) або типу 2) при $m > 1$ твердження 3.1.2.

З умови $\omega(N_G^A) \triangleleft N_G^A$ та характеристичності підгрупи $\omega(N_G^A)$ в N_G^A маємо $\omega(N_G^A) \triangleleft G$, звідки

$$\omega(N_G^A) \cap Z(G) \neq E.$$

Якщо $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$, то за лемою 3.2.3

$$\omega(N_G^A) = \omega(G).$$

Отже, далі будемо вважати, що центр $Z(G)$ циклічний. З цього також слідує, що N_G^A не є групою типу 6) твердження 3.1.2, бо нижній шар такої групи міститься у центрі групи.

Нехай для визначеності

$$\omega(N_G^A) = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle, |a_1| = |a_2| = 2, a_1 \in Z(G).$$

Припустимо, що містить G інволюцію $x \notin N_G^A$. Тоді підгрупа $\langle a_1, x \rangle$ абелева і нормальна у групі $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$. Оскільки

$$[G_1 : C_{G_1}(\langle a_1, x \rangle)] \leq 2,$$

то для довільного елемента $y \in N_G^A$ маємо $[y^2, x] = 1$.

Якщо N_G^A — група одного з типів 4)–5), 7)–9), 11) або типу 2) твердження 3.1.2 при $m > 1$, то

$$[(N_G^A)^2, \langle x \rangle] = E.$$

Тоді $[\omega(N_G^A), \langle x \rangle] = E$ і $\langle x \rangle \triangleleft G_1$ як перетин нормальних підгруп $\langle a_1, x \rangle$ та $\langle a_2, x \rangle$. Але у такому випадку група

$$G_1 = \langle x \rangle \times N_G^A$$

містить елементарну абелеву підгрупу порядку 8, що неможливо за лемою 3.2.2. Отже, у цих випадках $\omega(N_G^A) = \omega(G)$.

Нехай тепер N_G^A — група типу 10) твердження 3.1.2. Тоді $Z(N_G^A) = \langle h_1^2 \rangle$, де $h_1 \in H$, $|h_1| = 4$ і $h_1^2 = a_1 \in Z(G)$. За доведеним вище для інволюції x маємо

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle a_1 \rangle = \langle h_1^2 \rangle.$$

Тому $[x, b^2] = [x, h_1] = 1$. Якщо при цьому $[x, h_2] = 1$, то

$$\langle x, h_2 \rangle \cap N_G^A = \langle h_2 \rangle \triangleleft N_G^A,$$

що неможливо.

Отже, $[x, h_2] = h_1^2$ і $|xh_2| = 2$. Оскільки $xh_2 \notin N_G^A$, $[xh_2, b] \in \langle h_1^2 \rangle$, то

$$[xh_2, b^2] = [xh_2, h_1] = 1.$$

З іншого боку,

$$[xh_2, b^2] = [xh_2, h_1] = [h_2, h_1] = h_1^2 \neq 1.$$

Протириччя доводить, що $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. □

Лема 3.5.3. Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп скінченної 2-групи G недедекіндова, має нециклічний центр і нецентральный в G нижній шар $\omega(N_G^A)$, то

$$G = C \langle y \rangle,$$

де $C = C_G(\omega(N_G^A))$, $C \triangleleft G$, $y^2 \in C$ і $|y| > 4$. При цьому будь-яка абелева нециклічна підгрупа групи G міститься в C і

$$N_G^A = N_C^A \subseteq C.$$

Доведення. З умови леми випливає, що норма N_G^A є групою одного з типів 2) при $m > 1$, 4)–5), 7)–9) або 11) твердження 3.1.2. У кожному з цих випадків $\omega(N_G^A)$ – елементарна абелева підгрупа порядку 4, причому $\omega(N_G^A) \not\subseteq Z(G)$ за умовою.

Позначимо $C = C_G(\omega(N_G^A))$. Враховуючи, що $\omega(N_G^A) \triangleleft G$, маємо $C \triangleleft G$, $[G : C] = 2$. Отже,

$$G = C \langle y \rangle,$$

де $y^2 \in C$.

Оскільки $\omega(N_G^A) \subseteq Z(N_G^A)$, то $N_G^A \subseteq C$ і $y \notin N_G^A$. За лемою 3.5.2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$, тому $|y| > 2$. Нехай $|y| = 4$, тоді підгрупа $\langle y \rangle \omega(G)$ є групою діедра порядку 8. Оскільки

$$\langle y \rangle \omega(G) = \langle y, b \rangle,$$

де b – нецентральна інволюція $\omega(N_G^A)$, то $|yb| = 2$. Але за таких умов $yb \in \omega(G)$, $y \in \omega(G)$, що неможливо. Отже, $|y| > 4$. Враховуючи, тепер, що кожна абелева нециклічна підгрупа містить $\omega(N_G^A)$, робимо висновок, що вона міститься в C . Тому

$$N_G^A = N_C^A \subseteq C.$$

□

Наведемо ще одну властивість скінченних 2-груп, що мають недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп і циклічний центр.

Лема 3.5.4. *Нехай G – скінченна неабелева 2-група, в якій усі елементи, порядок яких не перевищує 4 містяться у нормальній підгрупі*

$$H = \langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle,$$

де $|a_2| = 4$, $|b| = 2$, $a_2^2 = a_1 \in Z(G)$, $b \notin Z(G)$ і $\langle a_2 \rangle \triangleleft G$. Тоді $G \in \overline{HA}_2$ -групою одного з типів:

$$1) G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, \text{ де } |a| = 2^n \geq 8, |b| = 2, [a, b] = a_1;$$

$$2) G = \langle a \rangle \langle b \rangle, \text{ де } |a| = 2^n \geq 8, |b| = 8, a^{2^{n-1}} = b^4, b^{-1}ab = a^{-1}.$$

Доведення. Нехай група G задовольняє умови леми. Тоді G не містить кватерніонних підгруп, і кожна нециклічна підгрупа групи G містить підгрупу $N = \langle a_1 \rangle \times \langle b \rangle$.

Оскільки фактор-група G/N має єдину інволюцію, то вона є або циклічною, або кватерніонною 2-групою. Якщо G/N – циклічна група, то $G' \subseteq N$

і в G нормальні усі нециклічні підгрупи. Отже, G є негамільтоновою \overline{H}_2 -групою. З опису таких груп (твердження 2.1.1) випливає, що G — група типу 1) даної леми.

Нехай G/N — група кватерніонів порядку 8. Неважко довести, що і у цьому випадку в G нормальні усі нециклічні підгрупи і вона є негамільтоновою \overline{H}_2 -групою типу 2) даної леми при $n = 3$.

Нехай тепер G/N — узагальнена група кватерніонів порядку не меншого, ніж 16. Враховуючи результати роботи [19], група G не містить неметациклічних підгруп, усі власні підгрупи яких метациклічні. Тому G — метациклічна група і

$$G = \langle g \rangle \langle h \rangle, \langle g \rangle \triangleleft G.$$

Доведемо, що $|g| \geq 8$ і $|h| \geq 8$. Справді, в іншому випадку узагальнена група кватерніонів

$$G/N = \overline{G} = \langle \bar{g} \rangle \langle \bar{h} \rangle$$

мала б два твірних елементи \bar{g} і \bar{h} , принаймні один з яких мав би порядок 2, що неможливо.

Якщо $|h| > 8$, то з будови фактор-групи \overline{G} випливає, що $\langle \bar{h} \rangle \triangleleft \overline{G}$. Але за доведеним $\langle \bar{g} \rangle \triangleleft \overline{G}$ і знову маємо протиріччя з будовою узагальненої групи кватерніонів порядку не менше, ніж 16. З цього слідує, що $|h| = 8$.

Нехай $|\overline{G}| = 2^m \geq 16$. Тоді $|G| = 2^{m+2}$, $|g| = 2^m$ і $h^4 = g^{2^{m-1}}$. У фактор-групі $\overline{G} = G/N$ має місце співвідношення

$$h^{-1}ghN = g^{-1}N.$$

Враховуючи, що $\langle g \rangle \triangleleft G$, дістанемо $h^{-1}gh = g^s$, звідки $g^{-1}N = g^sN$ і $g^{s+1} \in N$.

Якщо $s = -1$, то одержимо групу G , в якій усі абелеві підгрупи нормальні, тобто \overline{HA}_2 -групу типу 2) даної леми при $n > 3$.

Нехай $s \neq -1$. Тоді $s = -1 + 2^{m-1}$ і $[g, h^2] = 1$. Оскільки у цьому випадку

$$h^{-1}(gh^2)h = (gh^2)^{-1},$$

то

$$G = \langle gh^2 \rangle \langle h \rangle,$$

де $h^4 = (gh^2)^{2^{m-1}}$. Отже, знову маємо групу типу 2) даної леми. \square

Наступне твердження дозволяє обмежити число \overline{HA}_2 , які можуть слугувати нормою абелевих нециклічних підгруп скінченної 2-групи з циклічним центром.

Лема 3.5.5. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп скінченної 2-групи G є групою одного з типів 4)–8) або 2) при $m > n$ твердження 3.1.2, то центр $Z(G)$ групи G нециклічний.*

Доведення. Нехай норма N_G^A є групою одного з вказаних в умові леми типів. Тоді центр норми $Z(N_G^A)$ нециклічний. Якщо норма N_G^A є групою типу 2) при $m > n$ або типу 6) твердження 3.1.2, то $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$ і G має нециклічний центр.

Отже, надалі будемо вважати, що N_G^A — група одного з типів: 2) при $m > n, 4)–5)$ або 7)–8). У кожному з цих випадків $\omega(N_G^A)$ — елементарна абелева підгрупа порядку 4. Оскільки $\omega(N_G^A) \subseteq Z(N_G^A)$, то за лемою 3.5.2

$$\omega(N_G^A) = \omega(G).$$

Припустимо, що всупереч твердженню леми $\omega(N_G^A) \not\subseteq Z(G)$. Тоді з умови $\omega(N_G^A) \triangleleft G$ випливає, що

$$\omega(N_G^A) \cap Z(G) \neq E.$$

Нехай $\omega(N_G^A) = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2| = 2$, де $a_1 \in Z(G)$ і $a_2 \notin Z(G)$.

Позначимо $C = C_G(\omega(N_G^A))$. За лемою 3.5.3

$$G = C \cdot \langle y \rangle, |y| > 4, y^2 \in C,$$

причому C містить усі абелеві нециклічні підгрупи групи G і тому

$$N_G^A = N_C^A.$$

Оскільки норма N_C^A недедекіндова і $Z(C)$ — нециклічний, то за теоремою 3.4.2 C є або негамільтоновою \overline{HA}_2 -групою з нециклічним центром і тоді

$$C = N_C^A = N_G^A$$

або

$$C = H \cdot Q$$

— добуток групи кватерніонів $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ порядку 8 та узагальненої групи кватерніонів $Q = \langle t, q \rangle$, $|t| = 2^k > 8$, $t^{2^{k-1}} = q^2$, $q^{-1}tq = t^{-1}$, $[H, Q] \subseteq \omega(C)$ і

$$N_C^A = N_G^A = \langle t^{2^{k-2}} \rangle \times H.$$

В останньому випадку норма $N_G^A \in \overline{HA}_2$ -групою типу 6) твердження 3.1.2, що неможливо.

Отже, далі будемо вважати, що $C = N_G^A = N_C^A$ і

$$G = N_G^A \cdot \langle y \rangle, y^2 \in N_G^A.$$

Якщо N_G^A — неметациклічна, то вона є негамільтоновою \overline{HA}_2 -групою експоненти 4. З цього випливає, що $|y| = 8$ і $y^4 = a_1 \in Z(G)$.

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/\omega(G) \cong \overline{N}_G^A \cdot \langle \overline{y} \rangle,$$

де $\overline{y}^2 \in \overline{N}_G^A$ і $|\overline{y}| = 4$. Оскільки

$$\omega(\overline{G}) = \overline{N}_G^A \triangleleft \overline{G},$$

$|\overline{N}_G^A| \geq 8$ і \overline{y} індукує на $\omega(\overline{G})$ автоморфізм другого порядку, то в $\omega(\overline{G})$ знайдеться інволюція \overline{z} , переставна з \overline{y} така, що

$$\langle \overline{y} \rangle \cap \langle \overline{z} \rangle = \overline{E}.$$

Переходячи до прообразів, будемо мати $[z, y] = a$, де $a \in \omega(G)$. Тоді з умови $[z^2, y] = 1$ випливає, що $z^2 = a_1$. Нехай $a = a_1$, тоді $[z, y^2] = 1$ і $|y^2 z| = 2$. Але у такому випадку $y^2 \in \langle z \rangle \omega(G)$ і у фактор-групі \overline{G} перетин $\langle \overline{y} \rangle \cap \langle \overline{z} \rangle$ нетривіальний. Протириччя.

Отже, $a \neq a_1$ і без порушень загальності міркувань можна вважати, що $a = a_2$. Тоді

$$y^{-1}zy = za_2, [z, y^2] = z^2 = a_1$$

і $\langle y^2, z \rangle$ — група кватерніонів, що неможливо, якщо норма N_G^A є групою типу 4) або 5) твердження 3.1.2.

Нехай N_G^A містить групу кватерніонів, тобто є групою типу 7) або 8) твердження 3.1.2. Тоді

$$N_G^A = H \cdot Q$$

— прямий чи напівпрямий добуток двох груп кватерніонів H та Q і $[H, Q] \subseteq Q^2$.

Повернемося до групи

$$G = N_G^A \cdot \langle y \rangle, y^2 \in N_G^A.$$

Враховуючи включення $\omega(N_G^A) \subseteq Z(N_G^A)$, робимо висновок, що $\langle y^2, a_2 \rangle$ — абелева нециклічна і тому нормальна в G підгрупа. У фактор-групі

$$\widetilde{G} = G/\langle y^2, a_2 \rangle \cong \widetilde{N}_G^A \rtimes \langle \widetilde{y} \rangle$$

підгрупа \widetilde{N}_G^A елементарна абелева порядку 8. Оскільки \widetilde{y} індукує на \widetilde{N}_G^A автоморфізм порядку 2, то завжди можна вказати інволюції $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2 \in \widetilde{N}_G^A$, переставні з \widetilde{y} . Переходячи до прообразів, одержимо

$$[z_i, y] = y^{2m_i} a^{s_i}, i = 1, 2.$$

Якщо $s_1 = s_2 = 1$, то $[z_1 z_2, y] = y^{2t}$. При цьому, якщо $(t, 2) = 1$, то $|y z_1 z_2| \leq 4$ і $y \in N_G^A$ за доведеним, що неможливо. Отже, $t = 2t_1$ і

$$[z_1 z_2, y] = y^{4t_1} \in Z(G).$$

Але за таких умов

$$[z_1 z_2, y^2] = [(z_1 z_2)^2, y] = 1.$$

З другої частини рівності маємо

$$(z_1 z_2)^2 = a_1 = y^4,$$

тому $|z_1 z_2 y^2| = 2$, що суперечить будові норми N_G^A .

Таким чином можна вважати, що хоча б одне з чисел $s_i = 0$. Але тоді $[z_i, y] = y^{2m_i}$ і повторюючи наведені міркування, знову приходимо до протиріччя. Тобто, і у цьому випадку $G = C$ і $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$. \square

Отже, якщо скінченна 2-група має норму N_G^A одного з типів 4)–8) або типу 2) при $m > n$ твердження 3.1.2, то її центр нециклічний. Тому залишається дослідити групи, які мають циклічний центр та норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, що є групою одного з типів 1)–3), 9)–11) твердження 3.1.2.

Наступний приклад підтверджує, що у випадку, коли норма N_G^A є групою типу 9) твердження 3.1.2, центр $Z(G)$ групи може бути циклічним.

Приклад 3.5.1. $G = (\langle b \rangle \rtimes H) \langle y \rangle$, де $|b| = 4$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[b, h_2] = 1$, $y^2 = h_1$, $[y, h_2] = b^2 h_1^2$, $[y, b] = h_2$.

У цій групі усі абелеві нециклічні підгрупи містяться у групі $\langle b \rangle \rtimes H$ і є нормальними у ній, тому неважко переконатися, що

$$N_G^A = \langle b \rangle \rtimes H.$$

При цьому $Z(G) = \langle h_1^2 \rangle$ циклічний.

Лема 3.5.6. Якщо скінченна 2-група G має норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, що є групою типу 3) твердження 3.1.2:

$$N_G^A = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[b, c] = [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $|b| = |c| = 2$, $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E$, то

$$G = N_G^A.$$

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$ і доведемо, що N_G^A містить усі інволюції групи G . Справді, в іншому випадку для довільної інволюції $z \in G \setminus N_G^A$ маємо

$$\langle z, h_1^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle z \rangle N_G^A.$$

Тому $[G_1 : C_{G_1}(\langle z, h_1^2 \rangle)] \leq 2$ і $G_1 \setminus \langle h_1^2 \rangle$ містить інволюцію $y \neq h_1^2$, переставну із z . З цього випливає

$$\langle y, z \rangle \cap N_G^A = \langle y \rangle \triangleleft N_G^A,$$

що неможливо. Отже, усі інволюції групи G містяться в N_G^A .

Припустимо тепер, що в $G \setminus N_G^A$ знайдеться елемент x порядку 4. За ле-мою 3.2.4 $x^2 = h_1^2$. При цьому жоден елемент a порядку 4 з норми N_G^A непереставний з x , бо інакше $|ax|=2$, $x \in N_G^A$ за доведенням.

Позначимо $G_2 = \langle x \rangle N_G^A$ та розглянемо фактор-групу

$$\overline{G_2} = G_2 / \langle h_1^2 \rangle.$$

Оскільки $\overline{N_G^A}$ — нормальна в $\overline{G_2}$ елементарна абелева група порядку 16 і \overline{x} індукує на $\overline{N_G^A}$ автоморфізм порядку 2, то знайдуться інволюції $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in \overline{N_G^A}$, $\overline{y_1} \neq \overline{y_2}$, переставні з \overline{x} . Переходячи до прообразів, будемо мати

$$[x, y_i] \in \langle h_1^2 \rangle, i = 1, 2.$$

Неважко довести, що група $\langle y_1, y_2 \rangle$ містить інволюцію $y \neq h_1^2$, переставну з x . Тоді $\langle x, y \rangle \triangleleft G_2$ як абелева нециклічна підгрупа і

$$G'_2 \subseteq \langle x, y \rangle \cap N_G^A = \langle y, h_1^2 \rangle.$$

Нехай t — довільна нецентральна інволюція з N_G^A , відмінна від y . Покладемо $[x, t] = y^m h_1^{2k}$, $m, k \in \{0, 1\}$. Тоді $[x, t^2] = h_1^{2m}$. З іншого боку, $[x, t^2] = 1$, отже $m = 0$ і

$$[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle h_1^2 \rangle.$$

Проте, у такому випадку група G_2 буде містити інволюцію, яка не належить N_G^A , всупереч доведеному вище. Отже, N_G^A містить усі елементи порядку 4 групи G .

Враховуючи, що $G \neq N_G^A$, існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 8$. Оскільки $x^2 \in N_G^A$, $|x^2| = 4$, і в N_G^A нормальні всі циклічні підгрупи порядку 4, то

$$\langle x^2 \rangle \triangleleft G_3 = \langle x \rangle N_G^A.$$

Розглянемо фактор-групу $\overline{G_3} = G_3 / \langle x^2 \rangle$. Оскільки $\overline{N_G^A}$ — нормальна елементарна абелева група порядку 8, на якій \overline{x} індукує автоморфізм порядку 2, то знайдуться інволюції $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in \overline{N_G^A}$, $\overline{y_1} \neq \overline{y_2}$, переставні з \overline{x} . Переходячи до прообразів, одержимо

$$[x, y_i] \in \langle x^2 \rangle, i = 1, 2.$$

Неважко переконатись, що $[x, y_i] \in \langle h_1^2 \rangle$ і група $\langle x^2, y_1, y_2 \rangle$ містить інволюцію y , переставну з x . Тоді $\langle x, y \rangle \triangleleft G_3$ як абелева нециклічна підгрупа і

$$G'_3 \subseteq \langle x, y \rangle \cap N_G^A = \langle y, x^2 \rangle.$$

Покладемо $[x, t] = x^{2m} y^k$, де t — будь-яка нецентральна інволюція з N_G^A , відмінна від y . Оскільки N_G^A містить усі елементи порядку 4, то враховуючи

умову $[x, t^2] = 1$, робимо висновок, що $[x, t] \in \langle h_1^2 \rangle$. Але тоді $[x^2, t] = 1$ і $x^2 \in Z(G_3)$, що неможливо, бо норма N_G^A не містить центральних елементів порядку 4. Отримане протиріччя доводить, що $G = N_G^A$. \square

Лема 3.5.7. *Нехай G — скінченна 2-група, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 10) твердження 3.1.2:*

$$N_G^A = (H \times \langle a \rangle) \langle b \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|a| = 2$, $|b| = 8$, $b^2 = h_1$, $[h_2, b] = a$, $[a, b] = [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$. Тоді в G нормальні усі абелеві нециклічні підгрупи і $G = N_G^A$.

Доведення. Нехай норма N_G^A є групою типу, вказаного в умові леми. Тоді $\omega(N_G^A) = \langle h_1^2, a \rangle$ і $Z(N_G^A) = \langle h_1^2 \rangle \subset Z(G)$.

За лемою 3.5.2 N_G^A містить усі елементи порядку 2 групи G і $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Позначимо $C = C_G(\omega(G))$. Тоді $[G : C] = 2$ і

$$G = C \langle b \rangle, b^2 \in C.$$

За доведеним нижній шар $\omega(N_G^A)$ містить усі інволюції централізатора C , тому за лемою 3.2.4 фактор-група $\overline{C} = C / \langle a \rangle$ містить єдину інволюцію. Оскільки \overline{C} неабелева, то вона є кватерніонною 2-групою:

$$\overline{C} \cong \overline{Q} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle, |\overline{x}| = 2^n \geq 4, |\overline{y}| = 4, \overline{x}^{2^{n-1}} = \overline{y}^2, \overline{y}^{-1} \overline{x} \overline{y} = \overline{x}^{-1}.$$

Переходячи до прообразів та враховуючи лему 3.2.4, маємо

$$x^{2^{n-1}} = y^2 = h_1^2, y^{-1}xy = x^{-1}a^m, m \in \{0, 1\}.$$

Якщо $m = 1$, то $y^{-1}xy = x^{-1}a$ і $(xy)^2 = h_1^2a \notin \langle h_1^2 \rangle$, що неможливо. Отже, $m = 0$, $y^{-1}xy = x^{-1}$ і

$$C = Q \times \langle a \rangle.$$

Без порушень загальності можна вважати, що $H \subseteq Q$, $h_1 \in \langle x \rangle$ і $\langle h_2 \rangle = \langle y \rangle$. Якщо при цьому $|Q| > 8$, то $h_2 \notin N_G(\langle a, xh_2 \rangle)$, що неможливо, оскільки $h_2 \in N_G^A$. Отже, $Q = H$ і

$$C = H \times \langle a \rangle \subset N_G^A.$$

Тому

$$G = C \langle b \rangle = N_G^A.$$

\square

Лема 3.5.8. *Якщо G — скінченна 2-група, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 11) твердження 3.1.2:*

$$N_G^A = \langle a \rangle \langle b \rangle, |a| = 2^n, n \geq 3, |b| = 8, a^{2^{n-1}} = b^4, b^{-1}ab = a^{-1},$$

то в G нормальні усі абелеві нециклічні підгрупи і $G = N_G^A$.

Доведення. Нехай група G має вказану норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Тоді нижній шар норми

$$\omega(N_G^A) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle \times \langle a^{2^{n-2}} b^2 \rangle$$

— елементарна абелева група порядку 4, причому $a^{2^{n-1}} = a_1 \in Z(N_G^A)$ і $a^{2^{n-2}} b^2 = a_2 \notin Z(N_G^A)$. За лемою 3.5.2 $\omega(N_G^A)$ містить усі інволюції даної групи. Доведемо, що N_G^A містить й усі елементи порядку 4 групи G .

Позначимо

$$H = \langle a^{2^{n-2}} \rangle \omega(N_G^A) = \langle a^{2^{n-2}} \rangle \times \langle a_2 \rangle.$$

Тоді $H \triangleleft G$ як добуток двох характеристичних підгруп норми N_G^A .

Припустимо, що існує елемент $y \in G \setminus H$, $|y| = 4$. Оскільки центр норми N_G^A циклічний, то за лемою 3.2.4 $y^2 = a_1 \in H$. Отже, група

$$G_1 = \langle y \rangle H$$

має порядок 16 і фактор-групи $G_1/\omega(N_G^A)$ і $G_1/\langle a^{2^{n-2}} \rangle$ — абелеві. Тоді

$$G_1' \subseteq \omega(N_G^A) \cap \langle a^{2^{n-2}} \rangle = \langle a_1 \rangle.$$

Якщо при цьому $[y, a^{2^{n-2}}] = 1$, то $|ya^{2^{n-2}}| = 2$, що суперечить лемі 3.5.2. Отже,

$$[y, a^{2^{n-2}}] = y^2 = a_1.$$

Позначимо $A = \langle y, \omega(N_G^A) \rangle$. Оскільки $|A| = 8$ і за лемою 3.5.2 $\omega(N_G^A)$ містить усі інволюції даної групи, то підгрупа A абелева. Враховуючи, що підгрупа $A - N_G^A$ -допустима, одержимо

$$[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq A \cap N_G^A = \omega(N_G^A).$$

Покладемо $a^{-1}ya = ya_1^\alpha a_2^\beta$. Тоді

$$a^{-2}ya^2 = ya_1^{2\alpha} a_2^{2\beta} = y$$

і $[y, a^{2^{n-2}}] = 1$, всупереч доведеному вище. Отже, $y \in H \subset N_G^A$. З останнього випливає, що група G задовольняє усі умови леми 3.5.4 і тому є групою одного із типів 1) або 2), зазначених у її формулюванні.

Розглянемо фактор-групу $G/\omega(N_G^A)$. Оскільки усі елементи групи G , порядок яких не перевищує 4, містяться у підгрупі

$$H = \langle a^{2^{n-2}} \rangle \omega(N_G^A),$$

то $G/\omega(N_G^A)$ має єдину інволюцію, а значить, є циклічною або кватерніонною 2-групою. Враховуючи, що

$$G/\omega(N_G^A) \supseteq N_G^A/\omega(N_G^A),$$

де $N_G^A/\omega(N_G^A)$ — кватерніонна 2-група, робимо висновок, що $G/\omega(N_G^A)$ також буде кватерніонною 2-групою. Отже, G — група типу 2) леми 3.5.4 і $G = N_G^A$. \square

Теорема 3.5.1. *Скінченні 2-групи з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп та циклічним центром вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) G — негамільтонова \overline{HA}_2 -група з циклічним центром, $G = N_G^A$;
- 2) $G = (\langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|x| = 2^n$, $n > 3$, $|b| = |c| = 2$, $[x, c] = x^{\pm 2^{n-2}}b$, $[b, c] = [x, b] = x^{2^{n-1}}$, $N_G^A = (\langle x^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$;
- 3) $G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|x| = 2^n$, $n > 2$, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[x, c] = [x, b] = 1$, $[b, c] = [c, d] = [b, d] = x^{2^{n-1}}$, $d^{-1}xd = x^{-1}$, $N_G^A = (\langle x^{2^{n-2}} \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$;
- 4) $G = (\langle c \rangle \rtimes H) \langle y \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|c| = 4$, $[c, h_1] = c^2$, $[c, h_2] = 1$, $y^2 = h_1$, $[y, h_2] = c^2h_1^2$, $[y, c] = h_2^{\pm 1}$, $N_G^A = \langle c \rangle \rtimes H$;
- 5) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = 8$, $|b| = 2$, $[a, b] = a^3$; $N_G^A = \langle a^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$;
- 6) $G = (H \times \langle b \rangle) \langle a \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = 2^n > 4$, $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2$, $a^2 = h_1^{2^{n-2}}$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$, $|b| = 2$, $[a, h_1] = a^{4k}$, $[a, h_2] = a^{4l}b$, $[a, b] = a^4$; $k, l \in \{0, 1\}$; $N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$;
- 7) $G = \langle y \rangle \langle b \rangle$, де $|y| = 2^k$, $k \geq 4$, $|b| = 2^m$, $m \geq 2$, $Z(G) = \langle y^{2^m} \rangle$, $[y, b] = y^{2^{k-m}s}$, $(s, 2) = 1$; $N_G^A = \langle y^{2^{k-m}} \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Доведення. Нехай група G та її норма абелевих нециклічних підгруп задовольняють умови теореми. Якщо при цьому $G = N_G^A$, то за лемою 3.5.1 G — група типу 1) теореми 3.5.1. Тому далі вважаємо, що $G \neq N_G^A$.

Оскільки G має циклічний центр і недедекіндову норму N_G^A , то за лемами 3.5.5 — 3.5.8 норма N_G^A є групою одного з типів 1), 2) або 9) твердження 3.1.2.

Продовжимо доведення теореми в наступних лемах.

Лема 3.5.9. *Якщо скінченна 2-група G має недедекіндову норму $N_G^A \neq G$, що є групою типу 1) твердження 3.1.2*

$$N_G^A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де $|a| = 2^n, n \geq 2, |b| = |c| = 2, [a, c] = [a, b] = 1, [b, c] = a^{2^{n-1}}$, то G — група одного з типів 2) або 3) теореми 3.5.1.

Доведення. Нехай $G \neq N_G^A$. Оскільки $N_G^A \triangleleft G$, то у фактор-групі $\overline{G} = G / \langle a \rangle$

$$\overline{N_G^A} \cap Z(\overline{G}) \neq \overline{E}.$$

Не порушуючи загальності міркувань можна вважати, що $\bar{b} \in Z(\overline{G})$. Тоді $\langle a, b \rangle \triangleleft G$ і

$$\omega(\langle a, b \rangle) = \langle a^{2^{n-1}}, b \rangle \triangleleft G.$$

Позначимо $C = C_G(\langle a^{2^{n-1}}, b \rangle)$. Оскільки $C \triangleleft G$ і $[G : C] = 2$, то

$$G = C \rtimes \langle c \rangle,$$

де $c \in N_G^A, |c| = 2$. За лемою 3.2.4 фактор-група $\overline{C} = C / \langle b \rangle$ має єдину інволюцію і \overline{C} є циклічною групою або узагальненою групою кватерніонів.

Нехай група \overline{C} циклічна, тоді її повний прообраз $C = \langle x \rangle \times \langle b \rangle$ — абелева група і

$$[x, c] \in C \cap N_G^A = \langle a, b \rangle.$$

Покладемо $[x, c] = a^m b^k$. Якщо $|[x, c]| = 2$, то $G' \subset \langle a^2 \rangle$ і всупереч припущенню $G \in \overline{HA}_2$ -групою. Отже, $|[x, c]| > 2$. Якщо $|a| = 4$, то з умови $[x, c^2] = 1$ випливає, що $[x, c] = a^{\pm 1} b$, звідки $(xc)^2 \in Z(G)$ і $|x| \leq 8$. Тоді $x^2 = a^{\pm 1} b$, але за таких умов

$$c \notin N_G(\langle a^2 \rangle \times \langle xbc \rangle),$$

тобто $c \notin N_G^A$, що неможливо.

Нехай $|a| > 4$, тоді $m = 2^{n-2} m_1$, де $(m_1, 2) = 1, (k, 2) = 1$. Тоді

$$[x, c] = a^{\pm 2^{n-2}} b, (xc)^2 = x^2 a^{\pm 2^{n-2}} b$$

і $(xc)^2 \in Z(G)$. Оскільки $Z(G) = \langle a \rangle, |x| > |a|$, можна вважати $(xc)^2 = a$.

Позначимо $xc = y$. Тоді $|y| = 2^{n+1}, [y, b] = y^{2^n}, [y, c] = y^{\pm 2^{n-1}} b$ і

$$G = (\langle y \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$$

— група типу 2) теореми 3.5.1.

Нехай тепер \overline{C} — узагальнена група кватерніонів,

$$\overline{C} = \langle \overline{h_1}, \overline{h_2} \rangle,$$

де $|\overline{h_1}| = 2^n, n \geq 2, |\overline{h_2}| = 4, \overline{h_1}^{2^{n-1}} = \overline{h_2}^2, \overline{h_2}^{-1} \overline{h_1} \overline{h_2} = \overline{h_1}^{-1}$.

Позначимо h_1 та h_2 — прообрази елементів $\overline{h_1}$ та $\overline{h_2}$ відповідно. Оскільки центр $Z(G)$ циклічний, то за лемою 3.2.4

$$h_1^{2^{n-1}} = h_2^2 = a^{2^{n-1}},$$

$$h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}b^m, m \in \{0, 1\}.$$

Якщо при цьому $m \neq 0$, то $(h_1h_2)^2 = h_2^2b = a^{2^{n-1}}b$, що неможливо, бо $a^{2^{n-1}} \notin \langle h_1h_2 \rangle$. Отже, $m = 0$ і

$$C = H \times \langle b \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — узагальнена група кватерніонів. Зазначимо також, що з умови $\langle a \rangle \triangleleft G$ випливає, що $\langle a \rangle \subseteq \langle h_1 \rangle$ і оскільки

$$[h_2, c] \in \langle h_2, b \rangle \cap \langle b, c \rangle = \langle a^{2^{n-1}}, b \rangle$$

та $[h_2, c^2] = 1$, то $[h_2, c] \in \langle a^{2^{n-1}} \rangle$. Але тоді один з елементів h_2c або h_2bc матиме порядок 2, а значить одна з підгруп $\langle h_2c, a^{2^{n-1}} \rangle$ чи $\langle h_2bc, a^{2^{n-1}} \rangle$ — елементарна абелева порядку 4. Оскільки $\langle a \rangle \subseteq N_G^A$, то a має нормалізувати такі підгрупи, що можливо лише за умови, коли $|a| = 4$.

Виходячи з того, що підгрупа $\langle h_1h_2 \rangle \times \langle b \rangle$ — абелева нециклічна, маємо

$$[h_1h_2, c] \in (\langle h_1h_2 \rangle \times \langle b \rangle) \cap N_G^A = \langle a^2, b \rangle.$$

Тоді з леми 3.2.4 випливає, що $[h_1h_2, c] \in \langle a^2 \rangle$ і $[h_1, c] \in \langle a^2 \rangle$. Отже,

$$[H, N_G^A] = \langle a^2 \rangle.$$

Позначимо $B = \langle b, c \rangle$. Оскільки B — 2-породжена неабелева підгрупа, взаємний комутант $[B, G] \subseteq \langle a^2 \rangle$ і має порядок 2, то за [159]

$$G = BC_G(B).$$

Без порушень загальності можна вважати, що $H = C_G(B)$. Якщо $|H| = 8$, то $G \in \overline{HA}_2$ -групою, що суперечить припущенню. Тому $|H| > 8$ і G є групою типу 3) теореми 3.5.1. \square

Лема 3.5.10. *Якщо скінченна 2-група G з циклічним центром має норму $N_G^A \neq G$, що є групою типу 9) твердження 3.1.2*

$$N_G^A = \langle c \rangle \rtimes H,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|c| = 2^n > 2$, $[c, h_1] = c^{2^{n-1}}$, $[c, h_2] = 1$, то G — група типу 4) теореми 3.5.1.

Доведення. Нехай 2-група G має вказану в умові норму абелевих нециклічних підгруп і $N_G^A \neq G$. Оскільки

$$\omega(N_G^A) \subset Z(N_G^A)$$

і $\omega(N_G^A) \not\subset Z(G)$, то з лем 3.5.2 і 3.5.3 випливає, що $\omega(G) = \omega(N_G^A)$ і

$$G = C \langle y \rangle,$$

де $C = C_G(\omega(N_G^A)) \triangleleft G$, $y^2 \in C$, $|y| > 4$. Враховуючи, що C містить усі абелеві нециклічні підгрупи групи G , маємо

$$N_G^A \subseteq N_C^A \subseteq C.$$

Отже, C також є 2-групою, що має норму абелевих нециклічних підгруп типу 9) твердження 3.1.2 і нециклічний центр. Тоді з лем 3.4.4 та 3.4.5 випливає, що $C \in \overline{HA}_2$ -групою і тому

$$C = N_G^A = \langle c \rangle \rtimes H.$$

Отже,

$$G = C \langle y \rangle = (\langle c \rangle \rtimes H) \langle y \rangle,$$

де $|y| > 4$, $y^2 \in C$.

Нехай $|y| = 2^k$. Оскільки $y \notin C$, то

$$\omega(G) \cap \langle y \rangle \subseteq Z(G).$$

Позначимо $\langle a_1 \rangle = \omega(G) \cap \langle y \rangle$ та розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G / \omega(G) \cong \overline{C} \langle \overline{y} \rangle.$$

Оскільки нижній шар $\omega(\overline{C})$ є елементарною абелевою підгрупою порядку 8 і $\omega(\overline{C}) \triangleleft \overline{G}$, то $\omega(\overline{C})$ містить інволюцію \overline{z} таку, що $[\overline{z}, \overline{y}] = \overline{1}$ і

$$\langle \overline{z} \rangle \cap \langle \overline{y} \rangle = \overline{E}.$$

Переходячи до прообразів, покладемо $[z, y] = a$, де $|z| = 4$, $a \in \omega(G)$. Тоді $[z^2, y] = 1$, звідки $z^2 = a_1 \in Z(G)$. Якщо $a \in Z(G)$, то $[z, y^2] = 1$, $|y^{2^{k-2}} z| = 2$, що неможливо (бо елементи 4-го порядку з N_G^A такої властивості не мають). Отже, $a \notin Z(G)$ і $[z, y^2] = a_1$. З цього випливає, що $\langle z, y^2 \rangle$ — група кватерніонів і $|y| = 8$.

Якщо при цьому $|c| > 4$, то $a_1 = c^{2^{n-1}} \in Z(G)$ і $c^{2^{n-1}} \in \langle z, y^2 \rangle$. Проте, жодна група кватерніонів з N_G^A не містить $c^{2^{n-1}}$. Отже, $|c| = 4$, $c^2 \notin Z(G)$ і $a_1 = h_1^2 \in \langle z, y^2 \rangle$. Враховуючи будову підгруп кватерніонів з N_G^A , одержимо

$$\langle z, y^2 \rangle = \langle h_2 c^{2^m}, h_1 h_2^l c^s \rangle.$$

Припустимо, що $\langle y^2 \rangle \triangleleft G$. Тоді можна вважати, що

$$y^2 = h_2 c^{2m}, z = h_1 h_2^l c^s.$$

Перейдемо до фактор-групи

$$\tilde{G} = G / \langle y^2 \rangle \cong (\langle \tilde{c} \rangle \rtimes \langle \tilde{h}_1 \rangle) \rtimes \langle \tilde{y} \rangle.$$

Оскільки $\langle \tilde{c} \rangle$ — характеристична підгрупа з \tilde{N}_G^A , то $\langle \tilde{c} \rangle \triangleleft \tilde{G}$ і $[\tilde{c}, \tilde{y}] \in \langle \tilde{c}^2 \rangle$. Переходячи до прообразів, маємо $[c, y] = c^{2r} y^{2i}$. З цього випливає, що

$$[c^2, y] = h_2^{2i} \neq 1$$

та $i \equiv 1 \pmod{2}$. Неважко перевірити, що у такому випадку $|cy| \leq 4$, що неможливо за доведеним.

Отже, $\langle y^2 \rangle \not\triangleleft G$. Тоді можна вважати, що $y^2 = h_1 h_2^l c^s$ і, відповідно, $z = h_2 c^{2m}$. Перейдемо до фактор-групи

$$\overline{G} = G / \omega(G) \cong (\langle \overline{c} \rangle \times \langle \overline{h}_1 \rangle \times \langle \overline{h}_2 \rangle) \langle \overline{y} \rangle.$$

Не порушуючи загальності міркувань будемо вважати

$$\langle \overline{y} \rangle \cap \overline{N}_G^A = \langle \overline{h}_1 \rangle i \overline{z} = \overline{h}_2.$$

Тоді за вибором \overline{z} маємо $[\overline{y}, \overline{z}] = [\overline{y}, \overline{h}_2] = \overline{1}$. Враховуючи умову $\langle \overline{y}, \overline{h}_2 \rangle \triangleleft \overline{G}$, дістанемо

$$[\langle \overline{y} \rangle, \overline{N}_G^A] \subseteq \overline{N}_G^A \cap \langle \overline{y}, \overline{h}_2 \rangle = \langle \overline{y}^2, \overline{h}_2 \rangle = \overline{H}.$$

Отже, $[y, h_2] = c^{2l} h_1^{2s}$ і $[y, c] = c^{2l_1} h_1^m h_2^r$. З першої рівності й умови $[y, c^2] \neq 1$ випливає, що $l \not\equiv 0 \pmod{2}$. Аналогічно, з другої рівності та умови $[y, c^2] \neq 1$, маємо $m \equiv 0 \pmod{2}$ та $r \not\equiv 0 \pmod{2}$.

Отже, $[y, h_2] = c^2 h_1^{2s}$ і $[y, c] = c^{2l} h_2^{\pm 1}$. Далі, враховуючи, що $[y^2, c] = c^2$, робимо висновок, що $l_1 \equiv s \pmod{2}$. Оже, без порушень загальності можемо вважати, що G — група виду

$$G = C \langle y \rangle = (\langle c \rangle \rtimes H) \langle y \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|c| = 4$, $[c, h_1] = c^2$, $[c, h_2] = 1$, $y^2 = h_1$, $[y, h_2] = c^2 h_1^2$, $[y, c] = h_2^{\pm 1}$.

У цій групі усі абелеві нециклічні підгрупи містяться в $\langle c \rangle \rtimes H$ і нормалізуються цією підгрупою. Водночас $y \notin N_G^A$, бо $y \notin N_G(\langle c, h_1^2 \rangle)$. \square

Далі розглядатимемо скінченні 2-групи, норма абелевих нециклічних підгруп яких є групою типу 2) твердження 3.1.2, тобто групою виду:

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n, |b| = 2^m, n \geq 2, m \geq 1, [a, b] = a^{2^{n-1}},$$

у якій $\omega(N_G^A) \not\subset Z(G)$.

Оскільки за лемою 3.5.5 центр групи, що має вказану норму N_G^A при $m > n \geq 2$, нециклічний, то далі будемо вважати, що $n \geq m > 1$ або $n > m = 1$.

Існування таких груп підтверджує наступний приклад.

Приклад 3.5.2. $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 4$, $b^{-1}ab = a^5$.

Неважко переконатися, що

$$N_G^A = \langle a^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle.$$

При цьому норма N_G^A має нециклічний центр $Z(N_G^A) = \langle a^4 \rangle \times \langle b^2 \rangle$, а центр групи циклічний: $Z(G) = \langle a^4 \rangle$.

Лема 3.5.11. *Якщо скінченна 2-група G має норму $N_G^A \neq G$ абелевих нециклічних підгруп, що є групою типу 2) твердження 3.1.2 при $n = 2$, $m = 1$, то G — група типу 5) теореми 3.5.1.*

Доведення. Нехай норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G є групою діедра порядку 8,

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 4, |b| = 2, b^{-1}ab = a^{-1}.$$

Позначимо $C = C_G(N_G^A)$ централізатор N_G^A в G . Тоді $C \triangleleft G$. Як відомо, група автоморфізмів групи діедра порядку 8 ізоморфна групі діедра D_8 того ж порядку, тому

$$\text{Aut}(N_G^A) \cong D_8$$

і $[G : C] \leq 8$.

Розглянемо групу $G_1 = C \cdot N_G^A$. Оскільки $N_G^A \cap C = \langle a^2 \rangle$, то $|G_1/C| = 4$ і у ланцюжку підгруп

$$G \supseteq G_1 \supseteq C$$

маємо $|G/C| \leq 8$, $|G_1/C| = 4$, $|G/G_1| \leq 2$. Отже,

$$G = G_1 \langle y \rangle = (C \cdot N_G^A) \langle y \rangle,$$

де $y^2 \in G_1$.

Оскільки за лемою 3.2.2 група G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 8, то C має єдину інволюцію a^2 і тому є циклічною або кватерніонною 2-групою.

Нехай C — кватерніонна 2-група порядку більшого за 8,

$$C = \langle h_1, h_2 \rangle,$$

де $|h_1| = 2^n$, $n \geq 3$, $|h_2| = 4$, $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$. Тоді за наслідком 3.2.1 $h_1^{2^{n-2}} \in N_G^A$, причому

$$h_1^{2^{n-2}} \in (N_G^A \cap C) = Z(N_G^A),$$

що неможливо за умовою.

Нехай тепер C — група кватерніонів порядку 8. Тоді

$$G_1 = C \cdot N_G^A$$

— центральне склеювання групи кватерніонів та групи діедра порядку 8. Покажемо, що C містить циклічну підгрупу порядку 4, що є нормальною в G .

Справді, нехай $h_1 \in C$, $|h_1| = 4$. Тоді з умови $C \triangleleft G$ випливає, що

$$[h_1, y] \in C.$$

Якщо $[h_1, y] \in \langle h_1 \rangle$, то $\langle h_1 \rangle \triangleleft G$ і за наслідком 3.2.1 $h_1 \in Z(N_G^A)$, що неможливо. Отже, $[h_1, y] \notin \langle h_1 \rangle$, тому $|[h_1, y]| = 4$ і

$$h_1^{-1}y^{-1}h_1y = h_2,$$

де $|h_2| = 4$, $h_2 \notin \langle h_1 \rangle$. З цього випливає, що

$$C = \langle h_1, h_2 \rangle,$$

де

$$h_1^2 = h_2^2, h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}, y^{-1}h_1y = h_1h_2.$$

Оскільки $y^{-2}h_1y^2 = h_1^m$, де $m \equiv 1 \pmod{2}$ і

$$y^{-2}h_1y^2 = y^{-1}h_1h_2y = y^{-1}h_1yy^{-1}h_2y = h_1h_2y^{-1}h_2y,$$

то $h_1^m = h_1h_2y^{-1}h_2y$, звідки

$$y^{-1}h_2y = h_2^{-1}h_1^{m-1}.$$

Отже, або $y^{-1}h_2y = h_2^{-1}$, або $y^{-1}h_2y = h_2$. В обох випадках $\langle h_2 \rangle \triangleleft G$ і за наслідком 3.2.1 $h_2 \in Z(N_G^A)$, що суперечить умові. Це означає, що C не може бути групою кватерніонів порядку 8.

Залишається розглянути випадок, коли $C = \langle c \rangle$ — циклічна підгрупа. Припустимо, що $|c| = 2^n \geq 4$. Тоді з наслідку 3.2.1 випливає, що $c^{2^{n-2}} \in N_G^A$ і $c^{2^{n-2}}$ міститься у $Z(N_G^A)$, що неможливо. Отже, $|C| = 2$, $C = \langle a^2 \rangle$. Оскільки $C \subseteq N_G^A$ і

$$G = C \cdot N_G^A \langle y \rangle,$$

де $y^2 \in G_1$, то

$$G = N_G^A \cdot \langle y \rangle,$$

звідки

$$G/C \cong N_G^A \langle y \rangle / \langle a^2 \rangle \cong (\langle \bar{a} \rangle \times \langle \bar{b} \rangle) \langle \bar{y} \rangle,$$

де $2 \leq |\bar{y}| \leq 4$.

Враховуючи, що G/C ізоморфна деякій підгрупі групи діедра порядку 8, можна вважати, що $|\bar{y}| = 2$. Окрім того, з умови $|G/\langle a \rangle| = 4$ випливає, що $G/\langle a \rangle$ — абелева група і тому $G' \subseteq \langle a \rangle$.

Позначимо $C_1 = C_G(a)$ — централізатор елемента a в G . Оскільки $b \notin C_1$, то

$$G = C_1 \rtimes \langle b \rangle.$$

Далі, з умов $|C_1| = 8$ і $Z(C_1) \supseteq \langle a \rangle$ робимо висновок, що група C_1 абелева.

Припустимо, що підгрупа C_1 — нециклічна. Тоді можна вважати, що

$$C_1 = \langle a \rangle \times \langle x \rangle, |x| = 2.$$

Враховуючи, що підгрупа $(\langle a^2 \rangle \times \langle x \rangle)$ — b -допустима, маємо

$$G' \subseteq (\langle a^2 \rangle \times \langle x \rangle) \cap N_G^A = \langle a^2 \rangle.$$

Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить $\langle a^2 \rangle$, вона нормальна в G і тому $G = N_G^A$, що неможливо за умовою.

Отже, $C_1 = \langle c \rangle$ — циклічна підгрупа порядку 8,

$$G = \langle c \rangle \rtimes \langle b \rangle, c^2 = a.$$

Оскільки G містить циклічну підгрупу індекса 2, то за теоремою 12.5.1 [151] $b^{-1}cb = c^3$. Остаточнo маємо

$$G = \langle c \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|c| = 8, |b| = 2, b^{-1}cb = c^3$, тобто, G — група типу 5) теореми 3.5.1.

Доведемо, що група

$$G = \langle x \rangle \rtimes \langle b \rangle, |x| = 8, |b| = 2, b^{-1}xb = x^{-1}$$

має норму абелевих нециклічних підгруп $N_G^A = \langle x^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$.

Оскільки $|G| = 16$, то в G нормальна будь-яка підгрупа порядку 8. Отже, досить переконатись, що

$$\langle x^2, b \rangle \subseteq N_G(H),$$

де H — абелева нециклічна підгрупа порядку 4. Очевидно, що

$$H = \langle x^4 \rangle \times \langle x^{2\alpha}b \rangle, \alpha \in \{0, 1\}$$

і $[\langle x^2, b \rangle, H] \subseteq \langle x^4 \rangle \subseteq H$. Тому $N_G^A = \langle x^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$. □

Лема 3.5.12. Якщо скінченна 2-група G має норму $N_G^A \neq G$ абелевих нециклічних підгруп, що є групою типу 2) твердження 3.1.2 при $n > 2, t = 1$, то G є групою типу 6) теореми 3.5.1.

Доведення. Нехай група G має вказану в умові леми норму абелевих нециклічних підгруп, тобто,

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n, n > 2, |b| = 2, b^{-1}ab = a^{-1}.$$

Оскільки $\omega(N_G^A) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle \times \langle b \rangle$ — характеристична підгрупа норми N_G^A , то $\omega(N_G^A) \triangleleft G$. Позначимо

$$C = C_G(\omega(N_G^A)).$$

Тоді $C \triangleleft G$ і $[G : C] = 2$. Враховуючи, що $a \notin C$, можемо вважати

$$G = C \cdot \langle a \rangle, a^2 \in C.$$

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{C} = C / \langle b \rangle.$$

Оскільки за лемою 3.2.3 підгрупа $\omega(N_G^A)$ містить усі інволюції свого централізатора, і за лемою 3.2.4 $a_1 = a^{2^{n-1}}$ належить кожній циклічній підгрупі складеного порядку групи G , то \overline{C} містить єдину інволюцію. Отже, група \overline{C} — циклічна або є узагальненою групою кватерніонів.

1) Нехай \overline{C} — циклічна 2-група. Тоді підгрупа $C = \langle x \rangle \times \langle b \rangle$ абелева. Оскільки $a^2 \in C$, то $a^2 \in Z(G)$ і

$$G = C \cdot \langle a \rangle = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \langle a \rangle.$$

Розглянемо фактор-групу

$$\tilde{G} = G / \omega(N_G^A) \cong \langle \tilde{x} \rangle \langle \tilde{a} \rangle, \langle \tilde{a}^2 \rangle \subseteq \langle \tilde{x} \rangle.$$

За теоремою 12.5.1 [151] група $\langle \tilde{x} \rangle \langle \tilde{a} \rangle$ має центральну циклічну підгрупу індекса 2, тому $\tilde{G}' \subseteq \langle \tilde{a}^{2^{n-2}} \rangle$.

Якщо $\tilde{G}' = E$, то $G' \subseteq \omega(N_G^A)$. Покладемо

$$[a, x] = a_1^\alpha b^\beta.$$

Тоді

$$[a^2, x] = a_1^\beta = 1,$$

звідки $\beta = 0$ і $[a, x] \in \langle a_1 \rangle$. З цього випливає, що $G' \subseteq \langle a_1 \rangle$ і $G = N_G^A$, що неможливо.

Нехай тепер $\tilde{G}' = \langle \tilde{a}^{2^{n-2}} \rangle$. Покладемо

$$[a, x] = a^{2^{n-2}\alpha} b^\beta.$$

Оскільки $a^2 \in Z(G)$ і $G' \not\subset \omega(N_G^A)$, то $(\alpha, 2) = (\beta, 2) = 1$ і $[a, x] = a^{\pm 2^{n-2}}b$. З іншого боку, $x^2b \in Z(G)$, тому $x^2b = a^2$.

Якщо $|a| = 8$, то $x^2 = a^2b$, $|x| = 8$ і $G = \langle a, x \rangle \in \overline{HA}_2$ -групою, що неможливо, бо за умовою $G \neq N_G^A$. Нехай $|a| > 8$. Тоді $|x| > 8$, $|xa^{-1 \mp 2^{n-3}}| = 2$ і $\langle a_1, xa^{-1 \mp 2^{n-3}} \rangle$ — абелева нециклічна підгрупа. Проте,

$$a^{-1}xa^{-1 \mp 2^{n-3}}a = xa^{\pm 2^{n-2}}ba^{-1 \mp 2^{n-3}} \notin \langle a_1, xa^{-1 \mp 2^{n-3}} \rangle,$$

тобто $a \notin N_G(\langle a_1, xa^{-1 \mp 2^{n-3}} \rangle)$, що неможливо за означенням норми N_G^A .

2) Нехай \overline{C} — узагальнена група кватерніонів, тобто

$$\overline{C} = \langle \overline{h}_1, \overline{h}_2 \rangle,$$

де $|\overline{h}_1| = 2^k \geq 4$, $|\overline{h}_2| = 4$, $\overline{h}_1^{2^{k-1}} = \overline{h}_2^2$, $\overline{h}_2^{-1}\overline{h}_1\overline{h}_2 = \overline{h}_1^{-1}$.

Позначимо h_1 та h_2 — прообрази елементів \overline{h}_1 та \overline{h}_2 відповідно. Оскільки h_1 та h_2 мають складений порядок, то лемою 3.2.4

$$\langle h_1 \rangle \cap \omega(N_G^A) = \langle h_2 \rangle \cap \omega(N_G^A) = \langle a_1 \rangle.$$

Виходячи із визначальних співвідношень для групи \overline{C} при переході до прообразів одержимо $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}b^m$. Якщо $m \neq 0$, то підгрупа $\langle h_1h_2 \rangle$ має порядок 4 і не містить a_1 , що неможливо за лемою 3.2.4. Отже, $m = 0$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$ і

$$C = H \times \langle b \rangle,$$

де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — кватерніонна 2-група, $|h_1| = 2^k \geq 4$. Далі з умов $a^2 \in C$ і

$$\langle a^2 \rangle = Z(N_G^A) \triangleleft G$$

впливає, що $a^2 = h_1^s b^t$.

Оскільки для довільного елемента $h \in H \setminus \langle h_1 \rangle$, $|h| = 4$ має місце включення

$$[a, h] \in (N_G^A \cap \langle b, h \rangle) = \omega(N_G^A),$$

то $[a, h_2] \in \omega(N_G^A)$, $[a, h_1h_2] \in \omega(N_G^A)$, а значить і $[a, h_1] \in \omega(N_G^A)$. Якщо при цьому H — група кватерніонів порядку 8, то $|a| = 8$ і

$$G' \subset \omega(N_G^A).$$

Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить $\omega(N_G^A)$, то вона нормальна в G і $G = N_G^A$, що суперечить умові.

Далі будемо вважати, що $|H| > 8$, де $|h_1| = 2^k > 4$. Оскільки за доведеним $[a, h_2] \in \omega(N_G^A)$, то $[a^2, h_2] \in \langle a_1 \rangle$. З іншого боку,

$$[a^2, h_2] = [h_1^s b^t, h_2] = [h_1^s, h_2] = h_1^{-2s}.$$

Тобто, $s \equiv 0 \pmod{2^{n-2}}$, $a^2 = h_1^{2^{n-2}s_1} b^t$ і

$$a^4 = \left(h_1^{2^{n-2}s_1} b^t \right)^2 = h_1^{2^{n-1}s_1} = a_1^{s_1}.$$

Отже, $(s_1, 2) = 1$ і знову $|a| = 8$.

Враховуючи, що $[a, h_1] \in \omega(N_G^A)$, покладемо

$$h_1^{-1} a h_1 = a a_1^\alpha b^\beta.$$

Тоді $h_1^{-1} a^2 h_1 = a^2 a_1^\beta$. З іншого боку, $h_1^{-1} a^2 h_1 = a^2$, тому $\beta = 0$ і $[a, h_1] = a_1^\alpha$, $\alpha \in 0, 1$. Покажемо, що $a^2 \in \langle h_1^{2^{n-2}} \rangle$, тобто $t = 0$. Справді, в іншому випадку

$$(a^{-1} h_1^{2^{k-3}s_1})^2 = a_1^l b^t \notin \langle a_1 \rangle, l \in \{0, 1\},$$

що суперечить лемі 3.2.4. Отже, $a^2 = h_1^{2^{n-2}s_1}$, де $(s_1, 2) = 1$.

Як зазначалось вище, $[a, h_2] = a_1^m b^r$. Враховуючи, що

$$[a^2, h_2] = [h_1^{2^{k-2}}, h_2] \neq 1,$$

робимо висновок, що $r \neq 0$, тобто $[a, h_2] = a_1^m b$. Отже, у цьому випадку G є групою типу 6) теореми 3.5.1. \square

З доведення лемі 3.5.12 випливає наступне твердження.

Наслідок 3.5.1. *Якщо норма абелевих нециклічних підгруп N_G^A скінченної 2-групи G є групою виду*

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 2^n > 8, |b| = 2, [a, b] = a^{2^{n-1}},$$

то $N_G^A = G$.

Лема 3.5.13. *Якщо норма абелевих нециклічних підгруп N_G^A скінченної 2-групи G є групою виду*

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, |a| = 4, |b| = 4, [a, b] = a^2,$$

то $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$.

Доведення. Нехай група G має вказану в умові норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Якщо $N_G^A = G$, то твердження лемі очевидне. Тому надалі будемо вважати, що $N_G^A \neq G$. Нехай $\omega(N_G^A) \not\subseteq Z(G)$. Тоді за лемою 3.2.2

$$\omega(N_G^A) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle \times \langle b^{2^{m-1}} \rangle = \omega(G)$$

і тому $\omega(N_G^A) \triangleleft G$.

Позначимо $C = C_G(\omega(N_G^A))$. За лемою 3.5.3

$$G = C \cdot \langle y \rangle,$$

де $y^2 \in C$, $|y| > 4$. Оскільки $\omega(N_G^A) \subseteq Z(C)$, то у відповідності з лемою 3.4.10 $C = N_C^A = N_G^A$ і

$$G = C \cdot \langle y \rangle = N_G^A \cdot \langle y \rangle = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle y \rangle,$$

звідки $|y| = 8$. Оскільки $[y, b^2] \neq 1$, то $\langle y \rangle \cap \omega(G) = \langle a^2 \rangle$.

Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/\omega(G) = (\langle \overline{a} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle) \langle \overline{y} \rangle.$$

Оскільки $\overline{y}^2 \in \overline{C}$ і \overline{G} має три інволюції, то \overline{G} — метациклічна група,

$$\overline{G} = \langle \overline{y}_1 \rangle \langle \overline{b}_1 \rangle,$$

де $|\overline{y}_1| = 4$ і $\langle \overline{y}_1 \rangle \triangleleft \overline{G}$. За теоремою 12.5.1 [151] маємо:

$$\overline{b}_1^{-1} \overline{y}_1 \overline{b}_1 = \overline{y}_1 \overline{b}_1^{-1} \overline{y}_1 \overline{b}_1 = \overline{y}_1^{-1}.$$

У першому випадку $G' \subseteq \omega(G)$ і оскільки усі абелеві нециклічні підгрупи містять $\omega(G)$, то $N_G^A = G$, що неможливо. Отже, $\overline{b}_1^{-1} \overline{y}_1 \overline{b}_1 = \overline{y}_1^{-1}$ і \overline{G} — група діедра. Але тоді $|\overline{y}_1 \overline{b}_1| = 2$ і прообраз елемента $\overline{y}_1 \overline{b}_1 \notin \overline{C}$ має порядок 4, що суперечить лемі 3.5.3. Отже, припущення неправильне і $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$. \square

Лема 3.5.14. Якщо норма абелевих нециклічних підгруп N_G^A скінченної 2-групи G є групою виду

$$N_G^A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, |a| = 2^n, |b| = 2^m, n > 2, n \geq m \geq 2, [a, b] = a^{2^{n-1}},$$

$N_G^A \neq G$ і $\omega(N_G^A) \not\subseteq Z(G)$, то G — група типу 7) теореми 3.5.1.

Доведення. Нехай група G має вказану в умові норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, $\omega(N_G^A) \not\subseteq Z(G)$ і $N_G^A \neq G$. За лемою 3.5.2

$$\omega(N_G^A) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle \times \langle b^{2^{m-1}} \rangle = \omega(G) \triangleleft G.$$

Оскільки $\omega(G) \not\subseteq Z(G)$, то з характеристичності підгрупи $\langle a^{2^{n-1}} \rangle$ в N_G^A випливає, що $a_1 = a^{2^{n-1}} \in Z(G)$, а $b_1 = b^{2^{m-1}} \notin Z(G)$.

Позначимо $C = C_G(\omega(G))$. За лемою 3.5.3

$$G = C \cdot \langle y \rangle,$$

де $y^2 \in C$, $|y| > 4$ і $N_C^A = N_G^A$. Оскільки підгрупа C має нециклічний центр і недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп, то за теоремою 3.4.2 або $C \in \overline{HA}_2$ -групою і $C = N_C^A = N_G^A$, або C — група типу 3) цієї теореми.

Покажемо, що група G метациклічна. Справді, в іншому випадку вона містить неметациклічну підгрупу H , усі підгрупи якої метациклічні. Як відомо (див. [19]), $\exp H \leq 4$, тому враховуючи, що централізатор C містить усі

елементи порядку 4 групи G , приходимо до висновку, що $H \subseteq C$. Маємо протиріччя. Отже,

$$G = \langle g \rangle \langle h \rangle$$

— метациклічна група, що має три інволюції, нецентральный нижній шар та містить метациклічну неабелеву підгрупу Міллера-Морено N_G^A . Виходячи з опису таких груп (теорема 1.1.4, наслідок 1.1.8 [143]), робимо висновок, що G є групою одного з двох типів:

$$1) G = \langle g \rangle \langle h \rangle, |g| = 2^\alpha, |h| = 2^\beta, h^{-1}gh = g^{-1-2^{\alpha-\beta}}, \alpha > 2, \beta > 2, \alpha - \beta > 1;$$

$$2) G = \langle g \rangle \langle h \rangle, |g| = 2^\alpha, |h| = 2^\beta, h^{-1}gh = g^{1+2^{\alpha-\beta}}, \alpha > 2, \beta > 2, \alpha - \beta > 1.$$

1) Нехай G є групою першого типу. Тоді $h^{2^{\beta-1}} \notin Z(G)$, $h \in C$ і $g \notin C$. Враховуючи будову підгрупи C , робимо висновок, що $h \in N_G^A$. Якщо при цьому $C = N_G^A$, то $C' = \langle g^{2^{\alpha-1}} \rangle$. З іншого боку, у групі типу 1) маємо $G' = \langle g^2 \rangle$, $C' = \langle g^4 \rangle$ і тому $\alpha = 3$, що неможливо, бо тоді $\beta = 1$. Отже, C є групою типу 3) теореми 3.4.2. У цьому випадку $|C'| = 2^{r+1}$, де r — таке найменше ціле число, що $(g^2)^{2^r} \in N_G^A$. Тоді з рівності $|C'| = |\langle g^4 \rangle| = 2^{\alpha-2}$, будемо мати $r + 1 = \alpha - 2$ і найменшим степенем елемента g , що належить N_G^A , буде елемент $g^{2^{r+1}} = g^{2^{\alpha-2}}$ порядку 4, що неможливо.

2) Нехай тепер G — група типу 2), що вказано вище. Як і у попередньому випадку $h^{2^{\beta-1}} \notin Z(G)$, $g \notin C$ і $h \in N_G^A$. Позначимо g^{2^r} — найменший степінь елемента g , що міститься в N_G^A . Якщо при цьому $C = N_G^A$, то $g^2 \in C$. Тоді з умови $C' = \langle g^{2^{\alpha-1}} \rangle = \langle a_1 \rangle$ випливає, що

$$h^{-1}g^2h = g^2g^{2^{\alpha-\beta+1}}$$

і $2^{\alpha-\beta+1} \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-1}}$. Отже, $\alpha - \beta + 1 \geq \alpha - 1$, $2 - \beta \geq 0$ і $\beta \leq 2$. Виходячи з умови леми, маємо $\beta = 2$ і $h^{-1}gh = g^{1+2^{\alpha-2}}$, тобто, G є групою типу 7) теореми 3.5.1 при $m = \beta$.

Нехай тепер $C \neq N_G^A$, тобто C — група типу 3) теореми 3.4.2. Оскільки g^{2^r} — найменший степінь елемента g , що міститься в N_G^A і $(N_G^A)' = \langle g^{2^{\alpha-1}} \rangle$, то $[g^{2^r}, h] \in \langle g^{2^{\alpha-1}} \rangle$. З іншого боку, використовуючи визначальні співвідношення групи типу 2), одержимо

$$h^{-1}g^{2^r}h = g^{2^r}g^{1+2^{r+\alpha-\beta}}.$$

Отже, $2^{r+\alpha-\beta} \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-1}}$ і $\beta \leq r + 1$. Оскільки за теоремою 3.4.2 для показника найменшого степеня $(g^2)^{2^{r_1}}$ елемента g^2 , що міститься в N_G^A , виконується нерівність $r_1 \leq \beta - 2$ і $r_1 = r - 1$, то $r - 1 \leq \beta - 2$ і $r \geq \beta + 1$. Отже, $r = \beta + 1$ і знову G — група типу 7) теореми 3.5.1. Лемі доведено. \square

Теорему доведено. \square

Наслідок 3.5.2. *Якщо норма абелевих нециклічних підгруп N_G^A скінченної 2-групи G є групою виду*

$$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $|a| = 2^n, |b| = 2^m, n \geq m \geq 2, [a, b] = a^{2^{n-1}},$ то $N_G^A = N_G$.

3.6 Періодичні непримарні локально скінченні групи з локально нільпотентною недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

У цьому підрозділі вивчаються нескінченні періодичні групи, в яких норма N_G^A є недедекіндовою локально нільпотентною підгрупою. Як буде показано далі, такі групи задовольняють умову мінімальності для абелевих підгруп і у разі їх локальної скінченності є групами Чернікова.

Нехай $\pi(G)$ — множина всіх простих дільників порядків елементів групи G і $p \in \pi(G)$. Нагадаємо, що p' -підгрупою групи G називають підгрупу, яка не містить p -елементів. Максимальну за включенням p' -підгрупу групи G називають її силовською p' -підгрупою (див., наприклад, [110] с. 343).

Лема 3.6.1. *Якщо періодична непримарна група G має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, силовська p -підгрупа $(N_G^A)_p$ якої недедекіндова, то всі абелеві p' -підгрупи групи G циклічні. Якщо при цьому група G локально скінченна, то всі її силовські p' -підгрупи скінченні, а силовські q -підгрупи ($q \in \pi(G), q \neq p$) є або циклічними, або скінченними кватерніонними 2-групами.*

Доведення. Оскільки норма N_G^A є негамільтоновою локально нільпотентною \overline{HA} -групою, то за твердженням 3.1.3

$$N_G^A = (N_G^A)_p \times B,$$

де $(N_G^A)_p$ — силовська p -підгрупа норми, що є негамільтоновою \overline{HA}_p -групою, а B — скінченна дедекіндова група, усі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|B|, p) = 1$.

Нехай $G_{p'}$ — довільна силовська p' -підгрупа групи G . Покажемо, що всі абелеві підгрупи групи $G_{p'}$ циклічні. Справді, якщо A — абелева нециклічна p' -підгрупа, то для довільного елемента $x \notin (N_G^A)_p$ підгрупа $\langle x, A \rangle \in N_G^A$ -допустимою, звідки

$$\langle x, A \rangle \cap (N_G^A)_p = \langle x \rangle \triangleleft (N_G^A)_p.$$

Але у такому випадку $(N_G^A)_p$ — дедекіндова група, що суперечить умові. Отже, всі абелеві p' -підгрупи групи G циклічні.

Нехай тепер G — локально скінченна група. Оскільки $G_{p'}$ не містить нескінченних абелевих підгруп, то за відомим результатом М. Каргаполова, Ф. Холла і Кулатилакі (див., наприклад, [110] с. 499) $G_{p'}$ — скінченна група, і за доведеним всі її абелеві підгрупи циклічні. З цього також випливає, що всі силовські q -підгрупи групи G ($q \in \pi(G)$, $q \neq p$) циклічні для непарних простих чисел, а силовська 2-підгрупа або циклічна, або є скінченною кватерніонною 2-групою. \square

Отже, якщо норма абелевих нециклічних підгруп непримарної локально скінченної групи G локально нільпотентна і недедекіндова, то G має нециклічні силовські p -підгрупи тільки за одним числом $p \in \pi(G)$.

Слід зазначити, що існують періодичні не локально скінченні групи, у яких норма абелевих нециклічних підгруп локально нільпотентна. Простий приклад таких груп наведено нижче.

Приклад 3.6.1. $G = G_p \times B$, де G_p — негамільтонова \overline{NA}_p -група, B — нескінченна періодична не локально скінченна група А. Ю. Ольшанського, всі підгрупи якої мають простий порядок (див. [139]) і $p \notin \pi(B)$.

У цій групі норма абелевих нециклічних підгруп локально нільпотентна і збігається з G_p .

Лема 3.6.2. *Періодична група G , яка має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^A , задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп.*

Доведення. Нехай група G і її норма абелевих нециклічних підгруп N_G^A задовольняють умови леми. Тоді N_G^A — недедекіндова локально нільпотентна \overline{NA} -група. З опису таких груп (твердження 3.1.1–3.1.3) випливає, що норма N_G^A задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп і тому або скінченна, або є скінченним розширенням квазіциклічної p -підгрупи за деяким простим числом $p \in \pi(G)$.

Припустимо, що G не задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Тоді вона містить абелеву підгрупу M , що розкладається у прямий добуток нескінченного числа підгруп простих порядків. Нехай

$$M_1 = N_G^A \cap M$$

— перетин підгрупи M з нормою N_G^A . Тоді $|M_1| < \infty$ і

$$M = M_1 \times M_2,$$

де $|M_2| = \infty$ і $N_G^A \cap M_2 = E$. За лемою 3.1.1 норма N_G^A має бути дедекіндовою, що суперечить умові. Отже, G — група з умовою мінімальності для абелевих підгруп, що і потрібно було довести. \square

Оскільки для локально скінченних груп умова мінімальності для абелевих підгруп рівносильна умові мінімальності для всіх підгруп [160], то має місце твердження.

Наслідок 3.6.1. *Довільна нескінченна локально скінченна група G , яка має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^A , є групою Чернікова.*

Наступна теорема характеризує будову нескінченних періодичних локально нільпотентних груп, в яких норма абелевих нециклічних підгруп є недедекіндовою підгрупою.

Теорема 3.6.1. *Нескінченна періодична локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, коли*

$$G = G_p \times G_{p'},$$

де G_p — нескінченна силовська p -підгрупа групи G , що має недедекіндову норму $N_{G_p}^A$ абелевих нециклічних підгруп для деякого $p \in \pi(G)$, $G_{p'}$ — скінченна p' -підгрупа, усі абелеві підгрупи якої циклічні, і

$$G_{p'} = \langle y \rangle \times H,$$

де $\langle y \rangle$ — циклічна q -група (q — непарне просте число, $q \in \pi(G)$, $q \neq p$), H — скінченна циклічна або кватерніонна 2-група (при $p \neq 2$).

У цьому випадку

$$N_G^A = N_{G_p}^A \times \langle y \rangle \times H_1,$$

де $H_1 = H$, якщо H — циклічна група або група кватерніонів порядку 8 та $H_1 = \langle h_1^{2^{n-2}} \rangle$, якщо $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — кватерніонна 2-група порядку більшого за 8, $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2$, $|h_2| = 4$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$.

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Доведемо їх необхідність. Нехай норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Тоді з твердження 3.1.3 отримуємо

$$N_G^A = (N_G^A)_p \times B,$$

де $(N_G^A)_p$ — силовська p -підгрупа групи N_G^A , що є негамільтоновою \overline{HA}_p -групою, B — скінченна дедекіндова група, усі абелеві підгрупи якої циклічні і $(p, |B|) = 1$.

Як відомо (твердження 1.4 [153]), періодичну локально нільпотентну групу можна подати у вигляді прямого добутку її силовських підгруп G_p і $G_{p'}$, тобто

$$G = G_p \times G_{p'}.$$

За лемою 3.6.1 $G_{p'}$ — скінченна група, в якій всі абелеві підгрупи циклічні. Отже, $G_{p'}$ є або циклічною групою, або прямим добутком циклічної групи непарного (в тому числі і одиничного) порядку і скінченної циклічної або кватерніонної 2-групи.

Нехай $2 \in \pi(G_{p'})$. Якщо силовська 2-підгрупа G_2 групи G циклічна або є групою кватерніонів порядку 8, то, очевидно, $G_2 \subseteq N_G^A$. Нехай G_2 — узагальнена група кватерніонів порядку більшого за 8:

$$G_2 = \langle h_1, h_2 \rangle,$$

де $|h_1| = 2^n$, $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$.

Покажемо, що підгрупа $H_1 = \langle h_1^{2^{n-2}} \rangle$ нормалізує кожну абелеву нециклічну підгрупу групи G . Справді, якщо M — довільна абелева нециклічна підгрупа групи G_p , то підгрупа $\langle h_1^\alpha h_2 \rangle \times M$ (α — ціле число) є N_G^A -допустимою. Тому N_G^A -допустимою буде й підгрупа $\langle h_1^\alpha h_2 \rangle$. Оскільки

$$[h_1^\alpha h_2, h_1^{2^{n-2}}] = h_2^2 \in \langle h_1^\alpha h_2 \rangle,$$

то $H_1 \subset N_G(\langle h_1^\alpha h_2 \rangle)$. З іншого боку, жодна інша нецентральна підгрупа групи H не нормалізує підгрупу $\langle h_1^\alpha h_2 \rangle$, тому $H_1 = H \cap N_G^A$.

Доведемо тепер, що

$$N_{G_p}^A \subseteq N_G^A,$$

де $N_{G_p}^A$ — норма абелевих нециклічних підгруп групи G_p . Справді, з умови $(N_G^A)_p \subseteq N_{G_p}^A$ випливає, що норма $N_{G_p}^A$ групи G_p недедекіндова.

Враховуючи, що кожну абелеву нециклічну підгрупу групи G можна подати у вигляді $M_p \times \langle h \rangle$, де M_p — нециклічна p -підгрупа, $(|h|, p) = 1$, і $N_{G_p}^A$ нормалізує всі такі підгрупи, приходимо до висновку, що $(N_G^A)_p = N_{G_p}^A$, звідки

$$N_G^A = N_{G_p}^A \times \langle y \rangle \times H_1.$$

□

З доведеної теореми випливає, що будь-яка нескінченна періодична локально нільпотентна група, що має недедекіндову норму N_G^A , є прямим добутком нескінченної силовської p -підгрупи з недедекіндовою нормою $N_{G_p}^A$ та скінченної p' -підгрупи $G_{p'}$, усі силовські q -підгрупи якої циклічні (q — відмінне від p непарне просте число), а силовська 2-підгрупа або циклічна, або є кватерніонною 2-групою. Зрозуміло, що будова таких груп фактично визначається будовою силовської p -підгрупи G_p і описується теоремами 3.2.1, 3.3.1 та 3.3.2.

Лема 3.6.3. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, що має локально нільпотентну норму N_G^A з негамільтоновою силовською p -підгрупою $(N_G^A)_p$. Тоді G є скінченним розширенням квазіциклічної p -підгрупи.*

Доведення. За наслідком 3.6.1 G — група Чернікова і тому є скінченним розширенням повної абелевої підгрупи P . Оскільки за лемою 3.6.1 усі силовські q -підгрупи групи G ($q \neq p$) циклічні або кватерніонні 2-групи, то P є прямим добутком скінченного числа квазіциклічних p -підгруп.

Нехай $P \supseteq (A_1 \times A_2)$, де A_1 і A_2 — квазіциклічні p -підгрупи. Оскільки

$$N_G^A \triangleleft G_1 = (A_1 \times A_2)N_G^A,$$

то за теоремою 1.16 [153] центр групи G_1 містить таку повну абелеву підгрупу A , що

$$|A \cap N_G^A| < \infty$$

і $G_1 = A \cdot N_G^A$. Отже, G_1 — скінченна над центром локально нільпотентна \overline{HA} -група. З опису таких груп (твердження 3.1.1 — 3.1.3) отримуємо, що $P = A$ — квазіциклічна p -підгрупа, яка є максимальною повною підгрупою групи G . \square

Дослідимо тепер будову нескінченних локально скінченних не локально нільпотентних груп, у яких норма абелевих нециклічних підгруп є нескінченною локально нільпотентною підгрупою.

Теорема 3.6.2. *Нехай G — локально скінченна не локально нільпотентна група, яка має нескінченну локально нільпотентну недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Тоді*

$$G = G_p \rtimes H,$$

де G_p — нескінченна \overline{HA}_p -група, що збігається з силовською p -підгрупою норми N_G^A , H — скінченна група, всі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|H|, p) = 1$. При цьому кожний елемент $h \in H$, який централізує деяку абелеву нециклічну підгрупу $M \subset N_G^A$, централізує норму N_G^A .

Доведення. Нехай група G і її норма N_G^A задовольняють умовам теореми. Тоді за твердженням 3.1.3 N_G^A є скінченним розширенням своєї силовської p -підгрупи $(N_G^A)_p$.

Оскільки $(N_G^A)_p$ міститься в нормі $N_{G_p}^A$ абелевих нециклічних підгруп довільної силовської p -підгрупи G_p групи G , то G_p — локально скінченна p -група з нескінченною недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп. За теоремами 3.2.1 і 3.3.1

$$(N_G^A)_p = N_{G_p}^A = G_p.$$

Тобто, G_p — нормальна в G нескінченна \overline{HA}_p -група одного з типів, вказаних у теоремах 3.2.1 та 3.3.1.

Враховуючи, що за лемою 3.6.2 $[G : G_p] < \infty$ і застосовуючи узагальнену теорему Шура (див., наприклад, [153] с. 214), приходимо до висновку, що підгрупа G_p доповнювана в G ,

$$G = G_p \rtimes H,$$

де $(|H|, p) = 1$, причому за лемою 3.5.1 усі абелеві підгрупи групи H циклічні.

Нехай тепер h — довільний елемент підгрупи H , який централізує деяку абелеву нециклічну підгрупу $M \subset N_G^A$. Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $M \subset G_p$. Оскільки підгрупа $(M \times \langle h \rangle)$ — N_G^A -допустима, то її характеристична підгрупа $\langle h \rangle$ також N_G^A -допустима. Тоді $\langle h \rangle \subset C_G(N_G^A)$. \square

Наслідок 3.6.2. *Будь-яка нескінченна локально скінченна група G , що має нескінченну локально нільпотентну недедекіндову норму N_G^A , є скінченним розширенням цієї норми.*

Як показує наступний приклад, група вказаної в теоремі 3.6.2 будови може мати не локально нільпотентну норму абелевих нециклічних підгруп, тому умови теореми 3.6.2 є необхідними, але не достатніми.

Приклад 3.6.2. *Нехай $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle h \rangle$, де A — квазициклічна 7-підгрупа, $|b| = |c| = 7$, $|a_1| = 7$, $|h| = 3$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $[b, h] = b$, $[c, h] = c$, $[a, h] = a^3$ для кожного елемента $a \in A$.*

Очевидно, що G є групою виду

$$G = G_7 \rtimes H,$$

де $G_7 = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$ — нескінченна \overline{HA}_7 -група і $H = \langle h \rangle$, але її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп не локально нільпотентна і збігається з G .

З іншого боку, за деяких обмежень умови теореми 3.6.2 можуть стати достатніми. Зокрема, має місце наступне твердження.

Теорема 3.6.3. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група. Норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп тоді і тільки тоді є локально нільпотентною недедекіндовою групою з нескінченною силовською 2-підгрупою, коли*

$$G = G_2 \times H,$$

де G_2 — нескінченна \overline{HA}_2 -група, яка збігається з силовською 2-підгрупою норми N_G^A , H — скінченна група, всі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|H|, 2) = 1$. При цьому

$$N_G^A = G_2 \times Z(H).$$

Доведення. Необхідність. За теоремою 3.6.2

$$G = G_2 \rtimes H,$$

де G_2 — нескінченна \overline{HA}_2 -група, яка збігається з силовською 2-підгрупою норми N_G^A , а H — скінченна група, всі абелеві підгрупи якої циклічні, $(|H|, 2) = 1$. Тоді враховуючи опис нескінченних \overline{HA}_2 -груп (твердження 3.1.2), до яких відноситься G_2 , робимо висновок, що G_2 — скінченне розширення квазіциклічної 2-групи A .

Позначимо h — довільний елемент групи H . Тоді з твердження 1.11 [153] слідує, що $h \in C_G(A)$ і підгрупа $(\langle h \rangle \times A) \in N_G^A$ -допустимою. В силу характеристичності в $(\langle h \rangle \times A)$, підгрупа $\langle h \rangle$ також N_G^A -допустима. Враховуючи тепер умову $G_2 \subseteq N_G^A$, робимо висновок, що

$$G = G_2 \times H.$$

Покажемо, що $H \cap N_G^A = Z(H)$. Нехай $h \in (H \cap N_G^A)$. За доведеним $\langle h \rangle$ — N_G^A -допустима підгрупа. Враховуючи локальну нільпотентність норми N_G^A , характеристичність підгрупи $\langle h \rangle$ в ній, і той факт, що кожний елемент $h \in (H \cap N_G^A)$ нормалізує підгрупу $A \times \langle y \rangle$ для всіх $y \in H$, $(|y|, |h|) = 1$, отримаємо

$$[h, y] \subseteq \langle h \rangle \cap (A \times \langle y \rangle) = 1.$$

Оскільки усі силовські q -підгрупи при $(q, 2) = 1$ циклічні, то $h \in Z(H)$ і

$$N_G^A = G_2 \times Z(H).$$

Достатність. Нехай G — група вказаної в теоремі будови. Тоді всі її абелеві нециклічні підгрупи можна подати у вигляді $M \times \langle t \rangle$, де $M \subseteq G_2$ — абелева нециклічна 2-група, $\langle t \rangle \subseteq H$.

Оскільки G_2 — нескінченна \overline{HA}_2 -група, то $G_2 \subseteq N_G^A$ і за теоремами 3.3.1—3.3.2 G_2 є скінченним розширенням квазіциклічної 2-групи A .

Нехай $h, y \in H \cap N_G^A$ і $(|h|, |y|) = 1$. Тоді підгрупи $A \times \langle y \rangle$ і $A \times \langle h \rangle$ будуть N_G^A -допустимими як абелеві нециклічні підгрупи. В силу характеристичності підгрупи $\langle h \rangle$ і $\langle y \rangle$ також будуть N_G^A -допустимими. Отже,

$$[h, y] \in \langle h \rangle \cap \langle y \rangle = E$$

і N_G^A — локально нільпотентна група. Як і при доведенні необхідності, не складно переконатися, що

$$N_G^A = G_2 \times Z(H).$$

□

Звернемо увагу, що підгрупа H , про яку йде мова в теоремах 3.6.2 та 3.6.3, може бути ненільпотентною.

Приклад 3.6.3. $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times H$, де A — квазіциклічна 5-підгрупа, $|b| = |c| = 5$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 5$, $H = \langle d \rangle \rtimes \langle h \rangle$, $|d| = 3$, $|h| = 4$, $h^{-1}dh = d^{-1}$.

Неважко переконатися, що у цій групі норма абелевих нециклічних підгруп

$$N_G^A = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times \langle h^2 \rangle,$$

а H — ненільпотентна підгрупа.

Розглянемо тепер нескінченні локально скінченні не локально нільпотентні групи, в яких норма абелевих нециклічних підгруп є скінченною нільпотентною недедекіндовою підгрупою.

Теорема 3.6.4. *Нескінченна локально скінченна не локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має скінченну нільпотентну недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, коли*

$$G = H \rtimes G_2,$$

де G_2 — нескінченна 2-група одного з типів 1)–4) теореми 3.3.2, її норма $N_{G_2}^A$ абелевих нециклічних підгруп скінченна і збігається з силовською 2-підгрупою норми N_G^A , H — скінченна група, всі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|H|, 2) = 1$.

При цьому довільний елемент $h \in H$, що належить централізатору деякої абелевої нециклічної підгрупи $M \subset N_G^A$, міститься в централізаторі норми N_G^A .

Доведення. Оскільки норма N_G^A групи G недедекіндова і нільпотентна, то за твердженням 3.1.3

$$N_G^A = (N_G^A)_p \times B,$$

де $(N_G^A)_p$ — силовська p -підгрупа норми, що є негамільтоновою \overline{HA}_p -групою, B — скінченна дедекіндова група, всі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|B|, p) = 1$. Застосовуючи до групи G лему 3.6.3, приходимо до висновку, що G — скінченне розширення квазіциклічної p -підгрупи A .

Якщо $p \neq 2$, то A міститься в центрі кожної силовської p -підгрупи G_p групи G . Тому норма $N_{G_p}^A$ абелевих нециклічних підгруп групи G_p нескінченна і за теоремою 3.6.2

$$N_{G_p}^A = G_p.$$

Враховуючи недедекіндовість підгрупи $(N_G^A)_p$ і теорему 3.3.2, робимо висновок, що

$$G_p = A \cdot (N_G^A)_p.$$

Отже, $G_p \triangleleft G$ як добуток нормальних підгруп. За узагальненою теоремою Шура ([153], с. 214), підгрупа G_p доповнювана в G і

$$G = G_p \rtimes H,$$

де H — скінченна група, всі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|H|, p) = 1$.

Якщо при цьому усі абелеві нециклічні підгрупи групи G є p -групами, то $G_p \subseteq N_G^A$, що суперечить скінченності норми N_G^A . Таким чином, G містить непримарну абелеву нециклічну підгрупу

$$M = M_p \times M_q,$$

де M_p — абелева нециклічна p -група, M_q — циклічна q -група. Враховуючи будову групи G_p , приходимо до висновку, що $M_p \cap A \neq E$. Отже,

$$M_q \subseteq C_G(a_1),$$

де $a_1 \in A$, $|a_1| = p$. За твердженням 1.11 [153] $M_q \subseteq C_G(A)$, звідки $A \subseteq N_G^A$, що суперечить скінченності норми N_G^A .

Нехай тепер $p = 2$. Якщо квазіциклічна 2-група міститься в центрі силовської 2-підгрупи G_2 , то з умови $A \triangleleft G$ і твердження 1.11 [153] випливає, що всупереч умові, $A \subseteq Z(G)$. Отже, $A \not\subseteq Z(G_2)$. Тоді $[G : C_G(A)] = 2$ і

$$G = C_G(A) \langle x \rangle, x^2 \in C_G(A).$$

За доведеним вище $N_G^A \subseteq C_G(A)$. З цього слідує, що $C_G(A)$ — група з нескінченною локально нільпотентною нормою абелевих нециклічних підгруп. Застосовуючи до $C_G(A)$ теорему 3.6.3, отримаємо

$$C_G(A) = C_2 \times H,$$

де C_2 — нескінченна \overline{HA}_2 -група одного з типів 1)-4) теореми 3.3.2, H — скінченна група з циклічними абелевими підгрупами і $(|H|, 2) = 1$.

Звернемо увагу на те, що підгрупа H містить всі $2'$ -елементи групи G і тому є силовською $2'$ -підгрупою G . В силу характеристичності H в $C_G(A)$, отримаємо $H \triangleleft G$. Враховуючи тепер, що група G зчисленна, має нормальну розв'язну локально нормальну силовську $2'$ -підгрупу H і застосовуючи результати роботи ([110], с. 508), приходимо до висновку, що H доповнювана в G . Отже,

$$G = H \rtimes G_2,$$

де G_2 — деяка силовська 2-підгрупа групи G .

Оскільки силовська 2-підгрупа $(N_G^A)_2$ норми N_G^A скінченна, міститься в нормі $N_{G_2}^A$ абелевих нециклічних підгруп групи G_2 і $A \not\subseteq Z(G_2)$, то $N_{G_2}^A$ — скінченна негамільтонова \overline{HA}_2 -група, а G_2 — нескінченна локально скінченна 2-група з скінченною недедекіндовою нормою абелевих нециклічних

підгруп. Враховуючи опис таких груп, G_2 — група одного з типів 1)–4) теореми 3.3.2. Доведення останнього твердження теореми проводиться як це було зроблено в теоремі 3.6.2. Необхідність умов теореми доведено.

Доведемо їх достатність. Нехай

$$G = H \rtimes G_2,$$

де G_2 — нескінченна 2-група одного з типів 1)–4) теореми 3.3.2, норма $N_{G_2}^A$ абелевих нециклічних підгруп групи G_2 скінченна і збігається з силовською 2-підгрупою норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп H — скінченна група, всі абелеві підгрупи якої циклічні, $(|H|, 2) = 1$.

У такому випадку група G є скінченням розширенням квазіциклічної 2-підгрупи A . Оскільки квазіциклічна 2-група не має автоморфізмів непарного порядку, то $[A, H] = E$. Тому для довільного елемента $h \in H$ підгрупа

$$\langle h, A \rangle = \langle h \rangle \times A$$

є N_G^A -допустимою, звідки в силу характеристичності N_G^A -допустимою буде й підгрупа $\langle h \rangle$. Отже, для довільних елементів $h, y \in (H \cap N_G^A)$, порядки яких взаємно прості, отримаємо

$$[h, y] \subseteq (\langle h \rangle \cap \langle y \rangle) = 1$$

Тому, N_G^A — нільпотентна недедекіндова група. □

Існування нескінченних не локально нільпотентних груп, які мають скінченну нільпотентну недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп підтверджує наступний приклад.

Приклад 3.6.4. $G = \langle h \rangle \rtimes (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = [b, d] = [c, d] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $|h| = 3$, $d^{-1}hd = h^{-1}$, $[\langle A, b, c \rangle, \langle h \rangle] = E$.

Група G — нескінченна не локально нільпотентна, а її норма $N_G^A = \langle a_2, b, c \rangle$, де $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$ — скінченна нільпотентна група.

3.7 Неперіодичні групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

У цьому підрозділі будуть вивчатися властивості неперіодичних груп з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп. Наступне твердження визначає достатні умови, за яких вказана норма є дедекіндовою підгрупою групи.

Теорема 3.7.1. *Норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неперіодичної групи G дедекіндова в кожному з випадків:*

- 1) норма N_G^A — скінченна;
- 2) група G містить нескінченну циклічну N_G^A -допустиму підгрупу $\langle g \rangle$, що задовольняє умову

$$\langle g \rangle \cap N_G^A = E.$$

Доведення. 1. Нехай $|N_G^A| < \infty$. Оскільки $N_G^A \triangleleft G$, то

$$[G : C_G(N_G^A)] < \infty$$

і централізатор $C_G(N_G^A)$ містить елемент g нескінченного порядку. Тоді для довільного елемента $y \in N_G^A$ підгрупа $\langle y, g \rangle \in N_G^A$ -допустимою, звідки

$$\langle y \rangle = \langle y, g \rangle \cap N_G^A \triangleleft N_G^A.$$

Отже, норма N_G^A у цьому випадку є дедекіндовою групою.

2. Нехай G містить таку N_G^A -допустиму підгрупу $\langle g \rangle$, що $|g| = \infty$ і

$$\langle g \rangle \cap N_G^A = E.$$

Тому для довільного елемента $y \in N_G^A$ маємо

$$[\langle g \rangle, \langle y \rangle] \in \langle g \rangle \cap N_G^A = E.$$

Отже, підгрупа $\langle g, y \rangle = \langle g \rangle \times \langle y \rangle$ — абелева нециклічна і тому N_G^A -допустима. З цього випливає, що

$$\langle y \rangle = \langle g \rangle \times \langle y \rangle \cap N_G^A \triangleleft N_G^A,$$

звідки N_G^A — дедекіндова група. □

Зазначимо, що при виконанні будь-якої з умов теореми 3.7.1, дедекіндовою буде й норма N_G нециклічних підгруп групи, оскільки $N_G \subseteq N_G^A$.

З теореми 3.7.1 випливають наступні твердження.

Наслідок 3.7.1. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G недедекіндова, то кожна нормальна нескінченна циклічна підгрупа даної групи має з нормою N_G^A неодиначний перетин.*

Наслідок 3.7.2. *Якщо неперіодична група G містить абелеву нециклічну підгрупу B без скруту і має періодичну норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, то підгрупа N_G^A дедекіндова.*

Наслідок 3.7.3. Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неперіодичної групи G недедекіндова, то вона нескінченна.

Наслідок 3.7.4. Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неперіодичної групи G недедекіндова і періодична, то всі абелеві підгрупи без скруту групи G є циклічними, а N_G^A — нескінченною групою.

Лема 3.7.1. Якщо неперіодична група G містить відмінну від одиничної N_G^A -допустиму підгрупу H таку, що

$$N_G^A \cap H = E,$$

то в N_G^A нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи, якщо вона неперіодична.

Зокрема, N_G^A дедекіндова, якщо для довільного відмінного від одиниці елемента $y \in N_G^A$ знайдеться елемент $h \in H$ такий, що $\langle y, h \rangle$ — нециклічна підгрупа.

Доведення. Оскільки підгрупа H є N_G^A -допустимою і $N_G^A \triangleleft G$, то

$$H \cdot N_G^A = H \times N_G^A.$$

Нехай $x \in N_G^A$ і $|x| = \infty$. Тоді для $h \neq 1$ і $h \in H$ підгрупа $\langle x, h \rangle$ абелева нециклічна і тому N_G^A -допустима. Звідси

$$\langle x, h \rangle \cap N_G^A = \langle x \rangle \triangleleft N_G^A,$$

що й потрібно було довести.

Якщо кожного елемента $y \in N_G^A$ можна вказати такий елемент $h \in H$, що $\langle y, h \rangle$ — нециклічна підгрупа, то

$$\langle y, h \rangle \cap N_G^A = \langle y \rangle \triangleleft N_G^A$$

і підгрупа N_G^A дедекіндова. □

Теорема 3.7.2. Якщо в неперіодичній групі G норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклічну підгрупу і не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, то і група G не містить таких підгруп.

Доведення. За наслідком 3.7.3 $|N_G^A| = \infty$ і оскільки норма N_G^A містить абелеві нециклічні підгрупи, то всі такі підгрупи нормальні в N_G^A . Тому N_G^A є розв'язною \overline{HA} -групою без вільних абелевих підгруп рангу 2, тобто групою одного з типів 1) — 3), 6) — 9) твердження 3.1.4, а також типів 4) — 5) цього ж твердження за умови відсутності в них вільних абелевих підгруп рангу 2.

Нехай

$$G \supset M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle, |x_1| = |x_2| = \infty.$$

Тоді за наслідком 3.7.1 $M \cap N_G^A \neq E$ і за умовою теореми

$$M \cap N_G^A = \langle y \rangle, |y| = \infty.$$

Розглянемо підгрупу

$$G_1 = M \cdot N_G^A.$$

З доведеного випливає існування такої підгрупи $\langle x \rangle \subset M$, що

$$\langle x \rangle \cap N_G^A = E$$

і $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$.

Тоді $\langle x, y^n \rangle \triangleleft G_1$ для довільного натурального числа n і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, y^n \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

За теоремою 3.7.1 підгрупа N_G^A дедекіндова, що суперечить умові теореми. \square

Дослідимо тепер неперіодичні групи з вільною абелевою підгрупою рангу 2, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп яких недедекіндова, а також зв'язки між нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп та нормою $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп.

Теорема 3.7.3. *Якщо неперіодична група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 та її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і містить абелеву нециклічну підгрупу, то норма N_G^A також містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 і може бути групою лише одного з типів:*

- 1) $N_G^A = A \langle c \rangle$, де A – абелева група, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, $|c| = 4$, $c^{-1}ac = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $c^2 \in A$ і є єдиною інволюцією в A ;
- 2) $N_G^A = A \rtimes \langle c \rangle$, де A – абелева група без інволюцій, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, $|c| = 2$ і $c^{-1}ac = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Доведення. Оскільки група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, то за теоремою 3.7.2 норма N_G^A також містить таку підгрупу. Тоді N_G^A є неабелевою неперіодичною $\overline{H\bar{A}}$ -групою. Подальше доведення теореми впливає з твердження 3.1.4. \square

Лема 3.7.2. Нехай G — неперіодична група, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 і має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Якщо група G містить абелеву нециклічну підгрупу та скінченну абелеву нормальну в групі G підгрупу F і централізатор $C_G(F)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи, то

$$N_G^A \subseteq N_G(C_\infty).$$

Доведення. Враховуючи умови леми, приходимо до висновку, що норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп є групою одного з типів 1)–2) теореми 3.7.3.

Покажемо, що довільна нескінченна циклічна підгрупа $\langle x \rangle$ групи $G \in N_G^A$ -допустимою. Якщо $x \in N_G^A$, то $\langle x \rangle \triangleleft N_G^A$, оскільки в N_G^A нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи.

Нехай $x \in G \setminus N_G^A$. Далі проаналізуємо кожен з двох випадків.

1. Нехай норма N_G^A є групою першого типу.

Оскільки c^2 — єдина інволюція в A , то силовська 2-підгрупа з A локально циклічна і нормальна в G , бо підгрупа A характеристична в N_G^A як підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи N_G^A . Тоді $c^2 \in Z(G)$ і, не порушуючи загальності міркувань, $F = \langle c^2 \rangle$.

Оскільки

$$\langle x, c^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A,$$

то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$ і за наслідком 3.1.1

$$\langle x \rangle \bigcap N_G^A \neq E.$$

Група G містить вільну абелеву підгрупу $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ рангу 2. Підгрупа $\langle x \rangle$ має хоча б з однією з підгруп $\langle a \rangle$ або $\langle b \rangle$ одиничний перетин.

Нехай $\langle x \rangle \bigcap \langle a \rangle \neq E$ і $\langle x \rangle \bigcap \langle b \rangle = E$. Тоді $x^k = a^m$. Оскільки $\langle x, c^2 \rangle \triangleleft G_1$, то $b^{-1}xb = x^\alpha c^{2\beta}$. В силу нормальності підгрупи $\langle x^2 \rangle$ в групі G_1

$$b^{-1}x^2b = x^{2\alpha}, b^{-1}x^{2k}b = x^{2\alpha k} = x^{2k},$$

тому $\alpha = 1$ і $b^{-1}xb = xc^{2\beta}$. Тоді $b^{-2}xb^2 = x$ і підгрупа $\langle x, b^2 \rangle$ нормальна в групі G_1 як абелева нециклічна. Звідси $\langle x, b^{2n} \rangle \triangleleft G_1$ для довільного натурального числа n і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, b^{2n} \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

Таким чином, довільна нескінченна циклічна підгрупа $\langle x \rangle$ групи $G \in N_G^A$ -допустимою і $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$.

2. Нехай норма N_G^A є групою другого типу. За умовою норма N_G^A містить скінченну нормальну в G абелеву підгрупу F . Очевидно, що $F < A$ і $[G : C_G(F)] < \infty$. За умовою $x \in C_G(F)$. Розглянемо підгрупу

$$G_1 = \langle x \rangle N_G^A$$

і два випадки залежно від будови підгрупи F .

Якщо $F \supset \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle$, $|f_1| = p$, $|f_2| = q$, де p і q — прості числа (не обов'язково різні), то $\langle x, f_1 \rangle \triangleleft G_1$, і $\langle x, f_2 \rangle \triangleleft G_1$. Тоді

$$\langle x, f_1 \rangle \cap \langle x, f_2 \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$$

і підгрупа $\langle x \rangle \in N_G^A$ -допустимою.

Якщо F — примарна циклічна підгрупа, то $F \supset F_1 = \langle f \rangle$, де $|f| = p > 2$. Тоді $\langle x, f \rangle \triangleleft G_1$ і $\langle x^p \rangle \triangleleft G_1$. За наслідком 3.1.1 $\langle x^p \rangle \cap N_G^A \neq E$ і тому

$$\langle x \rangle \cap N_G^A \neq E.$$

За умовою норма N_G^A містить вільну абелеву підгрупу $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ рангу 2. Підгрупа $\langle x \rangle$ має хоча б з однією з підгруп $\langle a \rangle$ або $\langle b \rangle$ неединичний перетин. Вважатимемо, що

$$\langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq E, x^k = a^m$$

$$\langle x \rangle \cap \langle b \rangle = E.$$

Оскільки $\langle x, f \rangle \triangleleft G_1$, то $b^{-1}xb = x^\alpha f^\beta$. Тоді

$$b^{-1}x^{kp}b = x^{kp\alpha} = x^{kp},$$

$\alpha = 1$ і $b^{-1}xb = xf^\beta$. У такому випадку $b^{-p}xb^p = x$ і $\langle x, b^p \rangle \triangleleft G_1$. Отже, $\langle x, b^{pn} \rangle \triangleleft G_1$ для довільного натурального числа n

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, b^{pn} \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

Підгрупа $\langle x \rangle \in N_G^A$ -допустимою і $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$. □

Якщо група G задовольняє умовам леми 3.7.2, то її норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп є недедекіндовою групою. Використовуючи теорему 1.1.2, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.7.5. *Якщо група G задовольняє умовам леми 3.7.2, то всі її елементи нескінченного порядку породжують нормальну абелеву підгрупу B і*

$$N_G(C_\infty) = B \langle d \rangle, |d| \in \{2, 4\}, d^2 \in B, d^{-1}bd = b^{-1}$$

для довільного елемента $b \in B$.

Лема 3.7.3. *Якщо в неперіодичній групі G має місце включення $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$ і*

$$N_G(C_\infty) = B \langle d \rangle,$$

де B — абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G , $|d| = 2$ або $|d| = 4$, $d^2 \in B$ і $d^{-1}bd = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$, то довільна абелева нециклічна підгрупа групи G міститься в $N_G(C_\infty)$.

Доведення. Нехай F — довільна абелева нециклічна підгрупа групи G , що задовольняє умовам леми.

Якщо підгрупа F — неперіодична, то вона породжується усіма елементами нескінченного порядку і тому

$$F \subset N_G(C_\infty).$$

Якщо підгрупа F — скінченна, то вона N_G^A -допустима і тому її централізатор містить елемент x нескінченного порядку з N_G^A . Тоді для довільного елемента $f \in F$ маємо $|fx| = \infty$, $fx \in N_G(C_\infty)$ і

$$f \in N_G(C_\infty).$$

Отже, $F \subset N_G(C_\infty)$.

Нехай тепер F — нескінченна періодична абелева підгрупа. Якщо

$$F \supseteq \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle,$$

де $|f_1| = |f_2| = p$ — просте число, то для довільного елемента $f \in F$ підгрупа $\langle f, f_1, f_2 \rangle$ — N_G^A -допустима, містить в своєму централізаторі елемент нескінченного порядку з N_G^A і, враховуючи попередні міркування, належить до $N_G(C_\infty)$. Звідси $F \subset N_G(C_\infty)$ і у цьому випадку.

Нехай F — нескінченна локально скінченна підгрупа, що містить квазіциклічну підгрупу P . Тоді для довільного елемента $f \in F$ підгрупа $\langle f, P \rangle$ є N_G^A -допустимою, централізатор елемента f містить елементи нескінченного порядку і тому $f \in N_G(C_\infty)$. Отже, знову $F \subset N_G(C_\infty)$.

Нехай F — нескінченна локально скінченна підгрупа, яка не містить квазіциклічних підгруп. Тоді для довільного елемента $f \in F$ існує нескінченна нециклічна підгрупа F_1 з F така, що

$$\langle f \rangle \cap F_1 = E,$$

де $\pi(\langle f \rangle) \cap \pi(F_1) = \emptyset$.

Тоді підгрупа $\langle f, F_1 \rangle$ — N_G^A -допустима, а значить, N_G^A -допустимою буде й підгрупа $\langle f \rangle$ як характеристична в $\langle f, F_1 \rangle$. Отже, централізатор елемента f містить елементи нескінченного порядку, тому $f \in N_G(C_\infty)$ і знову $F \subset N_G(C_\infty)$. \square

Теорема 3.7.4. *Нехай G — неперіодична група, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп*

недедекіндова. Якщо норма N_G^A містить абелеву нециклічну підгрупу та скінченну абелеву нормальну в групі G підгрупу F і централізатор $C_G(F)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи, то

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = B \langle d \rangle,$$

де B — абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G , $d^{-1}bd = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$, $|d| = 2$ або $|d| = 4$ (у останньому випадку $d^2 \in B$ і d^2 — єдина інволюція групи G).

Доведення. За лемою 3.7.1 має місце включення $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$. За лемою 3.7.2 всі абелеві нециклічні підгрупи групи G містяться в нормі $N_G(C_\infty)$ і нормальні в ній. Отже, $N_G(C_\infty) \subseteq N_G^A$ і

$$N_G^A = N_G(C_\infty).$$

Тоді за наслідком 3.7.6 норма N_G^A є групою типу, зазначеного в теоремі.

Якщо $|d| = 4$, то норма N_G^A має єдину інволюцію d^2 . Покажемо, що інволюція d^2 єдина і в групі G . Припустимо, що існує інволюція $a \in G \setminus N_G^A$. Тоді $\langle a, d^2 \rangle \subset B$. Оскільки підгрупа $\langle a, d \rangle$ абелева нециклічна, то за лемою 3.7.3 $\langle a, d \rangle \subset B$, що неможливо. Отже, елемент d^2 є єдиною інволюцією в групі G . \square

Наслідок 3.7.6. *Якщо неперіодична група G має недедекіндову норму N_G^A і $N_G^A = N_G(C_\infty)$, то фактор-група G/N_G^A періодична.*

Наступний приклад показує, що фактор-група G/N_G^A може бути неабелевою, а норма N_G^A містить ненормальні в G абелеві нециклічні підгрупи.

Приклад 3.7.1. $G = (((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle \times \langle a_5 \rangle \times \langle a_6 \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle d \rangle$, де $|a_i| = \infty$, $i = \overline{1, 6}$, $|b| = 7$, $|c| = 3$, $|d| = 4$, $b^{-1}a_i b = a_{i+1}$ для $i = \overline{1, 5}$, $b^{-1}a_6 b = a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1}a_6^{-1}$, $c^{-1}a_1 c = a_2$, $c^{-1}a_2 c = a_1^{-1}a_2^{-1}$, $c^{-1}a_3 c = a_4$, $c^{-1}a_4 c = a_3^{-1}a_4^{-1}$, $c^{-1}a_5 c = a_6$, $c^{-1}a_6 c = a_5^{-1}a_6^{-1}$, $c^{-1}bc = b^2$, $d^{-1}a_i d = a_i^{-1}$, $i = \overline{1, 6}$, $[d, b] = [d, c] = 1$.

Неважко перевірити, що в цій групі

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d \rangle,$$

$G/N_G^A \cong \langle b, c \rangle$ — неабелева група порядку 21 і $\langle a_i, a_{i+1} \rangle \not\leq N_G^A$ для $i = \overline{1, 6}$.

Дослідимо тепер взаємозв'язки між властивостями неперіодичних груп, що не містять вільної абелевої підгрупи рангу 2, та властивостями їх норм абелевих нециклічних підгруп.

Лема 3.7.4. Нехай G — неперіодична локально розв'язна група, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і не містить вільної абелевої підгрупи рангу 2. Тоді:

- 1) якщо група G містить нескінченну циклічну нормальну підгрупу $\langle z \rangle$, то централізатор $C = C_G(\langle z \rangle)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи G , всі абелеві нециклічні підгрупи групи G і періодична частина $T(C)$ є нормальною підгрупою, а фактор-група $C/T(C)$ — абелева без скруту рангу 1;
- 2) якщо норма N_G^A містить нормальну абелеву нециклічну підгрупу A без скруту рангу 1 і $C = C_G(A)$ — її централізатор, то фактор-група C/A локально скінченна, періодична частина $T(C)$ нормальна в G , а фактор-група $C/T(C)$ — абелева без скруту рангу 1;
- 3) якщо при цьому норма N_G^A містить нормальну в G абелеву нециклічну підгрупу A без скруту рангу 1, містить нормальну скінченну підгрупу K , то централізатор $C = C_G(A)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи G , всі абелеві нециклічні підгрупи групи G і $|G/C| \leq 2$.

Доведення. Розглянемо кожен із зазначених у лемі випадків.

1. Нехай група G задовольняє умовам лемі. Вивчимо будову централізатора $C = C_G(\langle z \rangle)$, де $|z| = \infty$, $\langle z \rangle \triangleleft G$. За теоремою 3.7.1

$$\langle z \rangle \cap N_G^A \neq E.$$

Тому, не порушуючи загальності міркувань, можна вважати $z \in N_G^A$. За теоремою 3.7.2 група G не містить вільної абелевої підгрупи рангу 2. Звідси маємо, що підгрупа C містить всі елементи нескінченного порядку групи G . Справді, якщо $x \in G \setminus C$ і $|x| = \infty$, то

$$x^{-1}zx = z^{-1}, x^{-2}zx^2 = z$$

і тому $\langle x \rangle \cap \langle z \rangle \neq E$.

Нехай $x^k = z^m$. Тоді

$$x^{-1}z^mx = z^{-m} = z^m$$

і $z^{2m} = 1$, що неможливо. Отже, містить всі елементи нескінченного порядку групи і, до того ж, вона ними породжується.

Звідси та з умови локальної розв'язності групи G маємо, що $C/\langle z \rangle$ — локально скінченна група. За твердженням 3.9 [153] елементи скінченного порядку групи C складають нормальну підгрупу $T(C)$ і $C/T(C)$ — абелева група без скруту рангу 1.

Підгрупа C містить також всі p -елементи при $p \neq 2$. Тому $G = C$, якщо група G не містить інволюцій, або

$$G = \langle y \rangle C, |y| = 2^k, k \geq 1, y^2 \in C,$$

якщо група G містить інволюції.

Покажемо, що централізатор C містить всі абелеві нециклічні підгрупи групи G . Якщо A — неперіодична абелева нециклічна підгрупа, то вона породжується елементами нескінченного порядку і тому $A \subset C$. Якщо A — нециклічна періодична абелева підгрупа, то вона N_G^A -допустима і

$$[A, \langle z \rangle] \subset A \bigcap \langle z \rangle = E.$$

Тоді $A \subset C$ і C містить всі абелеві нециклічні підгрупи групи G .

2. Дане твердження леми отримуємо безпосередньо з твердження 3.9 [153] та теореми 3.7.2.

3. Нехай норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп задовольняє умовам леми. Покажемо, що централізатор C містить всі елементи нескінченного порядку групи G .

Припустимо, що існує елемент $x \in G \setminus C$, $|x| = \infty$ і $\langle x \rangle \cap C = E$. Норма N_G^A містить нормальну скінченну підгрупу K . Оскільки

$$[G : C_G(K)] < \infty,$$

то $x^l \in C_G(K)$ для деякого цілого числа l . Підгрупа $\langle x^l, K \rangle \in N_G^A$ -допустимою і $\langle x^{l|K|} \rangle$ також N_G^A -допустима. Тоді

$$[\langle x^{l|K|} \rangle, N_G^A] \subset \langle x^{l|K|} \rangle \bigcap N_G^A = E$$

і група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, що неможливо. Отже, $\langle x \rangle \cap C \neq E$.

Оскільки C є абелевою нециклічною групою без скруту рангу 1, то факторгрупа G/C ізоморфна підгрупі мультиплікативної групи раціональних чисел. Отже, $|G/C| \leq 2$. Для довільного елемента $a \in A$ $x^{-1}ax = a_1$. Оскільки факторгрупа C/A локально скінченна, то нехай $x^{2m} = a^n$. Тоді

$$x^{-1}a^nx = a_1^n = a^n$$

і $a_1^n a^{-n} = 1$, $(a_1 a^{-1})^n = 1$. Оскільки $n \neq 0$, то $a_1 a^{-1} = 1$ і $a_1 = a$. Отже, $x \in C$ і C містить всі елементи нескінченного порядку групи G .

Покажемо, що централізатор C містить довільну абелеву нециклічну підгрупу F групи G . Якщо F — абелева нециклічна періодична підгрупа, то вона N_G^A -допустима і

$$[F, A] \subset F \bigcap A = E.$$

Якщо F — неперіодична абелева нециклічна підгрупа, то вона породжується елементами нескінченного порядку і $F \subset C$. \square

Наслідок 3.7.7. *Централізатори всіх нормальних нескінченних циклічних підгруп неперіодичної локально розв'язної групи G , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої недедекіндова і не містить вільної абелевої підгрупи рангу 2, збігаються.*

Доведення. Нехай $\langle z \rangle \triangleleft G$ і $\langle v \rangle \triangleleft G$, де $|z| = |v| = \infty$. Припустимо, що

$$C_G(\langle z \rangle) \neq C_G(\langle v \rangle).$$

Тоді для довільного елемента $b \in C_G(\langle z \rangle) \setminus C_G(\langle v \rangle)$ маємо $[b, z] = 1$ і $b^{-1}vb = v^{-1}$.

Візьмемо довільний елемент $y \in \langle z \rangle \cap \langle v \rangle$. Тоді одночасно виконуються рівності

$$b^{-1}yb = y, b^{-1}yb = y^{-1},$$

і тому $y^2 = 1$, що можливо лише за умови $y = 1$. Отже,

$$\langle z \rangle \cap \langle v \rangle = E.$$

Але у такому випадку група G містить вільну абелеву підгрупу $\langle z \rangle \times \langle v \rangle$ рангу 2, що неможливо. Тому

$$C_G(\langle z \rangle) = C_G(\langle v \rangle),$$

що й треба було довести. □

Теорема 3.7.5. *Нехай G — неперіодична локально розв'язна група і її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова є скінченним розширенням нескінченної циклічної нормальної підгрупи і не є ІН-групою. Тоді група G також є скінченним розширенням нескінченної циклічної нормальної підгрупи, централізатор якої містить всі елементи нескінченного порядку і є добутком нормальної циклічної р-групи або групи кватерніонів порядку 8 і нескінченної циклічної групи.*

Доведення. Розіб'ємо доведення на декілька кроків залежно від будови норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G .

1. Нехай $N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p^n$ (при $p = 2, n > 1$), $|b| = \infty$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$.

У цьому випадку $Z(N_G^A) = \langle a^p, b^p \rangle$. Тому

$$\langle b^{p^n} \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G$$

як характеристична підгрупа $Z(N_G^A)$. Позначимо $C = C_G(\langle z \rangle)$. При цьому за твердженням 3.9 [153] періодична частина централізатора $T(C) \triangleleft G$ і $C/T(C)$ — абелева група без скруту рангу 1. Оскільки N_G^A за умовою не містить вільної абелевої підгрупи рангу 2, то за теоремою 3.7.2 фактор-група $G/\langle z \rangle$ — періодична локально скінченна група.

Оскільки N_G^A містить ненормальні нескінченні циклічні підгрупи, то за лемою 3.7.1 періодична частина $T(C)$ має єдину підгрупу простого порядку $\langle a^{p^{n-1}} \rangle$. Тому $T(C)$ є або локально циклічною p -групою, або кватерніонною 2-групою.

Покажемо, що підгрупа $T(C)$ скінченна. Нехай $T(C) \supset P$, де P – квазі-циклічна підгрупа. Нехай $d \in P$. Тоді

$$[b, zd] = [b, d] \in P \cap (\langle zd \rangle \times \langle a^{p^{n-1}} \rangle) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

Тоді $[b, P] = E$ і $[b, a] = 1$, що неможливо за умовою. Отже, $|T(C)| < \infty$.

Нехай $T(C) = \langle c \rangle$. Тоді

$$T(C)N_G^A = \langle c \rangle \rtimes \langle b \rangle,$$

де $\langle c \rangle \supseteq \langle a \rangle$. Якщо $\langle c \rangle \neq \langle a \rangle$, то $|[b, c]| > p$, оскільки в іншому випадку $[b, a] = 1$, що неможливо. З іншого боку,

$$[b, cz] = [b, c] \in \langle c \rangle \cap (\langle cz \rangle \times \langle a^{p^{n-1}} \rangle) = \langle a^{p^{n-1}} \rangle.$$

З цього слідує, що $\langle c \rangle = \langle a \rangle$ і

$$T(C)N_G^A = N_G^A.$$

Нехай $T(C)$ – кватерніонна група:

$$T(C) = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = 2^k, k \geq 2, h_1^{2^{k-1}} = h_2^2, h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}.$$

У цьому випадку $p = 2$ і $|a| \geq 4$. Покажемо, що $|T(C)| = 8$. Оскільки $\langle a \rangle \triangleleft G$, то можна вважати, що $\langle a \rangle \subseteq \langle h_1 \rangle$. Якщо допустити, що $|h_1| > |a|$, то з умови N_G^A -допустимості підгрупи $\langle h_1, z \rangle$ маємо N_G^A -допустимість її характеристичної підгрупи $\langle h_1 \rangle$. Тоді $|[h_1, b]| > 2$, інакше $[a, b] = 1$, що неможливо за умовою. З іншого боку,

$$[b, h_1z] = [b, h_1] \in \langle h_1 \rangle \cap (\langle h_1, z \rangle \times \langle h_1^{2^{k-1}} \rangle) = \langle h_1^{2^{k-1}} \rangle.$$

Отримали протиріччя і тому $|h_1| = |a|$. Оскільки $\langle h_2, z \rangle$ – N_G^A -допустима, то і $\langle h_2 \rangle$ – N_G^A -допустима. Тоді

$$[a, h_2] \in \langle a \rangle \cap \langle h_2 \rangle = \langle h_2^2 \rangle.$$

З цього слідує, що $|a| = 4$ і $T(C) = \langle a, h_2 \rangle$ – група кватерніонів порядку 8.

Покажемо, що група G не містить абелевих нециклічних підгруп без скруту рангу 1. Припустимо, що X – максимальна абелева нециклічна підгрупа без скруту рангу 1 групи G . Підгрупа $X \in N_G^A$ -допустимою, тому за лемою 3.7.4 вона абелева. Тому $C' \subseteq T(C)$.

Оскільки $N_G^A \subseteq C$, то

$$[N_G^A, X] \subseteq T(C) \cap X = E.$$

Тоді $X \subset Z(X \cdot N_G^A)$ і $C_1 = X \cdot N_G^A \in \overline{HA}$ -групою. Враховуючи будову \overline{HA} -груп,

$$C_1 = H \times B,$$

де B — група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів. Оскільки $C_1 \supseteq T(C) \supseteq C'$, то $C_1 \triangleleft C$ і $C_1^4 = B \triangleleft C$.

Покажемо, що підгрупа B міститься в централізаторі довільної абелевої нециклічної підгрупи A групи. За лемою 3.7.4 $A \subset C$. Якщо A неперіодична абелева нециклічна підгрупа, то вона породжується елементами нескінченного порядку.

Нехай $g \in A$ і $|g| = \infty$. Тоді $g \in C$ і $[g, B] \subset B$. Але, з іншого боку,

$$[\langle g \rangle, B] \subseteq T(C)$$

і $[\langle g \rangle, B] = E$. Якщо A періодична абелева нециклічна, то $A \subseteq T(C)$, що неможливо. Значить, $B \subseteq N_G^A$, що суперечить будові норми N_G^A . Отже, всі абелеві підгрупи без скруту рангу 1 групи G циклічні.

Тоді $T/T(C)$ — циклічна група і

$$C = T(C) \rtimes \langle x \rangle,$$

де $|x| = \infty$. Отже, централізатор C нескінченної циклічної нормальної підгрупи $\langle z \rangle$ містить всі елементи нескінченного порядку і є добутком нормальної циклічної p -групи або групи кватерніонів порядку 8 і нескінченної циклічної групи. Теорему в цьому випадку доведено.

2. $N_G^A = H \times \langle b \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, $|b| = \infty$.

В цьому випадку $Z(N_G^A) = \langle h_1^2 \rangle \times \langle b \rangle$ і тому $\langle b^2 \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G$. Централізатор $C = C_G(z)$ має індекс не вище 2 в групі G . При цьому $T(C) \triangleleft G$,

$$T(C) \supset H,$$

$C/T(C)$ — абелева група без скруту рангу 1, а $G/\langle z \rangle$ — локально скінченна група.

Оскільки N_G^A містить ненормальні нескінченні циклічні підгрупи, то за лемою 3.7.1 $T(C)$ має єдину підгрупу простого порядку $\langle h_1^2 \rangle$, причому $\langle h_1^2 \rangle \subseteq Z(G)$. Тому $T(C)$ є кватерніонною 2-групою.

Покажемо, що $T(C) = H$. Нехай

$$T(C) \supset \langle c, d \rangle,$$

де $|c| = 8$, $|d| = 4$, $c^4 = d^2$, $d^{-1}cd = c^{-1}$. Тоді $H = \langle c^2, d \rangle$. Підгрупа $\langle cz \rangle \times \langle h_1^2 \rangle \in N_G^A$ -допустимою. Тому її характеристична підгрупа $\langle c^2 z^2 \rangle$ також N_G^A -допустима. Тоді

$$[H, c^2 z^2] = [H, c^2] \in H \cap \langle c^2 z^2 \rangle = E,$$

що неможливо. Отже, $T(C) = H$.

Оскільки $N_G^A \subset C$ і $T(C) = H$, то аналогічно попередньому випадку покажемо, що група G не містить абелевих нециклічних підгруп рангу 1 без скруту. Тоді фактор-група $C/T(C)$ є циклічною підгрупою нескінченного порядку і

$$C = H \rtimes \langle x \rangle,$$

де $|x| = \infty$. Звідси

$$[H, \langle x, h_1^2 \rangle] \subseteq \langle h_1^2 \rangle$$

і $C = H \times \langle y \rangle$, де $y = x$, або $y = xh_1$, або $y = xh_2$, або $y = xh_1h_2$. Отже, є \overline{HA} -групою і централізатор містить всі елементи нескінченного порядку і є добутком нормальної групи кватерніонів порядку 8 і нескінченної циклічної групи.

3. $N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = \infty$, $|b| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

У цьому випадку комутант N_G^A циклічний і

$$\langle a^2 \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G, C = C_G(z) \neq G.$$

При цьому $G = C \langle b \rangle$, $b^2 \in C$. Як і в попередніх випадках доводиться, що підгрупа $T(C)$ скінченна і має єдину підгрупу порядку 2.

Нехай $T(C) = \langle c \rangle$. Тоді $b^2 \in \langle c \rangle$. Допустимо, що $c_1 \in \langle c \rangle$ і $|c_1| = 8$. Оскільки $\langle c \rangle \triangleleft G$, то $\langle c_1 \rangle \langle b \rangle$ — 2-група порядку 16, яка породжена двома елементами порядку 8. Тоді вона містить елементарну абелеву підгрупу $\langle b^4 \rangle \times \langle t \rangle$ порядку 4, що неможливо за лемою 3.7.1. Отже,

$$T(C) = \langle b^2 \rangle.$$

Нехай $T(C)$ — кватерніонна 2-група,

$$T(C) = H = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = 2^n, n \geq 2, h_1^{2^{n-1}} = h_2^2, h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}.$$

Оскільки $H \triangleleft G$, то можна розглянути підгрупу $\langle b \rangle H$. Якщо вона містить елементарну абелеву підгрупу $\langle b^2 \rangle \times \langle t \rangle$ порядку 4, то $t \notin C$ і далі, як і раніше, приходимо до протиріччя. Якщо $\langle b \rangle H$ — кватерніонна група, то в ній нормальні всі циклічні підгрупи порядку більше 4. Тоді

$$\langle b \rangle \triangleleft \langle b \rangle \cdot H$$

і H містить такий елемент h порядку 4, що $h^{-1}bh = b^{-1}$. Але $\langle h, z \rangle \in N_G^A$ -допустимою підгрупою і тому

$$b^{-2} = [b, h] \in \langle b \rangle \cap \langle h, z \rangle = \langle h^2 \rangle, |b^{-2}| = 2,$$

що неможливо. Отже, $T(C)$ — циклічна група.

Покажемо, що група G не містить абелевих нециклічних підгруп без скруту рангу 1. Допустимо, що X — максимальна абелева нециклічна підгрупа без скруту рангу 1 групи G . Підгрупа $X \in N_G^A$ -допустимою. Тоді

$$[(C \cap N_G^A), X] \subset X.$$

З іншого боку, за лемою 3.7.4 X абелева. Тому $C' \subseteq T(C)$ і

$$[(C \cap N_G^A), X] \subseteq T(C).$$

Отже,

$$[(C \cap N_G^A), X] = E.$$

Далі $[b, X] \subseteq X \cap N_G^A$, де $X \cap N_G^A$ — циклічна. Оскільки X — N_G^A -допустима, то для довільного елемента $x \in X$ маємо $b^{-1}xb = x^{-1}$ або $[b, x] = 1$. Якщо $b^{-1}xb = x^{-1}$, то $[\langle b \rangle, X]$ — нециклічний, що неможливо. Отже, $[b, x] = 1$. Але тоді

$$X \subset Z(X \cdot N_G^A)$$

і $C_1 = X \cdot N_G^A \in \overline{HA}$ -групою, що неможливо. Таким чином, всі абелеві підгрупи без скруту рангу 1 групи G циклічні.

Тоді $C/T(C)$ — циклічна група нескінченного порядку і

$$C = \langle b^2 \rangle \rtimes \langle x \rangle, |x| = \infty, G = C \langle b \rangle = \langle x \rangle \langle b \rangle.$$

Група G задовольняє умовам теореми.

4. $N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = \infty$, $|b| = 2p$, $p \neq 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. У цьому випадку комутант N_G^A збігається з підгрупою $\langle a^2 \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G$. Тому

$$G \neq C = C_G(\langle z \rangle), G = C \langle b \rangle = C \rtimes \langle b^p \rangle, b^2 \in C.$$

Як і в попередньому випадку доводимо, що періодична частина $T(C)$ має єдину підгрупу простого порядку $p \neq 2$ і є циклічною p -групою:

$$T(C) = \langle c \rangle.$$

Нехай $|c| > p$ і $c_1 \in \langle c \rangle$, $|c_1| = p^2$. Оскільки підгрупа $\langle zc_1 \rangle \times \langle b^2 \rangle$ N_G^A -допустима, то $\langle z^p c_1^p \rangle$ також N_G^A -допустима. Тоді

$$b^{-1}(z^p c_1^p)b = (z^p c_1^p)^{-1} = z^{-p} c_1^p,$$

звідки $z^{2p} = 1$, що неможливо. З іншого боку, випадок $b^{-1}(z^p c_1^p)b = z^p c_1^p$ також неможливий. Тому

$$T(C) = \langle c \rangle = \langle b^2 \rangle.$$

Аналогічно попередньому випадку покажемо, що група G не містить абелевої нециклічної підгрупи рангу 1 без скруту. Отже,

$$C = \langle b^2 \rangle \rtimes \langle x \rangle,$$

де $|x| = \infty$,

$$G = C \langle b \rangle = \langle x \rangle \langle b \rangle$$

і група G задовольняє умову теореми.

5. Нехай $N_G^A = (\langle a \rangle \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p \neq 2$, $|b| = 2$, $|c| = \infty$, $c^{-1}ac = a^{-1}$, $[a, b] = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$. В цьому випадку комутант

$$(N_G^A)' = \langle a, c^2 \rangle, \langle c^{2p} \rangle = \langle z \rangle \triangleleft G,$$

і

$$C = C_G(z) \supset \langle a \rangle \rtimes \langle c \rangle.$$

Отже,

$$G = C \rtimes \langle b \rangle, b \notin C.$$

Покажемо, що $T(C) = \langle a \rangle$. Справді, нехай маємо $g \in T(C)$, $|g| = q$ — просте число і $\langle g \rangle \neq \langle a \rangle$. Оскільки $(\langle z \rangle \times \langle g \rangle) - N_G^A$ -допустима, то і $\langle g \rangle$ буде N_G^A -допустимою. Тоді $G_1 = \langle g \rangle \times N_G^A$. Звідси

$$[a, c] \in \langle a \rangle \bigcap \langle c, g \rangle = E,$$

що неможливо. Отже, $T(C)$ має єдину підгрупу порядку $p \neq 2$. Далі як і в попередніх випадках доводиться, що $T(C) = \langle x \rangle$ — циклічна -група. Нехай $\langle x \rangle \supset \langle x_1 \rangle$, $|x_1| = p^2$. Тоді $\langle zx_1 \rangle \times \langle a \rangle - N_G^A$ -допустима, $(zx_1)^p = \langle z^p x_1^p \rangle - N_G^A$ -допустима і тому

$$b^{-1}(z^p x_1^p)b = z^{-p} x_1^p = (z^p x_1^p)^{-1}.$$

Звідси $x_1^{2p} = 1$, що неможливо. Отже, $T(C) = \langle a \rangle$.

Покажемо, що група G не містить абелевих нециклічних підгруп без скруту рангу 1. Допустимо, що X — максимальна абелева нециклічна підгрупа без скруту рангу 1 групи G . Підгрупа $X \in N_G^A$ -допустимою. Тоді

$$[(C \bigcap N_G^A), X] \subset X.$$

З іншого боку, за лемою 3.7.4 і абелева. Тоді

$$C' \subseteq T(C), [(C \bigcap N_G^A), X] \subseteq T(C).$$

Отже, $[(C \cap N_G^A), X] = E$.

Далі $X \subset Z(X \cdot (C \cap N_G^A))$ і тому

$$C_1 = X \cdot (C \cap N_G^A)$$

є \overline{HA} -групою, що неможливо. Таким чином, всі абелеві підгрупи без скруту рангу 1 групи G циклічні. Тоді

$$C = \langle a \rangle \rtimes \langle y \rangle, |y| = \infty, G = C \rtimes \langle b \rangle$$

і група G задовольняє умовам теореми. \square

Теорема 3.7.6. *Нехай G — неперіодична локально розв'язна група і її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп мішана, недедекіндова, містить абелеві нециклічні підгрупи без скруту рангу 1 і не є IH -групою. Тоді група G є скінченим розширенням нормальної абелевої нециклічної підгрупи без скруту рангу 1, централізатор якої є прямим добутком циклічної p -групи або групи кватерніонів порядку 8 і абелевої нециклічної підгрупи без скруту рангу 1.*

Доведення. Оскільки норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп не є IH -групою, то за твердженням 3.1.4 вона не містить вільної абелевої підгрупи рангу 2. Тоді за теоремою 3.7.2 і група G також не містить вільної абелевої підгрупи рангу 2.

Розіб'ємо доведення на декілька кроків залежно від будови норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G .

1. $N_G^A = H \times B$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, B — група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів.

Оскільки $(N_G^A)^4 = B^4 = B$, то $B \triangleleft G$. Позначимо $C = C_G(B)$. Група C не містить елемента f простого порядку q , що не належить H . Справді, нехай $|f| = q$ і $f \notin H$. Тоді $\langle f, B \rangle$ — N_G^A -допустима і тому $\langle f \rangle \triangleleft N_G^A \langle f \rangle$. Тоді є \overline{HA} -групою, що неможливо, враховуючи їх будову. Отже, $T(C) \supset H$ і має єдину підгрупу простого порядку — інволюцію $\langle h^2 \rangle$. Тоді $T(C)$ — кватерніонна 2-група.

Нехай $T(C) \supseteq \langle c, d \rangle$, де $|c| = 8$, $|d| = 4$, $c^4 = d^2$, $d^{-1}cd = c^{-1}$. Тоді $H = \langle c^2, d \rangle$. Підгрупа $\langle cb \rangle \times \langle d^2 \rangle$, де $b \in B$ і $|b| = \infty \in N_G^A$ -допустимою. Тому її характеристична підгрупа $\langle c^2b^2 \rangle$ також N_G^A -допустима. Тоді

$$[H, c^2b^2] = [H, c^2] \subset H \cap \langle c^2b^2 \rangle = E,$$

що неможливо. Отже, $T(C) = H$.

За лемою 3.7.4 фактор-група C/B локально скінченна, $C/T(C)$ — абелева група без скруту рангу 1 і $C \supseteq H \times B$.

За лемою 3.7.4 централізатор містить всі елементи нескінченного порядку групи G і всі абелеві нециклічні підгрупи групи G . Припустимо, що $C \neq N_G^A$. Тоді існує елемент $x \in C \setminus N_G^A$ і $|x| = \infty$. Підгрупи $\langle x, B \rangle$ і $\langle x, h^2 \rangle \in N_G^A$ -допустимими. Якщо підгрупа $\langle x, B \rangle$ без скруту, то

$$\langle x, B \rangle \cap \langle x, h^2 \rangle = \langle x \rangle$$

також N_G^A -допустима.

Якщо підгрупа $\langle x, B \rangle$ мішана, то

$$\langle x, B \rangle = \langle h \rangle \times B_1,$$

де $|h| \leq 4$, $B_1 \neq B$ і $x = hx_1$, $x_1 \in B_1$, $x_1 \notin N_G^A$. Підгрупи B_1 і $\langle x_1, h \rangle \in N_G^A$ -допустимими, тому підгрупа $B_1 \cap \langle x_1, h \rangle = \langle x_1 \rangle$ також N_G^A -допустима. Таким чином, якщо $C \neq N_G^A$, то можна вказати таку N_G^A -допустиму підгрупу $\langle x \rangle$, що $x \in C \setminus N_G^A$.

Отже, для довільного елемента $d \in N_G^A$

$$d^{-1}xd = x^\alpha.$$

Оскільки C/B локально скінченна, то для деякого цілого $x^k \in B$ маємо

$$d^{-1}x^kd = x^{k\alpha} = x^k.$$

Тоді $\alpha = 1$, $x \in Z(\langle x \rangle N_G^A)$ і $C_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA}$ -групою. Враховуючи будову \overline{HA} -груп,

$$C_1 = H \times B_1,$$

де B_1 — група, яка ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів.

За лемою 3.7.4 $C/T(C)$ абелева і $C' \subseteq T(C)$. Оскільки $C_1 \supseteq T(C) \supseteq C'$, то $C_1 \triangleleft C$ і

$$C_1^4 = B_1 \triangleleft C.$$

Покажемо, що підгрупа B_1 міститься в централізаторі довільної абелевої нециклічної підгрупи A групи. За лемою 3.7.4 $A \subset C$. Якщо A неперіодична абелева нециклічна підгрупа, то вона породжується елементами нескінченного порядку.

Нехай $g \in A$ і $|g| = \infty$. Тоді $g \in C$ і $[g, B_1] \subset B_1$. Але, з іншого боку,

$$[\langle g \rangle, B_1] \subseteq T(C)$$

і $[g, B_1] = E$. Якщо A періодична абелева нециклічна, то $A \subseteq T(C)$, що неможливо. Отже, $B_1 \subseteq N_G^A$, що суперечить вибору елемента x .

Таким чином, $C = N_G^A$ і C є прямим добутком абелевої нециклічної підгрупи без скруту рангу 1 і групи кватерніонів порядку 8. За лемою 3.7.4 C містить всі елементи нескінченного порядку групи G і $|G/C| \leq 2$.

Якщо $G = C$, то

$$G = C = N_G^A$$

і група G задовольняє умовам теореми.

Нехай $G \neq C$. Тоді $|G/C| = 2$ і $G = C \langle f \rangle$, де $|f| = 2^n$, $n > 2$, $f^2 \in C$. Отже, $|f| = 8$ і $H \langle f \rangle$ — узагальнена група кватерніонів порядку 16. У такому випадку

$$G = (H \times B) \langle f \rangle, H \langle f \rangle = \langle f, h \rangle, |f| = 8, |h| = 4, f^4 = h^2, h^{-1}fh = f^{-1}.$$

Оскільки f не може бути переставним з жодним елементом нескінченно-го порядку (інакше $f \in C$), то для довільного елемента $b \in B$ і $b \neq 1$ маємо:

$$f^{-1}bf = b_1, -b = f^{-2}bf^2 = f^{-1}b_1f.$$

Звідси

$$f^{-1}(bb_1)f = bb_1.$$

Тоді $bb_1 = 1$ і $b_1 = b^{-1}$. Отже, $f^{-1}bf = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$ і група G задовольняє умовам леми.

2. $N_G^A = A \rtimes \langle b \rangle$, де A — група, яка ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів, $|b| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Підгрупа

$$(N_G^A)' = A^2 = A$$

характеристична в нормальній підгрупі N_G^A і $A \triangleleft G$. Позначимо $C = C_G(A) \triangleleft G$. За лемою 3.7.4 фактор-група C/A локально скінченна і $C/T(C)$ абелева група без скруту рангу 1.

Припустимо, що $T(C)$ містить елемент d простого порядку q , який не належить $\langle b^2 \rangle$. Підгрупа $\langle d, A \rangle$ — N_G^A -допустима і тому

$$\langle d \rangle \triangleleft N_G^A \langle d \rangle.$$

Тоді $N_G^A \times \langle d \rangle \in \overline{HA}$ -групою, що неможливо. Отже, $T(C) \supset \langle b^2 \rangle$ і має єдину підгрупу простого порядку $\langle b^4 \rangle$.

Аналогічно до доведення пункту 3 теореми 3.7.5 можна довести, що

$$T(C) = \langle b^2 \rangle \subset N_G^A.$$

Оскільки $T(C) \triangleleft G$, то за лемою 3.7.4 фактор-група G/C циклічна порядку 2 і $G = C \langle b \rangle$.

Припустимо, що існує елемент $x \in C \setminus A$. Тоді $|x| = \infty$. Підгрупи $\langle x, A \rangle$ і $\langle x, b^4 \rangle \in N_G^A$ -допустимими. Тоді підгрупа

$$\langle x, A \rangle \bigcap \langle x, b^4 \rangle = \langle x \rangle$$

також N_G^A -допустима. Якщо підгрупа $\langle x, A \rangle$ без скруту, то

$$\langle x, A \rangle \cap \langle x, b^2 \rangle = \langle x \rangle$$

також N_G^A -допустима. Тоді або $[b, x] = 1$, або $b^{-1}xb = x^{-1}$. Якщо $[b, x] = 1$, то підгрупа $\langle x, b \rangle - N_G^A$ -допустима і $\langle b \rangle \triangleleft N_G^A$, що суперечить будові норми N_G^A . Отже, $b^{-1}xb = x^{-1}$.

Тоді підгрупа $G_1 = A_1 \rtimes \langle b \rangle$, де $A_1 = \langle x, A \rangle$, є \overline{HA} -групою. Враховуючи будову \overline{HA} -груп, підгрупа A_1 є 2-повною. У такому випадку

$$\langle b^2, x, A \rangle = \langle b^2 \rangle \times A_1$$

— абелева підгрупа централізатора C . За лемою 3.7.4 фактор-група $C/T(C)$ абелева і $C' \subseteq T(C)$. Оскільки

$$\langle b^2 \rangle \times A_1 \supseteq T(C) \supseteq C',$$

то $\langle b^2 \rangle \times A_1 \triangleleft C$. Враховуючи, що підгрупа A_1 2-повна, будемо мати

$$(\langle b^2 \rangle \times A_1)^4 = A_1^4 = A_1 \triangleleft C.$$

Покажемо, що підгрупа A_1 міститься в централізаторі довільної абелевої нециклічної підгрупи F групи. За лемою 3.7.4 $F \subset C$. Якщо F неперіодична абелева нециклічна підгрупа, то вона породжується елементами нескінченного порядку.

Нехай $f \in F$ і $|f| = \infty$. Тоді $f \in C$ і $[\langle f \rangle, A_1] \subset A_1$. З іншого боку, $[\langle f \rangle, A_1] \subseteq T(C)$ і $[\langle g \rangle, A_1] = E$. Якщо F періодична абелева нециклічна, то $F \subseteq T(C)$, що неможливо. Отже, $A_1 \subseteq N_G^A$, що суперечить вибору елемента x .

Якщо підгрупа $\langle x, A \rangle$ мішана, то

$$\langle x, A \rangle = \langle b^{2k} \rangle \times A_2,$$

де $|b^{2k}| \leq 4$, $A_2 \neq A$ і $x = b^{2k}x_1$, $x_1 \in A_2$, $x_1 \notin C_1$. Підгрупи A_2 і $\langle x_1, b^2 \rangle \in N_G^A$ -допустимими, тому підгрупа

$$A_2 \cap \langle x_1, b^2 \rangle = \langle x_1 \rangle$$

також N_G^A -допустима. Тоді $b^{-1}x_1b = x_1^{-1}$ і підгрупа

$$G_2 = A_2 \rtimes \langle b \rangle$$

є \overline{HA} -групою, причому підгрупа A_2 2-повна. Аналогічно до доведення попереднього абзацу отримуємо, що $A_2 \subseteq C_1$, а це суперечить вибору елемента x . Отже,

$$C = A \times \langle b^2 \rangle,$$

$G = N_G^A$ і група G задовольняє умовам теореми.

3. $N_G^A = A \rtimes \langle b \rangle$, де A — група, яка ізоморфна адитивній групі p -ових дробів ($p \neq 2$), $|b| = 2p$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Підгрупа A характеристична в нормальній підгрупі N_G^A , отже, $A \triangleleft G$. Позначимо

$$C = C_G(A) \rtimes G.$$

За лемою 3.7.4 фактор-група C/A локально скінченна, а фактор-група $C/T(C)$ абелева без скруту рангу 1.

Як і в попередньому пункті покажемо, що $T(C)$ містить єдину підгрупу простого порядку $p \neq 2$. Аналогічно до доведення пункту 4 теореми 3.7.5 покажемо, що

$$T(C) = \langle b^2 \rangle.$$

Знову за лемою 3.7.4 фактор-група G/C циклічна порядку 2 і $G = C \langle b \rangle$. Аналогічно до попереднього пункту покажемо, що

$$C = A \times \langle b^2 \rangle, G = N_G^A$$

і група G задовольняє умовам теореми. □

Теорема 3.7.7. *Будь-яка неперіодична локально розв'язна група G , в якій норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп є неабелевою групою без скруту, збігається з цією нормою:*

$$G = N_G^A.$$

Доведення. За умовою норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп

$$N_G^A = A \rtimes \langle b \rangle,$$

де A — група, яка ізоморфна адитивній групі p -ових дробів, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^m$, $m = \pm p^n$, $n \geq 1$ для довільного елемента $a \in A$.

Оскільки підгрупа A p -повна, то

$$(N_G^A)' = A \triangleleft G$$

як характеристична підгрупа в нормальній підгрупі N_G^A . Позначимо $C_G(A) = C \triangleleft G$. Фактор-група G/C ізоморфна підгрупі мультиплікативної групи раціональних чисел, причому $b^k \notin C$ для довільного натурального k .

Покажемо, що централізатор C є групою без скруту. Припустимо, що підгрупа C змішана, тоді група C містить підгрупу простого порядку $\langle d \rangle$. Підгрупа $\langle d, A \rangle \in N_G^A$ -допустимою і $\langle d \rangle$ також N_G^A -допустима як періодична частина підгрупи $\langle d, A \rangle$. Тоді підгрупа $\langle d \rangle \times N_G^A \in \overline{HA}$ -групою, що суперечить будові \overline{HA} -груп. Отже, централізатор C групою без скруту.

За лемою 3.7.4 фактор-група C/A локально скінченна і фактор-група $C/T(C)$ абелева група без скруту рангу 1. Оскільки $T(C) = E$, то централізатор C є абелевою групою без скруту рангу 1.

Покажемо, що фактор-група G/C циклічна. Припустимо, що вона містить підгрупу

$$G_1/C = \langle xC \rangle \times \langle yC \rangle,$$

де $|yC| = \infty$. Тоді $|xC| = \infty$ або $|xC| < \infty$.

Якщо $|xC| = 2$, то $x^2 \in C$. Якщо $|x| < \infty$, то $|x| = 2$, оскільки C група без скруту. Якщо $|x| = \infty$ і $x^2 \in C$, то існує такий елемент $c_1 \in C$, що $x^{-1}cx = c_1$, $c_1 \neq c$. Але $x^{2k} = c^l$ для деяких цілих чисел k і l . Тоді

$$x^{-1}c^lx = c_1^l = c^l$$

і тому $c_1 = c$, що неможливо через вибір елемента c . Отже, з умови $|xC| = 2$ отримуємо $|x| = 2$ і $x^{-1}cx = c^{-1}$ для довільного елемента $c \in C$.

Оскільки

$$[c_1, x] \cdot [c_2, x] = [c_1c_2, x]$$

для довільних елементів $c_1, c_2 \in C$, то множина елементів виду $[c, x]$, $c \in C$ утворюють підгрупу C_1 групи C , яка є гомоморфним образом останньої при відображенні $c \rightarrow [c, x]$. Якщо ядро цього гомоморфізма не дорівнює одиниці, то $C_1 = E$. Але тоді $C \langle x \rangle$ — абелева група, що неможливо за умовою. Таким чином, ядро гомоморфізма дорівнює E і $C_1 \cong C$. Звідси слідує, що C_1 має скінчений індекс в C і $C_1 \triangleleft G$.

Позначимо C_2/C_1 централізатор підгрупи C/C_1 в групі G_1/C_1 . Оскільки $[c, x] \in C_1$, то $x \in C_2$. З ізоморфізму

$$C_2/C \cong (C_2/C_1)/(C/C_1)$$

слідує, що група C_2/C_1 метабелева і

$$C_2/C = \langle xC \rangle \times \langle y^n C \rangle,$$

причому $n \neq 0$, оскільки в протилежному випадку підгрупа C_2 буде мати нескінченний індекс в G_1 , оскільки

$$G_1/C_2 \cong (G_1/C_1)/(C_2/C_1)$$

— скінченна група. Далі отримуємо

$$[xC_1, y^n C_1] \in C/C_1, [xC_1, y^n C_1]^k \in C_1$$

для деякого натурального k .

Звідси і з метабелевості групи C_2/C_1 слідує, що

$$[xC_1, y^n C_1]^k = [xC_1, y^{nk} C_1] = C_1,$$

тобто $[x, y^{nk}] \in C_1$. Тоді $[x, y^{nk}] = [c, x]$ для деякого елемента $c \in C$. Але

$$[x, y^{nk}c] = [x, c] \cdot c^{-1} \cdot [x, y^{nk}] \cdot c = [x, c] \cdot [x, y^{nk}] = 1.$$

Крім того,

$$\langle x \rangle \bigcap \langle y^{nk}c \rangle = E, |y^{nk}c| = \infty.$$

Тому G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, що неможливо. Таким чином, фактор-група G/C циклічна.

Нехай $C \neq A$. Тоді G не є \overline{HA} -групою. Оскільки C група без скруту і C/A локально скінченна, то існує елемент $f \in C \setminus A$, $|f| = \infty$ і $f^k = a^l$ для деяких натуральних чисел k і l . Підгрупа $\langle f, A \rangle \in N_G^A$ -нормальною. Тоді

$$b^{-1}fb = f^\alpha a^\beta,$$

де $a \in A$. Далі

$$b^{-1}f^kb = (f^\alpha a^\beta)^k = f^{\alpha k} a^{\beta k}.$$

З іншого боку,

$$b^{-1}f^kb = b^{-1}a^lb = a^{lm} = f^{km},$$

$$f^{\alpha k} a^{\beta k} = f^{km}, a^{\beta k} = (f^{-\alpha} f^m)^k, a^\beta = f^{-\alpha} f^m.$$

Тоді

$$b^{-1}fb = f^\alpha f^{-\alpha} f^m = f^m$$

і $G \in \overline{HA}$ -групою, $G = N_G^A$, що суперечить вибору елемента f . Таким чином, $C = A$ і група G задовольняє умові теореми. \square

Наслідок 3.7.8. Якщо G — неперіодична локально розв'язна група, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої недедекіндова і не є IH -групою, то

$$1 \leq [G : N_G^A] < \infty.$$

Наступні приклади показують, що умова недедекіндовості норми N_G^A є суттєвою в останньому наслідку.

Приклад 3.7.2. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times C$, де $|a| = \infty$, $|b| = 2$, C — нескінченна елементарна абелева 2-група, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

У цьому випадку

$$N_G^A \subseteq N_G(\langle b, c \rangle) \bigcap N_G(\langle ba, c \rangle) = (\langle b \rangle \times C) \bigcap (\langle ba \rangle \times C) = C = Z(G),$$

де c — довільний елемент підгрупи C .

Отже, $N_G^A = C$ — абелева, а $[G : N_G^A] = \infty$.

Приклад 3.7.3. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times H$, де $|a| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, H — група кватерніонів.

У цій групі

$$N_G^A \subseteq N_G(\langle h_1, ba \rangle) \cap N_G(\langle h_1, b \rangle) = (\langle ba \rangle \times H) \cap (\langle b \rangle \times H) = H.$$

Нехай M — абелева нециклічна підгрупа, що не міститься в $\langle a, b \rangle$. Тоді підгрупа M містить хоча б один з елементів вигляду ha^i або ha^ib , тому $\langle h^2 \rangle \subset M$ і $N_G^A = H$. Отже, N_G^A — гамільтонова, а $[G : N_G^A] = \infty$.

ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА НОРМУ РОЗКЛАДНИХ ПІДГРУП ГРУПИ

4.1 Деякі допоміжні результати

У цьому розділі мова піде про ще одне узагальнення норми групи — норму розкладних підгруп групи. Так будемо називати перетин N_G^d нормалізаторів усіх розкладних підгруп даної групи або самої групи, якщо система таких підгруп порожня.

Нагадаємо, що *розкладною* називається підгрупа групи G , яку можна подати у вигляді прямого добутку двох нетривіальних множників [112].

З означення норми N_G^d розкладних підгруп випливає, що у випадку $N_G^d = G$ в групі G усі розкладні підгрупи або нормальні, або система таких підгруп порожня. Неабелеві групи з такою властивістю були досліджені Ф. М. Ліманом в роботі [112] і названі там *di-групами*.

Наступне твердження характеризує будову *di-груп*, у яких множина розкладних підгруп порожня (див. [112]).

Твердження 4.1.1. *Локально скінченні і неперіодичні локально розв'язні di-групи, в яких усі підгрупи нерозкладні, вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) *кватерніонна 2-група (скінченна чи нескінченна);*
- 2) *$G = A \rtimes B$ — група Фробеніуса, де A — локально циклічна p -група, B — циклічна q -група, p і q — прості числа і $(p-1, q) = q$;*
- 3) *$G = A \rtimes B$, де A — абелева група без скруту рангу 1, B — нескінченна циклічна група або група порядку 2 і $B \cap g^{-1}Bg = E$ для довільного елемента $g \in G \setminus B$.*

Отже, будь-яка локально розв'язна di -група, в якій усі підгрупи нерозкладні, є або кватерніонною або двоступінно розв'язною групою досить простої будови.

Групою Фробеніуса (див. [100]) будемо називати напівпрямий добуток

$$G = A \rtimes B$$

двох нетривіальних груп A і B , в якій для довільного елемента $g \in G \setminus B$ виконуються умови:

$$B \cap g^{-1}Bg = E, A \setminus E = G \setminus \bigcup_{g \in G} (g^{-1}Bg).$$

Наступні твердження характеризують будову періодичних di -груп, в яких система розкладних підгруп непорожня (див. [112]).

Твердження 4.1.2. *Будь-яка періодична негамільтонова локально нільпотентна di -група, множина розкладних підгруп якої непорожня, є $\overline{NA_p}$ -групою.*

Твердження 4.1.3. *Нехай G — періодична не локально нільпотентна група, що містить непримарну циклічну підгрупу. За цієї умови G тоді і тільки тоді є di -групою, коли вона містить таку нормальну абелеву підгрупу C , що визначає циклічну фактор-групу r^n -го порядку ($n \geq 1$) і виконуються такі умови:*

- 1) *усі підгрупи з C нормальні в групі G ;*
- 2) *підгрупа C є централізатором будь-якого елемента простого порядку $s \neq r$;*
- 3) *силовська підгрупа G_r або циклічна або є кватерніонною 2-групою.*

Твердження 4.1.4. *Нехай G — періодична не локально нільпотентна група, в якій усі циклічні підгрупи примарні і хоча б одна з підгруп розкладна. За цих умов G тоді і тільки тоді буде di -групою, коли вона є групою Фробеніуса*

$$G = G_p \rtimes B,$$

а підгрупи G_p і B задовольняють наступні вимоги:

- 1) *підгрупа G_p або абелева не локально циклічна, або*

$$G_p = (A \times \langle h \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де A — локально циклічна p -група і $[A, \langle h \rangle] = [A, \langle c \rangle] = E$, $[h, c] = a \in A$, $|h| = |c| = |a| = p$, $p \neq 2^n + 1$, $n \geq 0$;

- 2) усі абелеві нециклічні підгрупи з G_p нормальні в G ;
- 3) якщо G_p не мінімальна нормальна підгрупа групи G , то B – циклічна q -група (q – просте число) і $(p-1, q) = 1$;
- 4) якщо G_p мінімальна нормальна підгрупа групи G , то $|G_p| = p^2$ і B або циклічна q -група (q – просте число), або скінченна кватерніонна 2-група.

Твердження 4.1.5. Неперіодичні ді-групи, що містять розкладну підгрупу, вичерпуються групами наступних типів:

- 1) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, де A – неперіодична абелева група без інволюцій, яка містить розкладну підгрупу, $|b| = 2$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$;
- 2) $G = A \langle b \rangle$, де A – неперіодична абелева група з єдиною інволюцією b^2 і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$;
- 3) $G = (\langle b^2 \rangle \times C) \langle b \rangle$, де $|b| = 8$, C – абелева група без скруту ранга 1, а фактор-група $G / \langle b^4 \rangle$ містить нескінченні абелеві підгрупи і всі вони нормальні в $G / \langle b^4 \rangle$;
- 4) $G = Q \times B$, де Q – група кватерніонів, B – абелева група без скруту ранга 1;
- 5) $G = \langle a \rangle \rtimes B$, де $|a| = p^n$, p – просте число ($n > 1$ при $p = 2$), B – неповна абелева група без скруту ранга 1 і комутант групи G має простий порядок.

Отже, у багатьох випадках будова груп, які збігаються зі своєю нормою розкладних підгруп, відома. Тому природно поставити питання про властивості груп, в яких норма недедекіндова і є власною підгрупою.

Наступна лема визначає умови, за яких норма розкладних підгруп недедекіндова.

Лема 4.1.1. Нехай G – група, яка містить неодиначну N_G^d -допустиму підгрупу H таку, що

$$H \cap N_G^d = E,$$

де N_G^d – норма розкладних підгруп групи G . Тоді підгрупа N_G^d недедекіндова.

Доведення. Оскільки підгрупа $H \in N_G^d$ -допустимою, то

$$G_1 = H \cdot N_G^d = H \times N_G^d.$$

Тоді для довільного елемента $x \in N_G^d$ і неединичного елемента $h \in H$ маємо:

$$\langle x, h \rangle \triangleleft \langle h \rangle N_G^d.$$

Отже,

$$\langle x \rangle = \langle x, h \rangle \bigcap N_G^d \triangleleft N_G^d$$

і норма N_G^d дедекіндова. □

Лема 4.1.2. *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп довільної групи G не-дедекіндова і група G містить непримарну циклічну підгрупу*

$$\langle x \rangle \times \langle y \rangle = \langle xy \rangle$$

порядку $p^m q^n$ (p, q – різні прості числа), то

$$\langle x^{p^{m-1}} y^{q^{n-1}} \rangle \subset N_G^d.$$

Доведення. Нехай $G \supset \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, де $|x| = p^m$, $|y| = q^n$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, p, q – різні прості числа. Тоді $\langle x, y \rangle \in N_G^d$ -допустимою підгрупою, а значить N_G^d -допустимими будуть і підгрупи $\langle x \rangle$ і $\langle y \rangle$.

Оскільки N_G^d – недедекіндова група, то з огляду на лему 4.1.1

$$\langle x \rangle \bigcap N_G^d \neq E, \langle y \rangle \bigcap N_G^d \neq E.$$

Отже,

$$\langle x^{p^{m-1}} y^{q^{n-1}} \rangle \subset N_G^d.$$

□

Очевидним наслідком леми 4.1.2 є наступна теорема, яка стосується як періодичних, так і неперіодичних груп.

Теорема 4.1.1. *Будь-яка група G , що має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп, тоді і тільки тоді містить непримарні абелеві підгрупи, коли підгрупи з такими властивостями містить її норма N_G^d .*

4.2 Про взаємозв'язки між нормами абелевих нециклічних та розкладних підгруп у локально скінченних групах

Розглянемо питання про взаємозв'язки між нормами розкладних та абелевих нециклічних підгруп у класі локально скінченних груп. На можливість таких зв'язків вказують наступні аргументи. По-перше, будь-яка група, що містить розкладну підгрупу, обов'язково містить абелеву розкладну підгрупу,

і навпаки. По-друге, у багатьох випадках розкладні абелеві підгрупи нециклічні. Отже, з великою часткою ймовірності норми розкладних та абелевих нециклічних підгруп пов'язані між собою.

У цьому підрозділі усі групи будемо розглядати за умови існування в них абелевої нециклічної підгрупи. Таке обмеження пов'язане з означенням норми абелевих нециклічних підгруп.

Наступна теорема дає відповідь на питання про взаємозв'язки між вказаними нормами у класі локально скінченних p -груп (p — просте число).

Теорема 4.2.1. *У довільній локально скінченній p -групі G норми абелевих нециклічних підгруп і розкладних підгруп збігаються:*

$$N_G^A = N_G^d.$$

Доведення теореми 4.2.1 спирається на леми 4.2.1–4.2.3.

Лема 4.2.1. *У класі скінченних p -груп норми абелевих нециклічних підгруп N_G^A і розкладних підгруп N_G^d збігаються.*

Доведення. Справедливість твердження леми випливає з того, що в скінченній p -групі кожна абелева нециклічна підгрупа є абелевою розкладною підгрупою і навпаки. \square

Лема 4.2.2. *В нескінченній p -групі G норми N_G^A і N_G^d збігаються, якщо виконується хоча б одна з наступних умов:*

- 1) G не містить квазіциклічних підгруп;
- 2) G містить квазіциклічні підгрупи, але жодна з них не є максимальною абелевою підгрупою групи G ;
- 3) множина максимальних абелевих підгруп групи G містить нормальну в G квазіциклічну підгрупу.

Доведення. 1. У першому випадку множина розкладних абелевих і абелевих нециклічних підгруп збігаються, тому збігатимуться й відповідні норми

$$N_G^A = N_G^d.$$

2. Нехай P — квазіциклічна підгрупа групи G . Оскільки за умовою P — не є максимальною абелевою підгрупою, то в G знайдеться підгрупа $\langle x \rangle$ простого порядку така, що група

$$H = \langle x \rangle \times P$$

абелева. Враховуючи, що підгрупа H — N_G^d -допустима, робимо висновок, що підгрупа $H^p = P$ також є N_G^d -допустимою. Отже, всі абелеві нециклічні підгрупи групи G будуть N_G^d -допустимими і тому $N_G^A = N_G^d$.

3. Нехай G — неабелева p -група і P — нормальна квазіциклічна підгрупа, що є максимальною абелевою підгрупою в G . Покажемо, що в цьому випадку G не містить квазіциклічних підгруп, відмінних від P . Справді, якщо P_1 — квазіциклічна підгрупа групи G така, що $P \neq P_1$, то з умови $[G : C_G(P)] < \infty$ слідує, що

$$P_1 \subseteq C_G(P).$$

Але у такому випадку підгрупа

$$G_1 = P \cdot P_1$$

абелева, що суперечить максимальності P . Отже, P — єдина квазіциклічна підгрупа в G . Виходячи з цього, норма абелевих нециклічних підгруп збігається з перетином нормалізаторів редукованих абелевих нециклічних підгруп, кожна з яких розкладна і тому $N_G^A = N_G^d$. \square

Наслідок 4.2.1. *Неабелева локально скінченна p -група G тоді і тільки тоді містить нормальну квазіциклічну підгрупу, що є максимальною в G абелевою підгрупою, коли $p = 2$ і*

$$G = P \langle b \rangle,$$

де P — квазіциклічна 2-підгрупа, $|b| \in \{2, 4\}$, $b^2 \in P$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in P$. При цьому $N_G^d = N_G^A$.

Доведення. Нехай P — нормальна в G квазіциклічна підгрупа, що є максимальною абелевою підгрупою в G . Якщо $p \neq 2$, то за наслідком 1.13 [153] $P \subseteq Z(G)$. Але у такому випадку для довільного елемента $x \in G \setminus P$ підгрупа $\langle x, P \rangle$ абелева, що суперечить умові. Отже, $p = 2$.

Оскільки $P \triangleleft G$, то $[G : C_G(P)] = 2$. З максимальності P випливає, що

$$C_G(P) = P.$$

Якщо G містить тільки одну інволюцію, то G — нескінченна кватерніонна 2-група і

$$N_G^d = N_G^A = G.$$

В іншому випадку існує інволюція $b \notin G \setminus P$ і

$$G = P \rtimes \langle b \rangle,$$

де $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in P$. Але тоді

$$N_G^d = N_G^A = \langle a_2, b \rangle,$$

де $a_2 \in P$ і $|a_2| = 4$. Обернене твердження очевидне. \square

Далі розглянемо випадок, коли серед максимальних абелевих підгруп p -групи G існують квазіциклічні підгрупи, але жодна з них не є нормальною.

Якщо при цьому G — локально скінченна p -група, то з теореми 1.5 [153] слідує, що група G не задовольняє умову мінімальності для підгруп. Але в такому випадку G містить нескінченну елементарну абелеву підгрупу і

$$N_G^A \subseteq N_G^d.$$

Лема 4.2.3. *Якщо локально скінченна p -група G містить ненормальну квазіциклічну підгрупу, що є максимальною абелевою підгрупою в G , то*

$$N_G^A = N_G^d.$$

Доведення. Нехай P — не нормальна квазіциклічна підгрупа, що є максимальною абелевою підгрупою групи G . Враховуючи попереднє зауваження, маємо $N_G^A \subseteq N_G^d$.

Доведемо, що має місце обернене включення. При цьому достатньо показати, що підгрупа P буде N_G^d -допустимою. Якщо $N_G^d = E$, то

$$N_G^A = N_G^d = E$$

і твердження доведено.

У випадку $1 < |N_G^d| < \infty$ з умови $N_G^d \triangleleft G$ слідує, що

$$P \subseteq C_G(N_G^d).$$

Оскільки P — максимальна абелева підгрупа групи G , то $N_G^d \subset P$ і тому P буде N_G^d -допустимою підгрупою в G .

Нехай $|N_G^d| = \infty$ і норма N_G^d недедекіндова. Тоді вона або не містить розкладних підгруп, або у ній всі розкладні підгрупи нормальні. В силу тверджень 4.1.1 і 4.1.2 N_G^d містить квазіциклічну підгрупу P_1 , що є характеристичною підгрупою групи N_G^d . Але у такому випадку

$$P_1 \triangleleft G, P_1 \neq P, P \subset C_G(P_1)$$

і підгрупа $G_1 = P_1 \cdot P$ — абелева, що неможливо за умовою.

Нехай тепер N_G^d — нескінченна дедекіндова група. Оскільки за умовою підгрупа P — максимальна абелева підгрупа і $P \neq G$, то N_G^d не задовольняє умову мінімальності для підгруп, і тому нижній шар $\omega(N_G^d)$ норми N_G^d є нескінченною елементарною абелевою підгрупою, нормальною в G .

У групі $H = \omega(N_G^d) \cdot P$ розглянемо підгрупи

$$H_k = \omega(N_G^d) \langle b_k \rangle, k = 1, 2, 3, \dots,$$

де

$$P = \langle b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \rangle, b_{n+1}^p = b_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

За лемою 1.9. [153] центр $Z(H_k)$ кожної з підгруп H_k нескінченний. Отже,

$$Z(H_k) \cap \omega(N_G^d) = Z_k,$$

$$|Z_k| = \infty \text{ і}$$

$$Z_k = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots$$

Не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати, що

$$\langle b_k \rangle \cap \langle a_i, a_j \rangle = E$$

для деяких $i \neq j$. Тоді для довільного елемента $a \in \omega(N_G^d) \subseteq N_G^d$ одержимо

$$[a, b_k] \in \langle a_i, b_k \rangle \cap \langle a_j, b_k \rangle = \langle b_k \rangle.$$

Отже,

$$P \triangleleft H = \omega(N_G^d) \cdot P$$

і за наслідком 1.15 [153] $C_H(P)$ має скінченний індекс в H . Але в такому випадку P не є максимальною абелевою підгрупою групи G . Доведення леми 4.2.3 завершує доведення теореми 4.2.1. \square

З наведених вище міркувань слідує, що локально скінченна p -група G з нескінченною нормою N_G^d не містить ненормальних квазіциклічних підгруп, що є максимальними абелевими підгрупами в G .

Наслідок 4.2.2. *Якщо локально скінченна p -група G містить ненормальну квазіциклічну підгрупу P , що є максимальною абелевою підгрупою в G , то $|N_G^d| < \infty$.*

Прикладом такої групи є відома p -група Шмідта без центра [153], в якій

$$N_G^d = N_G^A = E.$$

Розглянемо тепер взаємозв'язки між нормами розкладних і абелевих нециклічних підгруп у непримарних локально скінченних групах.

Лема 4.2.4. *Нехай G — скінченна непримарна група, що містить абелеву нециклічну підгрупу. Тоді має місце включення $N_G^A \supseteq N_G^d$, причому можливий випадок $N_G^A \neq N_G^d$.*

Доведення. У такій групі множина абелевих нециклічних підгруп є підмножиною множини абелевих розкладних підгруп, отже,

$$N_G^A \supseteq N_G^d.$$

Той факт, що вказані норми можуть відрізнятися, підтверджується наступним прикладом, який і завершує доведення леми.

Приклад 4.2.1. Нехай $G = A \rtimes B$ — скінченна група Фробеніуса, в якій A — елементарна абелева група порядку p^2 (p — просте число), B — непримарна підгрупа, $(|B|, p) = 1$.

Відомо [102], що в групі Фробеніуса центр неінваріантного множника не-одичинний, тобто $Z(B) \neq E$. Тому $N_G^A = G$, а N_G^d не містить A .

Аналогічне твердження справедливе і у класі нескінченних періодичних локально нільпотентних непримарних груп.

Теорема 4.2.2. Для довільної нескінченної періодичної локально нільпотентної непримарної групи G має місце включення $N_G^A \supseteq N_G^d$, причому існують групи, в яких $N_G^A \neq N_G^d$.

Доведення. Нехай A — абелева нециклічна підгрупа групи G . Якщо підгрупа A розкладна, то вона є N_G^d -допустимою підгрупою. Якщо підгрупа A нерозкладна, то вона є квазіциклічною p -групою. Оскільки група G локально нільпотентна і непримарна, то знайдеться підгрупа $\langle b \rangle$ простого порядку $q \neq p$, яка переставна з A . Але у такому випадку $A \times \langle b \rangle$ — N_G^d -допустима підгрупа, а, отже, $\langle A, b \rangle^q = A$ також є N_G^d -допустимою підгрупою. Тому

$$N_G^A \supseteq N_G^d.$$

Існування груп, в яких норми абелевих нециклічних і розкладних підгруп не збігаються, підтверджує приклад, що завершує доведення теореми. \square

Приклад 4.2.2. $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \times \langle d \rangle$, де A — квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $|d| = q$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$ (p і q — різні прості числа).

У цій групі норма абелевих нециклічних підгруп $N_G^A = G$, а норма розкладних підгруп $N_G^d = A \times \langle d \rangle = Z(G) \neq N_G^A$.

Як показують наступні приклади, в класі нескінченних локально скінченних і не локально нільпотентних груп можливі випадки, коли $N_G^A \neq N_G^d$ і $N_G^A \subset N_G^d$ або $N_G^A \supset N_G^d$.

Приклад 4.2.3. $G = A \rtimes \langle b \rangle$ — група Фробеніуса, в якій A — нескінченна елементарна абелева 7-група, $|b| = 6$ і $b^{-1}ab = a^5$ для довільного елемента $a \in A$.

Оскільки G — група Фробеніуса і

$$N_G(\langle b \rangle) = \langle b \rangle, N_G(\langle a^{-1}ba \rangle) = \langle a^{-1}ba \rangle, \langle b \rangle \cap \langle a^{-1}ba \rangle = E$$

для $a \in G \setminus B$, то $N_G^d = E$. З іншого боку, $N_G^A = G$, отже, у цій групі

$$N_G^A \supset N_G^d.$$

Приклад 4.2.4. (див. [102]). $G = A \rtimes B$ — група Фробеніуса, в якій A — нескінченна елементарна абелева p -група ($p \neq 3$), B — квазіциклічна 3-група.

У цій групі $N_G^d = A$. Оскільки

$$N_G(B) = B, N_G(a^{-1}Ba) = a^{-1}Ba$$

і $a^{-1}Ba \cap B = E$ для $a \neq 1$, то $N_G^A = E$. Отже, в цій групі $N_G^A \subset N_G^d$.

Теорема 4.2.3. В довільній локально скінченній групі G , що містить абелеву нециклічну підгрупу, має місце одне зі співвідношень: $N_G^A = N_G^d$, або $N_G^A \supset N_G^d$, або $N_G^A \subset N_G^d$.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що не існує локально скінченної групи G , в якій $N_G^A \neq N_G^d$, $N_G^A \not\supset N_G^d$ і $N_G^A \not\subset N_G^d$.

Припустимо, що така група G існує. Тоді з теорем 4.2.1 і 4.2.2 випливає, що група G нескінченна і непримарна. Крім того, з умови $N_G^A \neq N_G^d$ слідує, що вона містить абелеву нециклічну підгрупу P , яка не є N_G^d -допустимою, і непримарну циклічну підгрупу $\langle b \rangle$, яка не є N_G^A -допустимою. Ясно, що P нерозкладна, і тому є квазіциклічною групою.

Покажемо, що P — максимальна абелева підгрупа групи G . Справді, в протилежному випадку існує неединична підгрупа $\langle g \rangle$ така, що

$$P \cap \langle g \rangle = E.$$

Тоді підгрупа $P \times \langle g \rangle$ — N_G^d -допустима, і значить, N_G^d -допустимою буде й підгрупа

$$\langle P, g \rangle^{|g|} = P,$$

що неможливо. Таким чином, P — максимальна в G абелева підгрупа.

Припустимо, що $|N_G^d| < \infty$. Тоді

$$[G : C_G(N_G^d)] < \infty$$

і P належить централізатору $C_G(N_G^d)$. Це неможливо, оскільки підгрупа P не є N_G^d -допустимою. Отже, $|N_G^d| = \infty$.

З останнього зауваження маємо, що N_G^d містить нескінченну абелеву підгрупу M . Оскільки $\langle b \rangle$ непримарна, то

$$\langle b \rangle \triangleleft G_1 = \langle b \rangle M.$$

Тоді $[G_1 : C_{G_1}(b)] < \infty$ і $C = C_{G_1}(b)$ — нескінченна непримарна абелева група.

Нехай C не задовольняє умову мінімальності для підгруп. Тоді в ній знайдуться такі нециклічні підгрупи C_1 і C_2 , що

$$C_1 \cap \langle b \rangle = C_2 \cap \langle b \rangle = E.$$

У цьому випадку підгрупи $C_i \times \langle b \rangle$ ($i = 1, 2$) є N_G^A -допустимими, а значить N_G^A -допустимою буде і підгрупа

$$\langle b \rangle = (C_1 \times \langle b \rangle) \cap (C_2 \times \langle b \rangle),$$

що неможливо через її вибір.

Отже, C — група з умовою мінімальності для підгруп. Але в такому випадку норма N_G^d також задовольняє умову мінімальності для підгруп і за результатами [160] є скінченним розширенням повної підгрупи \tilde{P} . За наслідком 1.3 [153] група

$$H = P \cdot N_G^d$$

також задовольняє умову мінімальності для підгруп. Далі, з того, що P — максимальна абелева підгрупа групи G , робимо висновок, що $\tilde{P} = P$. Але тоді P є нормальною підгрупою в H . Отримане протиріччя доводить, що цей випадок неможливий. \square

На завершення наведемо ще одне твердження, яке характеризує взаємозв'язки між нормами розкладних і абелевих нециклічних підгруп у локально скінченних групах.

Теорема 4.2.4. *Нехай G — локально скінченна група, що містить абелеву нециклічну підгрупу, і*

$$N_G^d \cap N_G^A = E.$$

Тоді G — група без центра і мають місце наступні твердження:

- 1) *якщо G — локально нільпотентна група (зокрема, локально скінченна p -група), то $|G| = \infty$, G не задовольняє умову мінімальності для підгруп і $N_G^d = N_G^A = Z(G) = E$;*
- 2) *якщо G — скінченна ненільпотентна група, то $N_G^d = E$;*
- 3) *якщо G — нескінченна не локально нільпотентна група, то або $N_G^A = E$, або $N_G^d = E$.*

Доведення. Доведення теореми впливає з теорем 4.2.1 — 4.2.3. Існування груп, про які йде мова у теоремі 4.2.4 підтверджують приклади 4.2.3 та 4.2.4, а також приклад побудованої О.Ю. Шмідтом [153] p -групи без центра, в якій $N_G^d = N_G^A = E$. \square

4.3 Локально нільпотентні періодичні групи з недедекіндовою нормою розкладних підгруп

Розглянемо властивості періодичних локально нільпотентних груп, в яких норма розкладних підгруп недедекіндова. Оскільки у цьому класі груп норма N_G^d є локально нільпотентною di -групою, то, використовуючи опис таких груп (твердження 4.1.1, 4.1.2), приходимо до наступного результату.

Лема 4.3.1. *Норма N_G^d розкладних підгруп періодичної групи G недедекіндова і локально нільпотентна тоді й тільки тоді, коли N_G^d — кватерніонна 2-група порядку більше 8 (скінченна чи нескінченна) або недедекіндова p -група, в якій нормальні усі розкладні (та усі абелеві нециклічні) підгрупи.*

Отже, якщо норма розкладних підгруп періодичної локально нільпотентної групи G недедекіндова, то N_G^d є локально скінченною p -групою.

Наслідок 4.3.1. *Якщо норма розкладних підгруп локально скінченної групи G є непримарною локально нільпотентною підгрупою, то вона дедекіндова.*

Наведемо кілька найпростіших властивостей періодичних груп, які мають локально нільпотентну недедекіндову норму N_G^d .

Лема 4.3.2. *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп періодичної групи G недедекіндова і локально нільпотентна, то G не містить непримарних циклічних підгруп.*

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^d задовольняють умови леми. Тоді за попередньою лемою N_G^d є p -групою.

Припустимо, що G містить непримарну циклічну підгрупу $\langle a \rangle$, де

$$\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle, (|a_1|, p) = 1.$$

Тоді $\langle a \rangle$, а разом з нею й $\langle a_1 \rangle \in N_G^d$ -допустимими підгрупами. Оскільки

$$\langle a_1 \rangle \cap N_G^d = E,$$

то за лемою 4.1.1 норма N_G^d має бути дедекіндовою, що суперечить умові. Отже, G не містить непримарних циклічних підгруп. \square

Наслідок 4.3.2. *Будь-яка періодична група G , що має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп та неединичний центр $Z(G)$, є p -групою.*

Доведення. Нехай G — періодична група, що має локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп. За лемою 4.3.2 група G не містить непримарних циклічних підгруп, тому з умови $Z(G) \neq E$ випливає, що G — p -група. \square

Наслідок 4.3.3. *Якщо норма розкладних підгруп періодичної локально нільпотентної групи G недедекіндова, то G — локально скінченна p -група.*

Таким чином, за наслідком 4.3.3 вивчення періодичних локально нільпотентних груп з недедекіндовою нормою N_G^d зводиться до вивчення локально скінчених p -груп з тим же обмеженням на норму N_G^d . Властивості таких груп повністю характеризуються наведеними нижче теоремами 4.3.1 та 4.3.2.

Теорема 4.3.1. *Норма N_G^d періодичної локально нільпотентної групи G недедекіндова і не містить розкладних підгруп тоді і тільки тоді, коли $G = N_G^d$ і G є кватерніонною 2-групою порядку більше 8 (скінченною чи нескінченною).*

Доведення. Достатність умов леми випливає з твердження 4.1.1. Доведемо їх необхідність.

Нехай G — періодична локально нільпотентна група, а її норма N_G^d недедекіндова. Тоді за наслідком 4.3.3 G — локально скінченна p -група. Оскільки N_G^d не містить розкладних підгруп, то за лемою 4.3.1 $p = 2$ і N_G^d є кватерніонною 2-групою (скінченною чи нескінченною), причому

$$N_G^d = A \langle b \rangle,$$

де $b^2 \in A$, $|b| = 4$, $|A| > 4$, A — циклічна або квазіциклічна 2-група, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Покажемо, що G містить одну інволюцію. Припустимо, що це не так і $x \in G \setminus N_G^d$, $|x| = 2$. Тоді $[x, b^2] = 1$, де b^2 — інволюція норми N_G^d . Оскільки $\langle x, b^2 \rangle = N_G^d$ -допустима підгрупа, то

$$\langle x, b^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^d$$

$$i[G_1 : C_{G_1}(\langle x, b^2 \rangle)] \leq 2.$$

Якщо $[x, b] \neq 1$, то $[x, b] = b^2$ і $|xb| = 2$. Тоді підгрупа $\langle xb, b^2 \rangle$ абелева, і, як наслідок, N_G^d -допустима, що неможливо, оскільки елемент $a \in A$, $|a| = 8$ не належить нормалізатору $N_G(\langle xb, b^2 \rangle)$ цієї підгрупи. Отже, $[x, b] = 1$. Оскільки $\langle x, b \rangle$ — розкладна абелева підгрупа, вона N_G^d -допустима. Але і в цьому випадку нормалізатору підгрупи $\langle x, b \rangle$ не належить елемент $a \in A$, $|a| = 8$.

Таким чином, група G містить всього одну інволюцію, а значить, всі її абелеві підгрупи нерозкладні. В силу твердження 4.1.1 G є кватерніонною 2-групою (скінченною чи нескінченною). Оскільки за умовою норма N_G^d недедекіндова, то $|G| > 8$ і $G = N_G^d$. \square

Наслідок 4.3.4. *Періодична локально нільпотентна група G , яка має недедекіндову норму N_G^d , не містить розкладних підгруп тоді і тільки тоді, коли таких підгруп не містить її норма N_G^d .*

З теореми 4.3.1 випливає, що в нескінченній періодичній локально нільпотентній групі G , яка не містить розкладних підгруп і має недедекіндову норму N_G^d , нормальні усі абелеві нециклічні підгрупи і $N_G^A = N_G^d$.

Наступна теорема характеризує періодичні локально нільпотентні групи з недедекіндовою нормою N_G^d за умови, що група містить розкладну (розкладну абелеву) підгрупу.

Теорема 4.3.2. *Періодична локально нільпотентна група G , яка містить розкладну абелеву підгрупу, тоді і тільки тоді має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп, коли G — локально скінченна p -група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і*

$$N_G^A = N_G^d.$$

Доведення. Достатність умов теореми безпосередньо слідує з теореми 4.2.1.

Доведемо їх необхідність. Нехай G — періодична локально нільпотентна група з недедекіндовою нормою N_G^d розкладних підгруп. Тоді за наслідком 4.3.3 G — локально скінченна p -група для деякого простого числа p . Оскільки за теоремою 4.2.1 в класі локально скінченних p -груп

$$N_G^A = N_G^d,$$

то G є p -групою з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. \square

Зазначимо, що локально скінченні p -групи з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп детально вивчалися у розділі 3. Тому будова періодичних локально нільпотентних груп з недедекіндовою нормою розкладних підгруп фактично відома і визначається теоремами 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.2, 3.5.1.

Використовуючи опис нескінченних локально скінченних p -груп, в яких норма N_G^A недедекіндова (теореми 3.2.1 та 3.3.1), приходимо до наступного результату, який повністю описує будову нескінченних періодичних локально нільпотентних груп з недедекіндовою нормою N_G^d .

Теорема 4.3.3. *Будь-яка нескінченна періодична локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову норму N_G^d , коли вона є p -групою одного з типів:*

- 1) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де A — квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$; $N_G^d = G$;
- 2) $G = A \times Q$, де A — квазіциклічна 2-група, Q — група кватерніонів порядку 8; $N_G^d = G$;
- 3) $G = A \langle b \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$; $N_G^d = G$;
- 4) $G = A \langle b \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = 8$, $b^4 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$; $N_G^d = G$;
- 5) $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, де A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = [b, d] = [c, d] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$; $N_G^d = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$;
- 6) $G = (A \langle y \rangle)Q$, де A — квазіциклічна 2-група, $[A, Q] = E$, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$, $|q_1| = 4$, $q_1^2 = q_2^2 = [q_1, q_2]$, $|y| = 4$, $y^2 = a_1 \in A$, $y^{-1}ay = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $[\langle y \rangle, Q] \subseteq \langle a_1 \rangle \times \langle q_1^2 \rangle$; $N_G^d = \langle a_2 \rangle \times Q$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$.

Безпосередньо з теореми 4.3.3 випливають наступні твердження.

Наслідок 4.3.5. *Будь-яка нескінченна періодична локально нільпотентна група G , що має недедекіндову норму N_G^d , є скінченням розширенням квазіциклічної p -підгрупи.*

Наслідок 4.3.6. *Якщо норма N_G^d періодичної локально нільпотентної групи G нескінченна і недедекіндова, то в G нормальні всі абелеві нециклічні і всі розкладні підгрупи.*

4.4 Нескінченні локально скінченні групи з локально нільпотентною недедекіндовою нормою розкладних підгруп

Розглянемо тепер властивості нескінченних локально скінченних груп, в яких норма розкладних підгруп недедекіндова і локально нільпотентна. Як було встановлено у попередньому підрозділі, за таких умов норма N_G^d є локально скінченною p -групою (лема 4.3.1), а сама група не містить непримарних циклічних підгруп (лема 4.3.2). Окрім того, якщо група має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d і неединичний центр, то вона є

p -групою (наслідок 4.3.2). Отже, будь-яка локально скінченна не локально нільпотентна група G , норма N_G^d розкладних підгруп якої недедекіндова і локально нільпотентна, є групою без центра.

Наступне твердження характеризує зв'язки між нормами абелевих нециклічних та розкладних підгруп в локально скінченних групах за умови, що норма N_G^d локально нільпотентна та недедекіндова, та уточнює результати теорем 4.2.1 та 4.2.2.

Теорема 4.4.1. *Нехай G — локально скінченна група, що містить абелеву нециклічну підгрупу та має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп. Тоді $N_G^d = N_G^A$, де N_G^A — норма абелевих нециклічних підгруп групи G .*

Доведення. За лемою 4.3.1 норма N_G^d є недедекіндовою p -групою, усі розкладні підгрупи якої нормальні або система таких підгруп порожня.

Нехай $N_G^d \neq N_G^A$. Тоді за теоремою 4.2.1 група G непримарна. Оскільки за лемою 4.3.2 група G не містить непримарних циклічних підгруп, то

$$N_G^d \supset N_G^A.$$

Тоді з умови $N_G^A \neq N_G^d$ випливає, що G містить не N_G^d -допустиму квазіциклічну q -підгрупу A . З опису примарних di -груп (твердження 4.1.1, 4.1.2), до яких відноситься норма N_G^d , випливає, що N_G^d містить скінченну характеристичну підгрупу H , централізатор $C_G(H)$ якої має скінченний індекс в групі. Тому $A \subset C_G(H)$.

Розглянемо групу

$$G_1 = N_G^d \cdot A.$$

Якщо $q \neq p$, то G_1 містить непримарну розкладну підгрупу $\langle h, a \rangle$, де $h \in C_G(H)$, $a \in A$, що неможливо за лемою 4.3.2. Отже, $q = p$ і G_1 є p -групою. За теоремою 4.2.1 норми абелевих нециклічних $N_{G_1}^A$ та розкладних підгруп $N_{G_1}^d$ такої групи збігаються. Оскільки $N_G^d \supset N_G^A$ і кожен елемент з $N_{G_1}^d$ нормалізує A , то $A \in N_G^d$ -допустимою підгрупою, що суперечить припущенню. Отже, $N_G^d = N_G^A$. \square

Слід зазначити, що у класі нескінченних локально скінченних груп умова існування абелевої нециклічної підгрупи зайва, оскільки за результатами роботи [108] кожна нескінченна локально скінченна група містить нескінченну (а значить, нециклічну) абелеву підгрупу. Тому для нескінченних локально скінченних груп твердження теореми 4.4.1 можна уточнити.

Наслідок 4.4.1. *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп нескінченної локально скінченної групи G недедекіндова і локально нільпотентна, то*

$$N_G^d = N_G^A,$$

де N_G^A — норма абелевих нециклічних підгруп даної групи.

Як показує наступний приклад, умова недедекіндовості норми N_G^d в теоремі 4.4.1 є істотною.

Приклад 4.4.1. $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle d \rangle$, де A — квазіциклічна p -група, $|b| = |c| = p$, $|d| = q$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$ (p і q — різні прості числа).

У цій групі норма абелевих нециклічних підгруп і норма розкладних підгруп не збігаються: $N_G^A = G$, а

$$N_G^d = A \times \langle d \rangle \neq N_G^A.$$

З теореми 4.4.1 випливає, що дослідження властивостей нескінченних локально скінченних груп з недедекіндовою локально нільпотентною нормою розкладних підгруп, зводиться до вивчення груп з аналогічними властивостями норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Оскільки нескінченні локально нільпотентні групи з такими обмеженнями були досліджені у попередньому підрозділі, залишається розглянути нескінченні локально скінченні не локально нільпотентні групи, в яких норма N_G^d є недедекіндовою локально нільпотентною групою. Їх будову описує наступна теорема.

Теорема 4.4.2. *Будь-яка нескінченна локально скінченна непримарна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, коли G — група Фробеніуса:*

$$G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle h \rangle,$$

де A — квазіциклічна p -група, p — просте число, $p > 2$, $p \neq 2^k \cdot 3^l + 1$, k і l — невід'ємні цілі числа одночасно не рівні нулю, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$, $|h| = q^n$, q — просте число, $q^n | (p-1)$, $q > 3$, $n \geq 1$, $h^{-1}bh = b^r$, $h^{-1}ch = c^s$ для цілих r і s таких, що $1 < r < p$, $1 < s < p$, $r \neq s$ і $rs \not\equiv 1 \pmod{p}$.

За цих умов $N_G^d = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$.

Доведення. Незавжно переконатися, що група, яка задовольняє перераховані в умові вимоги, має недедекіндову локально нільпотентну норму розкладних підгруп, що збігається з силовською p -підгрупою групи G . Тому будемо доводити лише необхідність умов теореми.

Нехай G — нескінченна локально скінченна непримарна група, що має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d . Тоді за теоремою 4.4.1

$$N_G^d = N_G^A.$$

Отже, норма N_G^A досліджуваної групи також недедекіндова і за лемою 3.6.3 група G є скінченням розширенням нормальної квазіциклічної підгрупи A .

За лемою 4.3.1 N_G^d — примарна di -група для деякого простого числа p . Враховуючи, що кожна примарна di -група містить скінченну характеристичну підгрупу M (див. твердження 4.1.1, 4.1.2), робимо висновок, що

$$M \triangleleft G$$

і $[G : C_G(M)] < \infty$. Оскільки за лемою 4.3.2 G не містить непримарних циклічних підгруп, то централізатор $C_G(M)$ є нормальною p -групою і $A \subseteq C_G(M)$. Отже, A — квазіциклічна p -група.

Нехай $\langle a \rangle$ — підгрупа порядку p з A . Тоді $\langle a \rangle \triangleleft G$ і $C_G(a) \triangleleft G$. Оскільки $C_G(a)$ є p -групою, то $C_G(a) \subseteq G_p$. Тоді з умови $[G : C_G(a)] \leq p-1$ випливає, що

$$G_p = C_G \langle a \rangle,$$

і $G_p \triangleleft G$. За узагальненою лемою Шура G_p доповнювана,

$$G = G_p \rtimes H,$$

де H — деяка p' -підгрупа, порядок якої є дільником $(p-1)$. Оскільки G не містить непримарних циклічних підгруп, то кожен неединичний елемент підгрупи H індукує в G_p регулярний автоморфізм, тому за [102] G — група Фробеніуса з ядром G_p і доповненням H .

Враховуючи, що G не містить непримарних циклічних підгруп, робимо висновок, що фактор-група G/G_p циклічна, тобто $H = \langle h \rangle$, причому $|h| = q^n$, де q — просте число, що є дільником $(p-1)$, $n \geq 1$. З цього також слідує, що $p > 2$ і оскільки G_p є нескінченною p -групою з недедекіндовою нормою розкладних підгруп, то вона є групою типу 1) теореми 4.3.3. Отже,

$$G_p = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle,$$

де A — квазіциклічна p -група, $(p > 2)$, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$.

Дослідимо дію елемента h на нижньому шарі $\omega(G_p) = \langle b, c \rangle$ підгрупи G_p і розглянемо підгрупу

$$G_1 = \omega(G_p) \rtimes \langle h \rangle = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle h \rangle.$$

Нехай $\omega(G_p)$ не містить h -допустимих розкладних підгруп. Тоді у фактор-групі

$$\overline{G_1} = G_1 / \langle a \rangle \cong (\langle \bar{b} \rangle \times \langle \bar{c} \rangle) \rtimes \langle \bar{h} \rangle$$

підгрупа $\overline{\omega(G_p)} = (\langle \bar{b} \rangle \times \langle \bar{c} \rangle)$ — мінімальна нормальна, і кожен елемент цієї підгрупи породжує клас спряжених елементів порядку q^n . Оскільки різні елементи класу породжують різні підгрупи, то враховуючи, що число різних

підгруп порядку p в елементарній абелевій групі порядку p^2 дорівнює $(p+1)$, маємо

$$(p+1) \equiv 0 \pmod{q}.$$

З іншого боку,

$$(p-1) \equiv 0 \pmod{q}$$

і оскільки $q \neq 2$, то $p:q$, що неможливо.

Отже, $\overline{\omega(G_p)}$ містить \bar{h} -допустиму циклічну підгрупу. Нехай, наприклад, $\langle \bar{b} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$. Тоді за теоремою Машке

$$\overline{\omega(G_p)} = \langle \bar{b} \rangle \times \langle \bar{c}_1 \rangle,$$

де $\langle \bar{c}_1 \rangle$ — також \bar{h} -допустима підгрупа.

Переходячи до прообразів та знову використовуючи теорему Машке до підгруп $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ та $\langle a \rangle \times \langle c_1 \rangle$, без порушень загальності міркувань можемо вважати, що h -допустимими є підгрупи $\langle b \rangle$ та $\langle c \rangle$.

Нехай $h^{-1}bh = b^r$, $h^{-1}c = c^s$. Тоді

$$r^{q^n} \equiv 1 \pmod{p}, s^{q^n} \equiv 1 \pmod{p}$$

і $rs \not\equiv 1 \pmod{p}$, бо інакше $a \in Z(G)$, що неможливо за наслідком 4.3.3. Враховуючи тепер, що кожна розкладна підгрупа групи G міститься в G_p і нормальна в ній, маємо

$$G_p = N_G^d.$$

З іншого боку, оскільки G не є di -групою, то G_p містить розкладну підгрупу B , що не $\langle h^{q^{n-1}} \rangle$ -допустимою, звідки $r \not\equiv s \pmod{p}$. Окрім того, якщо $q \in \{2, 3\}$, то спираючись на результати робіт [100], [106] підгрупа $\omega(G_p)$ буде абелевою, що неможливо. Отже, остаточно, $q > 3$ і $p \neq 2^k \cdot 3^l + 1$ для деяких невід'ємних цілих чисел k і l . \square

Приклад нескінченної періодичної не локально нільпотентної групи, що має недедекіндову локально нільпотентну норму розкладних відгруп, наведено нижче.

Приклад 4.4.2. $G = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle \rtimes \langle h \rangle$, де A — квазіциклічна 11 -підгрупа, $|b| = |c| = 11$, $|h| = 5$, $[A, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 11$, $h^{-1}a_1h = a_1^4$, $h^{-1}a_mh = a_m^{\alpha_m}$, $\alpha_m^5 \equiv 1 \pmod{11^m}$, $\alpha_m \not\equiv 1 \pmod{11^m}$ для кожного елемента $a_m \in A$, $|a_m| = 11^m$, $m > 1$, $h^{-1}bh = b^3$, $h^{-1}ch = c^5$.

У цій групі всі розкладні абелеві підгрупи містяться у силовській 11 -підгрупі і нормальні у ній. Група G має одиничний центр і не містить непримарних циклічних підгруп. Елемент h не належить нормалізатору розкладної підгрупи $\langle a_1 \rangle \times \langle bc \rangle$. Отже,

$$N_G^d = (A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle.$$

Наслідок 4.4.2. *Будь-яка нескінченна локально скінченна група G , що має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи.*

Наслідок 4.4.3. *Будь-яка нескінченна локально скінченна група G , що має нескінченну недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, є циклічним розширенням норми N_G^d .*

Наслідок 4.4.4. *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп нескінченної локально скінченної групи G локально нільпотентна, недедекіндова і містить інволюцію, то G — локально скінченна 2-група одного з типів 1)–6) теореми 4.3.3.*

Наслідок 4.4.5. *Якщо норма розкладних підгруп N_G^d нескінченної локально скінченної групи G є скінченною недедекіндовою нільпотентною групою, то G — локально скінченна 2-група одного з типів 5)–6) теореми 4.3.3.*

4.5 Властивості неперіодичних груп, в яких норма розкладних підгруп недедекіндова

У цьому підрозділі розглядаються взаємозв'язки між властивостями неперіодичних локально розв'язних груп і їх норм розкладних підгруп при додатковій умові недедекіндовості таких норм.

Спираючись на лему 4.1.1 неважко показати, що норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної групи G дедекіндова, якщо вона скінченна або містить відмінну від одиничної скінченну характеристичну підгрупу. Зокрема, має місце наступне твердження.

Лема 4.5.1. *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп локально розв'язної неперіодичної групи G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп, то вона дедекіндова.*

Доведення. Нехай норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної групи G задовольняє умови леми. Тоді вона є локально розв'язною періодичною групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп. За теоремою 4.3 [153] N_G^d містить характеристичну (а значить, нормальну в G) скінченну абелеву підгрупу A . Її централізатор $C_G(A)$ має скінченний індекс у групі і містить елемент x такий, що $|x| = \infty$. Тоді підгрупа

$$\langle A, x \rangle = A \times \langle x \rangle$$

розкладна, а значить, N_G^d -допустима. Отже, підгрупа $\langle x \rangle^{|A|}$ також буде N_G^d -допустимою, причому

$$\langle x \rangle^{|A|} \cap N_G^d = E.$$

За лемою 4.1.1 норма N_G^d дедекіндова, що й вимагалось довести. \square

Подальші твердження характеризують вплив норми розкладних підгруп на властивості групи.

Теорема 4.5.1. *Нехай G — неперіодична група з недедекіндовою нормою N_G^d розкладних підгруп. Тоді будь-яка розкладна абелева підгрупа групи G буде мішаною тоді і тільки тоді, коли мішаною є кожна розкладна абелева підгрупа норми N_G^d .*

Доведення. Пряме твердження теореми очевидне. Доведемо правильність оберненого твердження. Нехай усі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d мішані, а сама група G містить розкладну підгрупу

$$M = \langle x \rangle \times \langle y \rangle,$$

де $|x| = |y| = \infty$ або $|x| = p$, $|y| = q$, де p і q — прості числа. З опису неперіодичних di -груп (твердження 4.1.1, 4.1.5) слідує, що в цьому випадку N_G^d є групою одного з типів:

1) $N_G^d = A \ltimes \langle b \rangle$, де $A = A_1 \times C$ — неперіодична абелева група без інволюцій, A_1 — абелева група без скруту ранга 1, C — локально циклічна p -група (p — непарне просте число), $|b| = 2$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$;

2) $N_G^d = A \langle b \rangle$, де $A = A_1 \times C$ — неперіодична абелева група з однією інволюцією b^2 , A_1 — абелева група без скруту ранга 1, C — локально циклічна 2-група, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$;

3) $N_G^d = (\langle b^2 \rangle \times C) \langle b \rangle$, де $|b| = 8$, C — абелева група без скруту ранга 1 і в фактор-групі $G / \langle b^4 \rangle$ всі нескінченні абелеві підгрупи нормальні;

4) $N_G^d = Q \times B$, де Q — група кватерніонів, B — абелева група без скруту ранга 1;

5) $N_G^d = \langle a \rangle \ltimes B$, де $|a| = p^n$, p — просте число ($n > 1$ при $p = 2$), B — неповна абелева група без скруту ранга 1 і комутант групи G має простий порядок.

У кожному з цих випадків норма N_G^d містить нормальну в G скінченну неединичну абелеву підгрупу A , тому $[G : C_G(A)] < \infty$.

Якщо $|M| = \infty$, то оскільки в нормі N_G^d всі абелеві підгрупи без скруту мають ранг 1, можна вважати, що

$$N_G^d \cap \langle y \rangle = E.$$

Тоді з умови $[G : C_G(A)] < \infty$, слідує, що $y^m \in C_M(A)$ для деякого $m \in N$. Отже, $\langle A, y^m \rangle - N_G^d$ -допустима підгрупа, звідки підгрупа

$$\langle A, y^m \rangle^{|A|} = \langle y^{m|A|} \rangle$$

також буде N_G^d -допустимою. Застосовуючи лему 4.1.1, робимо висновок, що норма N_G^d дедекіндова. Протиріччя.

Припустимо, що $|M| < \infty$ і $|M| = pq$. У цьому випадку норма N_G^d містить елемент a такий, що $|a| = \infty$ і $a \in C_G(M)$. Але тоді підгрупи $\langle a, x \rangle$ і $\langle a, y \rangle$ будуть N_G^d -допустимими, а значить N_G^d -допустимими будуть і підгрупи $\langle x \rangle$ і $\langle y \rangle$. Оскільки

$$\langle x, y \rangle \not\subseteq N_G^d,$$

то принаймні одна з підгруп $\langle x \rangle$ або $\langle y \rangle$ не належить N_G^d . Застосовуючи лему 4.1.1, знову приходимо до висновку, що і в цьому випадку норма N_G^d дедекіндова. \square

Наслідок 4.5.1. *Якщо норма N_G^d абелевих розкладних підгруп неперіодичної групи G недедекіндова і всі її розкладні абелеві підгрупи мішані, то фактор-група G/N_G^d періодична.*

Лема 4.5.2. *Якщо неперіодична група G містить абелеву підгрупу M , яка є або вільною групою ранга $r \geq 2$, або періодичною непримарною групою, то кожна підгрупа з M буде N_G^d -допустимою в G .*

Доведення. Для доведення леми достатньо розглянути випадок, коли

$$M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle,$$

де $|x_1| = |x_2| = \infty$ або $|x_1| = p^m$, $|x_2| = q^n$, $n, m \in N$, p і q — різні прості числа.

У першому випадку для довільного неодиначного елемента $x \in M$ можна вказати такий елемент $y \in M$, що $|y| = \infty$ і $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = E$. Тоді для кожного натурального числа k підгрупа $\langle x, y^k \rangle$ буде N_G^d -допустимою. Отже, підгрупа

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \langle x, y^k \rangle = \langle x \rangle$$

також є N_G^d -допустимою. Але тоді N_G^d -допустимими будуть всі підгрупи з M .

У другому випадку з розкладності M слідує, що вона N_G^d -допустима, а значить N_G^d -допустимими будуть її характеристичні підгрупи $\langle x_1 \rangle$ і $\langle x_2 \rangle$. З цього робиом висновок, що кожна підгрупа з M буде N_G^d -допустимою. \square

Теорема 4.5.2. *Неперіодична група G з недедекіндовою нормою N_G^d розкладних підгруп тоді і тільки тоді не містить розкладних підгруп, коли таких підгруп не містить її норма N_G^d .*

Доведення. Пряме твердження теореми очевидне. Доведемо справедливність оберненого твердження. Нехай норма N_G^d розкладних підгруп групи G недедекіндова і не містить розкладних підгруп, а група G містить такі підгрупи. Тоді G містить прямий добуток

$$M = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$$

двох неединичних циклічних підгруп.

Якщо $|x| = |y| = \infty$, то за лемою 4.5.2 кожна підгрупа з M буде N_G^d -допустимою. З цього слідує існування такої нескінченної підгрупи $\langle a \rangle \subset M$, що

$$\langle a \rangle \cap N_G^d = E.$$

В силу леми 4.1.1 норма N_G^d дедекіндова, що неможливо за умовою.

Далі розглянемо випадок, коли підгрупа M мішана і $|x| = \infty$, $|y| < \infty$. Нехай $y_1 \in \langle y \rangle$, $|y_1| = p$, де p — просте число. Тоді підгрупи $\langle y_1 \rangle$ і $\langle x^p \rangle$ будуть N_G^d -допустимими і хоча б одна з них має неединичний перетин з N_G^d . Знову застосовуючи лему 4.1.1, отримуємо протиріччя.

Нехай тепер $|M| < \infty$ і $x_1 \in \langle x \rangle$, $y_1 \in \langle y \rangle$, де $|x_1| = p$, $|y_1| = q$, а p і q — прості числа. Якщо $p \neq q$, то підгрупи $\langle x_1 \rangle$ і $\langle y_1 \rangle$ будуть N_G^d -допустимими і принаймні одна з них не належить N_G^d . Використовуючи лему 4.1.1, приходимо до протиріччя з умовою. Тому $p = q$ і $\langle x_1, y_1 \rangle$ — елементарна абелева група порядку p^2 .

Розглянемо підгрупу $G_1 = \langle x_1, y_1 \rangle N_G^d$. Оскільки $\langle x_1, y_1 \rangle \triangleleft G_1$, то

$$[G_1 : C_{G_1}(\langle x_1, y_1 \rangle)] < \infty.$$

Якщо норма N_G^d містить елементи нескінченного порядку, то $C_{G_1} \langle x_1, y_1 \rangle$ — неперіодична група і неважко показати, що підгрупи $\langle x_1 \rangle$ і $\langle y_1 \rangle$ будуть N_G^d -допустимими. Але в такому випадку отримуємо ситуацію, яка вивчена вище, і N_G^d є дедекіндовою групою, що неможливо за умовою. Отже, N_G^d — періодична група. Враховуючи лему 4.1.1, маємо

$$\langle x_1, y_1 \rangle \cap N_G^d \neq E.$$

Тому $|\langle x_1, y_1 \rangle \cap N_G^d| = p$ і не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати $x_1 \notin N_G^d$, $y_1 \in N_G^d$. Очевидно, що

$$[\langle x_1, y_1 \rangle, N_G^d] = \langle y_1 \rangle \triangleleft G_1.$$

При цьому якщо норма N_G^d є p -групою, то

$$\langle y_1 \rangle \subseteq Z(N_G^d)$$

— єдина підгрупа порядку p в нормі N_G^d і $\langle y_1 \rangle \triangleleft G$. У цьому випадку в групі знайдеться елемент a нескінченного порядку такий, що $[a, y_1] = 1$. Але тоді $\langle a^p \rangle \in N_G^d$ -допустимою підгрупою, що неможливо з огляду на лему 4.1.1. Значить, N_G^d — непримарна група і можна вказати елемент $b \in N_G^d$ такий, що $|b| \neq 1$, $(|b|, p) = 1$.

За теоремою Машке

$$\langle x_1, y_1 \rangle \rtimes \langle b \rangle = (\langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle) \rtimes \langle b \rangle,$$

де $\langle y_2 \rangle - \langle b \rangle$ -допустима підгрупа, $\langle y_2 \rangle \cap N_G^d = E$ і

$$[y_2, b] \in N_G^d \cap \langle y_2 \rangle = E.$$

Оскільки підгрупа $\langle y_2, b \rangle \in N_G^d$ -допустимою, то N_G^d -допустимою буде її характеристична підгрупа $\langle y_2 \rangle$. Але в такому випадку з леми 4.1.1 слідує дедекіндовість норми N_G^d . \square

Умова недедекіндовості норми N_G^d розкладних підгруп в теоремі 4.5.2 є суттєвою. Це підтверджує наступний приклад.

Приклад 4.5.1. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, де $|a| = |c| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

У цій групі $N_G^d = \langle c \rangle$ і не містить розкладних підгруп, а в групі G множина таких підгруп нескінченна.

Наслідок 4.5.2. Якщо норма N_G^d неперіодичної локально розв'язної групи G недедекіндова, містить елементи нескінченного порядку і не містить розкладних підгруп, то

$$G = N_G^d$$

і G — група типу 3) твердження 4.1.1.

Теорема 4.5.3. Неперіодична група G з недедекіндовою нормою N_G^d розкладних підгруп тоді і тільки тоді містить вільну абелеву підгрупу рангу $r \geq 2$, коли підгрупу такого рангу містить її норма N_G^d .

Доведення. Якщо норма N_G^d містить вільну абелеву підгрупу рангу $r \geq 2$, то твердження теореми очевидне. Припустимо, що G містить вільну абелеву підгрупу

$$M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \cdots \times \langle x_r \rangle$$

рангу $r \geq 2$. За лемою 4.5.2 кожна з підгруп $\langle x_i \rangle$, де $i = 1 \dots r \in N_G^d$ — допустимою. В силу леми 4.1.1

$$\langle x_i \rangle \cap N_G^d \neq E$$

для кожного $i = 1 \dots r$. З цього слідує, що $M \cap N_G^d$ — вільна абелева підгрупа рангу r норми N_G^d . \square

4.6 Про неперіодичні групи, в яких норма розкладних підгруп є недедекіндовою локально нільпотентною групою

З опису di -груп (див. твердження 4.1.1, 4.1.2, 4.1.5) випливає, що неабелеві локально нільпотентні групи, всі розкладні підгрупи яких нормальні (або система таких підгруп порожня), в періодичному випадку є або кватерніонними 2-групами, або $\overline{H}A_p$ -групами, а у неперіодичному — групами одного з типів 4) або 5) при $n > 1$ твердження 4.1.5.

Як буде показано нижче, в класі локально нільпотентних неперіодичних груп з умови недедекіндовості норми розкладних підгруп слідує нормальність всіх розкладних підгруп в групі i , як наслідок, рівність вказаної норми та групи.

Теорема 4.6.1. *В неперіодичній локально розв'язній групі G норма N_G^d розкладних підгруп локально нільпотентна і недедекіндова тоді і тільки тоді, коли N_G^d є неперіодичною di -групою одного з типів:*

- 1) $N_G^d = Q \times B$, де Q — група кватерніонів, B — абелева група без скруту рангу 1;
- 2) $N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B$, де $|a| = p^n$, p — просте число, $n > 1$, B — неповна абелева група без скруту рангу 1 і $[\langle a \rangle, B] = \langle a^{p^{n-1}} \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми очевидна, оскільки кожна з груп, вказаних в умові теореми, нільпотентна класу 2. Доведемо їх необхідність.

Нехай норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної локально розв'язної групи G є періодичною локально нільпотентною недедекіндовою підгрупою. Тоді з опису di -груп (до яких відноситься норма N_G^d) слідує, що N_G^d є або кватерніонною 2-групою порядку більше 8, або $\overline{H}A_p$ -групою. У кожному з цих випадків N_G^d містить скінченну нормальну в G підгрупу F .

Далі, оскільки $[G : C_G(F)] < \infty$, то можна вказати елемент нескінченного порядку такий, що $x \in C_G(F)$. Але тоді підгрупа

$$\langle x, F \rangle^{|F|} = \langle x \rangle^{|F|}$$

буде N_G^d -допустимою. Оскільки $N_G^d \cap \langle x \rangle^{|F|} = E$, то за лемою 4.1.1 норма N_G^d має бути дедекіндовою, що суперечить умові.

Отже, N_G^d — локально нільпотентна неперіодична di -група. З опису таких груп (твердження 4.1.1, 4.1.5) робимо висновок, що локально нільпотентними серед них будуть лише групи типу 4) або 5) при $n > 1$ твердження 4.1.2. \square

Зазначимо, що у випадку 2), вказаному в умові теореми 4.6.2, підгрупа B не є p -подільною. Справді, в іншому випадку підгрупа

$$(Z(N_G^d))^{p^{n-1}} = (\langle a^p \rangle \times B^p)^{p^{n-1}} = B^{p^n} = B$$

буде N_G^d -допустимою і, як наслідок, $B \triangleleft N_G^d$, що неможливо. Отже, B — не p -подільна абелева група без скруту рангу 1.

Наслідок 4.6.1. *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної локально розв'язної групи G є періодичною локально нільпотентною підгрупою, то вона дедекіндова.*

Наслідок 4.6.2. *Нехай норма N_G^d неперіодичної локально розв'язної групи G є локально нільпотентною недедекіндовою підгрупою. Тоді будь-які дві нескінченні циклічні підгрупи групи G мають неодиначний перетин.*

Доведення. З умови випливає, що норма N_G^d розкладних підгруп є групою одного з двох типів теореми 4.6.1. У кожному з цих випадків періодична частина $T(N_G^d)$ норми N_G^d є скінченною характеристичною підгрупою групи G .

Нехай $x, y \in G$, $|x| = |y| = \infty$ і

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = E.$$

Тоді або $\langle x \rangle \cap B = E$, або $\langle y \rangle \cap B = E$, де B — підгрупа без скруту рангу 1 з норми N_G^d . Будемо вважати, що $\langle x \rangle \cap B = E$. Оскільки

$$T(N_G^d) \triangleleft G$$

і $|T(N_G^d)| = n < \infty$, то $x^k \in C_G(T(N_G^d))$ для деякого цілого числа k . Отже, підгрупа

$$\langle x^k, T(N_G^d) \rangle$$

є N_G^d -допустимою, тому підгрупа $\langle x^{kn} \rangle$ також буде N_G^d -допустимою, що неможливо за лемою 4.1.1. Отже,

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq E,$$

що й треба було довести. \square

Наступна теорема дає повний опис неперіодичних локально нільпотентних груп, у яких норма N_G^d розкладних підгруп недедекіндова.

Теорема 4.6.2. *В неперіодичній локально нільпотентній групі G норма N_G^d розкладних підгруп тоді і тільки тоді недедекіндова, коли $G = N_G^d$ і G — група одного з типів 1)–2) теореми 4.6.1.*

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Покажемо їх необхідність. Нехай G — локально нільпотентна неперіодична група, яка має недедекіндову норму N_G^d . За теоремою 4.6.1 N_G^d є групою одного з типів 1) або 2) цієї теореми.

Враховуючи, що всі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d є мішаними і застосовуючи теорему 4.5.1, робимо висновок, що в групі G кожна розкладна абелева підгрупа також буде мішаною. Тому періодична частина $T(G)$ групи G не містить розкладних підгруп і в силу твердження 4.1.1 є або локально циклічною p -групою для деякого простого числа, або кватерніонною 2-групою (скінченною або нескінченною). Отже,

$$T(G) \cap N_G^d \supset \langle a_1 \rangle,$$

де $|a_1| = p$. Оскільки $\langle a_1 \rangle \triangleleft G$ і група G локально нільпотентна, то

$$\langle a_1 \rangle \subseteq Z(G).$$

За наслідком 4.6.2 в групі G довільна пара нескінченних циклічних підгруп $\langle x \rangle$ та $\langle y \rangle$ має нетривіальний перетин $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq E$. З цього слідує, що $G/T(G)$ — локально нільпотентна група без скруту і без розкладних підгруп. За твердженням 4.1.1 вона є абелевою групою без скруту рангу 1. Тому комутант $G' \subset T(G)$.

Далі розглянемо кожен із вказаних для норми N_G^d випадків окремо.

1. Нехай

$$N_G^d = Q \times B$$

— група типу 1) теореми 4.6.1, де $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — група кватерніонів, $|q_1| = |q_2| = 4$, $q_1^2 = q_2^2$, $q_2^{-1}q_1q_2 = q_1^{-1}$, B — абелева група без скруту рангу 1. Тоді $T(G)$ є кватерніонною 2-групою.

Нехай $\langle q \rangle \subset T(G)$, де $|q| = 8$. Тоді $\langle q \rangle$ — єдина циклічна підгрупа порядку 8 у $T(G)$, звідки $\langle q \rangle \triangleleft G$. Не порушуючи загальності міркувань, покладемо $q^2 = q_1$. Візьмемо елемент $b \in B$ нескінченного порядку, який переставний з qq_2 . Тоді

$$(\langle b \rangle \times \langle qq_2 \rangle)$$

— N_G^d -допустима підгрупа, отже, підгрупа $\langle qq_2 \rangle$ також буде N_G^d -допустимою. Але

$$[qq_2, q_2] = q_1^{-1} = q^{-2} \notin \langle qq_2 \rangle.$$

Отже,

$$T(G) = T(N_G^d) = Q.$$

Позначимо $C = C_G(Q)$ — централізатор підгрупи Q в G . Оскільки для кожного елемента $g \in G$ нескінченного порядку підгрупа $\langle q_1^2, g \rangle N_G^d$ -допустима, то $\langle g^2 \rangle$ також N_G^d -допустима і $g^2 \in C$. З цього слідує, що $\exp(G/C) = 2$ і тому G/C абелева. Отже, комутант

$$G' \subseteq Q \cap C = \langle q_1^2 \rangle.$$

Оскільки кожна розкладна підгрупа групи G містить G' , то в G всі розкладні підгрупи нормальні і тому в цьому випадку $G = N_G^d$.

2. Нехай

$$N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B$$

— група типу 2) теореми 4.6.1, де $|a| = p^n$, p — просте число, $n > 1$, а B — неповна абелева група без скруту рангу 1,

$$[\langle a \rangle, B] = \langle a^{p^{n-1}} \rangle = \langle a_1 \rangle.$$

Припустимо, що $T(G) \neq \langle a \rangle$. Оскільки $T(G)$ не містить розкладних підгруп, то або знайдеться такий елемент $c \in T(G)$, що $c^p = a$, або

$$T(G) = \langle a, q \rangle$$

— кватерніонна 2-група, де $|a| = 2^n$, $n > 1$, $|q| = 4$, $q^2 = a_1$, $q^{-1}aq = a^{-1}$.

Якщо $T(G)$ містить елемент c такий, що $c^p = a$, то з умови

$$[\langle a \rangle, B] \neq E$$

слідує, що для деякого елемента $b \in B$ має місце рівність $[a, b] = a_1$. Оскільки $a_1 \in Z(G)$ і $|bc| = \infty$, то $(\langle a_1 \rangle \times \langle bc \rangle)$ — N_G^d -допустима підгрупа, звідки

$$[bc, b] \in G' \cap \langle bc, a_1 \rangle = \langle a_1 \rangle.$$

Покладемо $[bc, b] = [c, b] = a_1^\alpha$, тоді

$$[a, b] = [c^p, b] = [c, b]^p = 1,$$

що неможливо. Отже,

$$T(G) = T(N_G^d) = \langle a \rangle.$$

Покажемо тепер, що і в цьому випадку комутант G' групи G маж простий порядок. Для цього достатньо переконатися, що довільний неединичний комутатор групи G має порядок p . Нехай $x, y \in G$ і $[x, y] \neq 1$. Тоді підгрупа

$$H = T(G) \langle x, y \rangle$$

нільпотентна, а фактор-група $H/T(G)$ — циклічна. Отже,

$$H = T(G) \rtimes \langle h \rangle$$

для деякого елемента $h \in H$, $|h| = \infty$. Оскільки $a_1 \in T(G) \cap Z(H)$, то підгрупа $\langle a_1, h \rangle$ — N_G^d -допустима. Тому

$$[T(G), \langle h \rangle] \subset T(G) \cap \langle a_1, h \rangle = \langle a_1 \rangle,$$

$$|H'| = p, |[x, y]| = p \text{ і } |G'| = p.$$

В силу того, що довільна розкладна підгрупа групи G є мішаною, вона містить комутант G' , звідки $G = N_G^d$ і в G нормальні всі розкладні підгрупи.

Нехай тепер

$$T(G) = \langle a, q \rangle$$

— кватерніонна 2-група, $|a| = 2^n$, $n > 1$, $|q| = 4$, $q^2 = a_1$, $q^{-1}aq = a^{-1}$. В нільпотентній групі $\langle T(G), x \rangle$, де $x \in G$ і $|x| = \infty$, періодична частина неабелева і скінченна. Тому $x^k \in C_G(\langle a, q \rangle)$ для деякого натурального числа k . Тоді підгрупа $(\langle x^k \rangle \times \langle q \rangle)$ — N_G^d -допустима і

$$[a, q] \in \langle a \rangle \cap (\langle x^k \rangle \times \langle q \rangle) = \langle a_1 \rangle.$$

Таким чином, $|a| = 4$ і $T(G) = \langle a, q \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Повторюючи міркування пункту 1, одержимо

$$G' \subseteq T(G) \cap C_G(T(G)) = \langle a_1 \rangle,$$

звідки G — di -група. Отже, $G = T(G) \times B = N_G^d$, що суперечить умові. Отже, цей випадок неможливий. \square

Отже, у класі локально нільпотентних неперіодичних груп з недедекіндовості норми розкладних підгруп впливає нормальність усіх розкладних підгруп групи.

Наслідок 4.6.3. *Будь-яка неперіодична локально нільпотентна група G , яка має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп, нільпотентна класу 2.*

Звернемо увагу, що клас неперіодичних груп з локально нільпотентною недедекіндовою нормою є більш широким, ніж клас локально нільпотентних неперіодичних груп з такими ж обмеженнями на норму N_G^d . Наступний приклад підтверджує, що існують неперіодичні не локально нільпотентні групи, у яких норма N_G^d розкладних підгруп є недедекіндовою нільпотентною групою.

Приклад 4.6.1. $G = B \rtimes \langle q_1, q_2 \rangle$, де B – абелева група без скруту рангу 1, $|q_1| = 8$, $|q_2| = 4$, $q_1^4 = q_2^2$, $q_2^{-1}q_1q_2 = q_1^{-1}$, $[B, \langle q_2 \rangle] = E$, $q_1^{-1}bq_1 = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

Група G не локально нільпотентна, а її норма $N_G^d = \langle q_1^2, q_2 \rangle \times B$ – нільпотентна.

У подальших міркуваннях нам знадобиться наступне твердження.

Лема 4.6.1. Якщо фактор-група $G/\langle a \rangle$ абелева, де $|a| = p^n$ (p – просте число, $n \in \mathbb{N}$), і комутант $G' \neq \langle a \rangle$, то група G нільпотентна.

Доведення. Очевидно, що у випадку $\langle a \rangle \subseteq Z(G)$, група G нільпотентна класу 2. Нехай $\langle a \rangle \not\subseteq Z(G)$ і елемент $x \in G$ такий, що $[a, x] \neq 1$. Враховуючи, що $G' \subseteq \langle a^p \rangle$, покладемо

$$[a, x] = a^{pt}, t \in \mathbb{Z}.$$

Позначимо $a_i = a^{p^{n-i}}$, де $1 \leq i \leq n$, $a_n = a$. Тоді з рівності $x^{-1}ax = aa^{pt}$, одержимо

$$x^{-1}a_ix = x^{-1}a^{p^{n-i}}x = a^{p^{n-i}}a^{p^{n-i+1}t} = a_i a_{i-1}^t,$$

звідки

$$\langle a_i \rangle / \langle a_{i-1} \rangle \subseteq Z(G) / \langle a_{i-1} \rangle.$$

Отже, ряд

$$\langle 1 \rangle \triangleleft \langle a_1 \rangle \triangleleft \langle a_2 \rangle \triangleleft \cdots \triangleleft \langle a_{n-1} \rangle \triangleleft \langle a_n \rangle \triangleleft G$$

є центральним і група G нільпотентна. □

Наслідок 4.6.4. Якщо фактор-група $G/\langle a \rangle$ абелева, $|a| = 2^n$ ($n \geq 1$), то група G нільпотентна.

Теорема 4.6.3. Неперіодична локально розв'язна й не локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову локально нільпотентну норму розкладних підгруп, коли G – група одного з наступних типів:

- 1) $G = B \rtimes \langle y, q \rangle$, де $|y| = 8$, $y^4 = q^2$, $q^{-1}yq = y^{-1}$, B – абелева група без скруту рангу 1, $y^{-1}by = b^{-1}$, $[q, b] = 1$ для довільного елемента $b \in B$; $N_G^d = \langle y^2, q \rangle \times B$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes B\langle y \rangle$, $|a| = p^n$, p – просте число, $p \neq 2$, $n > 1$, $B\langle y \rangle$ – абелева група без скруту рангу 1, B – не p -подільна абелева група без скруту рангу 1, $|y| = \infty$, $[B\langle y \rangle : B] = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \mid (p-1)$, $k > 1$, $[\langle a \rangle, \langle y \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle a \rangle, B] = \langle a^{p^{n-1}} \rangle$; $N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B$;

3) $G = (\langle a \rangle \rtimes B) \langle g \rangle$, $|a| = 4$, B — не 2-подільна абелева група без скруту рангу 1, $[\langle a \rangle, B] = \langle a^2 \rangle$, $g^2 = a$, при цьому якщо $b \in (B \setminus C_G(a))$, то $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$, а якщо $b \in (B \cap C_G(a))$, то $g^{-1}bg = b^{-1}$; $N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B$.

Доведення. Доведемо спочатку достатність умов теореми.

Нехай G — група типу 1) теореми 4.6.3. Оскільки усі розкладні абелеві підгрупи цієї групи містяться у групі $(\langle y^2, q \rangle \times B)$ й нормальні у ній, а елемент y не належить нормалізатору абелевої нециклічної підгрупи $\langle q^2, bq \rangle$, де $b \in B$, то $N_G^d = \langle y^2, q \rangle \times B$.

Нехай G — група типу 2) теореми. Враховуючи, що усі розкладні абелеві підгрупи цієї групи мішані, належать групі $C_G(a^{p^{n-1}}) = \langle a \rangle \rtimes B$ й нормальні у ній, робимо висновок, що

$$N_G^d \supseteq (\langle a \rangle \rtimes B).$$

З іншого боку, жоден елемент $x \notin C_G(a^{p^{n-1}})$, $|x| = \infty$ не нормалізує підгрупу $\langle a^{p^{n-1}}, ab \rangle$, де $b \in B$, тому $N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B$.

У групі типу 3) усі розкладні підгрупи також містяться у групі $\langle a \rangle \rtimes B$ і нормальні у ній, тому $N_G^d \supseteq (\langle a \rangle \rtimes B)$. Оскільки елемент g не нормалізує підгрупу $\langle a^2, b \rangle$, де b — довільний непереставний з a елемент підгрупи B , то $N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B$.

Доведемо тепер необхідність умов теореми. Нехай G — досліджувана група. Тоді її норма розкладних підгруп є di -групою одного з типів 1) або 2), вказаних у формулюванні теореми 4.6.1. Подальше доведення проведемо у лемах 4.6.2 — 4.6.3, виходячи з будови норми N_G^d .

Лема 4.6.2. *Якщо неперіодична локально розв'язна й не локально нільпотентна група G має нормою розкладних підгруп групу*

$$N_G^d = Q \times B,$$

де B — абелева група без скруту рангу 1, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — група кватерніонів, $|q_1| = |q_2| = 4$, $q_1^2 = q_2^2$, $q_2^{-1}q_1q_2 = q_1^{-1}$, то G — група типу 1) теореми 4.6.3.

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^d розкладних підгруп задовольняють умови леми. Оскільки усі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d мішані, то з теореми 4.5.1 випливає, що таку ж властивість мають усі розкладні підгрупи самої групи G .

Враховуючи, що Q — характеристична підгрупа норми N_G^d , маємо $Q \triangleleft G$. Отже, інволюція q_1^2 міститься у центрі групи G . Тоді з леми 1.1 [129] випливає, що усі неодиначні елементи скінченного порядку групи є 2-елементами, а кожна 2-підгрупа групи G нерозкладна, містить q_1^2 і тому буде локально циклічною чи кватерніонною 2-групою.

Нехай $C = C_G(Q)$ — централізатор підгрупи Q . Тоді $C \triangleleft G$. Зазначимо, що C не містить елементів порядку 4, бо в іншому випадку підгрупа $Q \langle c \rangle$ буде мати розкладну абелеву підгрупу порядку 4, що неможливо за теоремою 4.5.2. Отже, періодична частина централізатора

$$T(C) = \langle q_1^2 \rangle.$$

Враховуючи, що $C / \langle q_1^2 \rangle$ — локально розв'язна група без скруту, яка не містить розкладних підгруп, та використовуючи опис груп з такою властивістю (твердження 4.1.1), робимо висновок, що вона абелева рангу 1. Оскільки для будь-яких елементів $x, y \in C$ група $\langle x, y, q_1^2 \rangle / \langle q_1^2 \rangle$ циклічна, то $[x, y] = 1$. Отже, підгрупа C абелева і

$$C = \langle q_1^2 \rangle \times M,$$

де M — абелева група без скруту рангу 1.

Нехай $x \in G$ — довільний елемент нескінченного порядку. Тоді $\langle x, q_1^2 \rangle$ — N_G^d -допустима підгрупа і тому $\langle x^2 \rangle = (\langle x, q_1^2 \rangle)^2$ також N_G^d -допустима. Отже,

$$[\langle x^2 \rangle, Q] \subseteq \langle x^2 \rangle \cap Q = E$$

і $x^2 \in C$.

З того, що група G не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, одержимо

$$\langle x^2 \rangle \cap B \neq E.$$

Тоді для довільного елемента $b \in B$, $|b| = \infty$ маємо $x^{2k} = b^m$ для деяких цілих чисел m і k . Якщо при цьому $b^{-1}x^2b = x^{-2}$, то

$$b^{-1}x^{2k}b = x^{-2k} = x^{2k},$$

і $x^{4k} = 1$, що неможливо. Отже, $[x^2, b] = 1$ і група $\langle x^2, B \rangle$ абелева рангу 1.

Розглянемо тепер фактор-групу G/C . Добре відомо, що $\text{Aut} Q \cong S_4$ тому $|G/C| \leq 24$. Покажемо, що G/C не містить відмінних від одиниці 3-елементів. Справді, нехай $\bar{g} \in G/C$, $|\bar{g}| = 3$ і g — прообраз елемента \bar{g} , $g^3 \in C$. Якщо $|g| = \infty$, то за доведеним вище $g^2 \in C$, звідки $g \in C$. Нехай $|g| < \infty$, тоді $|g| = 2^n$. Але у такому випадку $\langle g^3 \rangle = \langle g \rangle$ і знову $g \in C$. Отже, G/C є 2-групою порядку не більше 8.

Припустимо, що $T(G) = Q$. Тоді фактор-група G/Q — абелева без скруту ранга 1. Оскільки для довільного елемента $x \in G$, $|x| = \infty$ виконується $x^2 \in C$, то фактор-група G/C має експоненту 2, і тому є абелевою. Але тоді

$$G' \subseteq Q \cap C = \langle q_1^2 \rangle$$

і оскільки $q_1^2 \in Z(G)$, то G — нільпотентна група класу 2, що суперечить умові. Отже, існує елемент $y \in G \setminus Q$, $|y| < \infty$. Враховуючи попередні зауваження, $|y| = 2^n \geq 8$.

З того, що $\langle y \rangle \cap C = \langle q_1^2 \rangle = \langle y^{2^{n-1}} \rangle$ випливає

$$G/C = \overline{G} \supseteq \langle \overline{y} \rangle$$

і $|\overline{y}| = 2^{n-1} \geq 4$. Враховуючи, що $\langle \overline{y} \rangle$ ізоморфна деякій підгрупі групи S_4 , а остання не містить елементів порядку 8, робимо висновок, що $|y| = 8$ і $\langle y \rangle Q$ — узагальнена група кватерніонів порядку 16. При цьому G не містить елементів скінченного порядку більше 8.

Нехай $G_1 = \langle y \rangle QC$. Тоді

$$G_1/C = \langle y \rangle QC/C \cong \langle y \rangle Q/(\langle y \rangle Q \cap C) = \langle \overline{y} \rangle \rtimes \langle \overline{q_2} \rangle \cong D_8$$

де D_8 — група дієдра порядку 8. Враховуючи, що

$$G/C \supseteq G_1/C$$

і $G/C \in 2$ -групою порядку не вище 8, робимо висновок, що $G = G_1$. Отже,

$$G = \langle y \rangle QC = \langle y, q_2 \rangle C = (Q \times M) \langle y \rangle,$$

де $Q = \langle y^2, q_2 \rangle$, $|y| = 8$, $|q_2| = 4$, $q_2^{-1}yq_2 = y^{-1}$, $q_2^2 = y^4$, $C = C_G(\langle y^2, q_2 \rangle)$, $C/\langle q_2^2 \rangle \cong M$ — абелева група без скруту рангу 1.

Покажемо, що підгрупа $A = Q \times M$ містить усі елементи нескінченного порядку даної групи. Припустимо, що це не так і існує елемент $x \notin A$, $|x| = \infty$. Оскільки підгрупа $\langle x, q_1^2 \rangle \in N_G^d$ -допустимою, то для довільного елемента $q_i \in Q$ будемо мати

$$q_i^{-1}xq_i = x^k q_2^{2m}.$$

Враховуючи, що $x^2 \in C$, одержимо

$$q_i^{-1}x^2q_i = x^{2k} = x^2,$$

звідки $k = 1$ і

$$[Q, \langle x \rangle] = \langle q_2^2 \rangle.$$

З того, що $x \notin C$, для твірних елементів q_1, q_2 підгрупи Q виконуються співвідношення $[x, q_1] = 1$, $[x, q_2] = q_2^2$. Але у такому випадку $xq_1 \in C$ і $x \in CQ = A$, що неможливо.

З цього також випливає, що підгрупа A містить усі розкладні абелеві підгрупи групи G . Справді, підгрупи такого роду є мішаними, виду $\langle a \rangle \times M_1$, де $|a| < \infty$, M_1 — абелева група без скруту рангу 1, $M_1 \subset A$. Але тоді для

довільного елемента $x \in M_1$, $|x| = \infty$, елемент (xa) має нескінченний порядок і належить підгрупі A , тому $a \in A$. Отже, усі розкладні абелеві підгрупи групи G містяться в A і нормальні у ній. Тому $A = N_G^d$ і

$$G = \langle y \rangle N_G^d = \langle y \rangle (Q \times B),$$

де $y^2 \in Q$ і $\langle y \rangle Q$ — узагальнена група кватерніонів порядку 16.

Встановимо тепер, як діє елемент y на елементи нескінченного порядку даної групи. Враховуючи, що

$$Z(N_G^d) = (\langle q_1^2 \rangle \times B) \triangleleft G,$$

покладемо

$$y^{-1}by = b_1q_1^{2n},$$

де $n \in \{0, 1\}$ і $b, b_1 \in B$, $|b| = |b_1| = \infty$. За наслідком 4.6.2

$$\langle b \rangle \cap \langle b_1 \rangle \neq E,$$

тому $b^k = b_1^m$ для деяких цілих чисел k та m . Тоді

$$y^{-1}b^ky = y^{-1}b_1^my = (b_1q_1^{2n})^k = b_1^kq_1^{2nk}$$

і

$$y^{-1}b_1^{2km}y = b_1^{2k^2}, b_1^{2km} = yb_1^{2k^2}y^{-1}.$$

З іншого боку $yb_1^{2k}y^{-1} = b_1^{2m}$ і $yb_1^{2mk}y^{-1} = b_1^{2m^2}$.

Тому $b_1^{2m^2} = yb_1^{2mk}y^{-1} = y^2b_1^{2k^2}y^{-2} = b_1^{2k^2}$ і $2m^2 = 2k^2$ і $m = \pm k$. Оже, або $b^k = b_1^k$, або $b^k = b_1^{-k}$.

Оскільки B — абелева група без скруту, то $b_1 = b$ або $b_1 = b^{-1}$. У першому випадку із співвідношення $y^{-1}by = b$ випливає, що $|yb| = \infty$. Враховуючи наведені вище міркування, одержимо $yb \in N_G^d$, що неможливо. У випадку $y^{-1}by = b^{-1}$ будемо мати

$$y^{-1}by = b^{-1}q_1^{2n}.$$

Якщо при цьому $n = 1$, то $|ybq_2| = 2$, що також неможливо. Отже, $n = 0$ і $y^{-1}by = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$. \square

Лема 4.6.3. Якщо неперіодична локально розв'язна й не локально нільпотентна група G має нормою розкладних підгруп групу

$$N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B,$$

де $|a| = p^n$, p — просте число, $n > 1$, B — не p -подільна абелева група без скруту рангу 1 і $[\langle a \rangle, B] = \langle a^{p^{n-1}} \rangle$, то G — група типу 2) при $p \neq 2$ і типу 3) при $p = 2$ теореми 4.6.3.

Доведення. Нехай норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної локально розв'язної не локально нільпотентної групи G є групою типу 2) теореми 4.6.1. Оскільки усі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d мішані, то з теореми 4.5.1 випливає, що таку ж властивість мають усі розкладні абелеві підгрупи групи G . Крім того, за наслідком 4.6.2 будь-які дві нескінченні циклічні підгрупи даної групи мають неединичний перетин.

Оскільки центр норми $Z(N_G^d) = \langle a^p, B^p \rangle$ є її характеристичною підгрупою, то підгрупа

$$B_1 = (Z(N_G^d))^{p^{n-1}} = B^{p^n}$$

є нормальною в G . При цьому $B_1 \neq B$, бо B — не p -подільна група.

Позначимо $C_1 = C_G(B_1)$. Тоді теореми 4.5.4 підгрупа C_1 не містить відмінних від одиниці q -елементів при $q \neq p$. Покажемо, що C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G .

Припустимо, що це не так і існує елемент $x \in G \setminus C_1$, такий що $|x| = \infty$. Тоді $[x, b] \neq 1$ і $\langle x \rangle \cap \langle b \rangle \neq E$ для деякого елемента $b \in B_1$. Отже, для деяких цілих чисел m та k маємо $x^m = b^k$. Нехай $x^{-1}bx = b_1, b_1 \in B_1$. Тоді $x^{-1}b^kx = b_1^k = b^k$, звідки $(bb_1^{-1})^k = 1, bb_1^{-1} = 1$ і $b_1 = b$, що суперечить вибору елемента x . Отже, C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G .

Далі будемо розглядати два випадки.

1. Нехай $p \neq 2$. Покажемо, що за цієї умови періодична частина $T(G)$ групи G збігається з $\langle a \rangle$. Припустимо, що це не так і G містить p -елементи, що не належать підгрупі $\langle a \rangle$. Нехай $g \in G$ — елемент найменшого порядку p^k з такою властивістю. Тоді $\langle a, g \rangle$ — p -група, що має єдину підгрупу порядку p . Оскільки $p \neq 2$, то група $\langle a, g \rangle$ циклічна, $k > 1$ і можна вважати, що $g^p = a$.

Розглянемо фактор-групу G/C_1 . Оскільки вона періодична й ізоморфна підгрупі групи автоморфізмів абелевої групи без скруту рангу 1, то $|G/C_1| \leq 2$ (див. [150], с. 294) і $g \in C_1$. З цього випливає, що підгрупа $\langle g \rangle \in N_G^d$ -допустимою. Але тоді група $G_1 = \langle g \rangle \rtimes B$ нільпотентна, бо $B_1 \subseteq Z(G_1)$, а G_1/B_1 — скінченна p -група.

Оскільки норма $N_{G_1}^d$ розкладних підгруп групи G_1 недедекіндова, то з теореми 4.6.2 випливає, що $G_1 = N_{G_1}^d$. Але у такому випадку

$$[B, \langle g^p \rangle] = [B, \langle a \rangle] = E,$$

що суперечить умові. Отже, у цьому випадку $\langle a \rangle$ — максимальна p -підгрупа групи G .

Припустимо, що існує такий елемент $x \in G$, що $|x| = q^k$, де q — просте число, $q \neq p, k \geq 1$. Якщо $q \neq 2$, то $x \in C_1$, що неможливо. Тому $|x| = 2^k$. Оскільки $x^2 \in C_1$, то $|x| = 2$. Розглянемо підгрупу

$$M = N_G^d \rtimes \langle x \rangle = (\langle a \rangle \rtimes B) \rtimes \langle x \rangle.$$

Оскільки $\langle x \rangle$ — максимальна абелева підгрупа в M , то x індукує на N_G^d регулярний автоморфізм порядку два.

Нехай c — довільний елемент з N_G^d і $xcsx = c_1$, де $c_1 \in N_G^d$. Тоді $xc_1x = c$ і $xsc_1x = c_1c$. З цього та з рівності $c_1^{-1}c_1cc_1 = cc_1$ випливає, що

$$xc_1^{-1}c_1cc_1x = xsc_1x = c_1c,$$

тобто c_1x переставний з c_1c . Але у такому випадку $c_1x \in C_M(c_1c)$. Якщо $c_1c \neq 1$, то враховуючи включення $C_M(c_1c) \subseteq N_G^d$, одержимо $x \in N_G^d$, що неможливо. Отже, $c_1c = 1$ і $c_1 = c^{-1}$.

Відомо, що група, яка допускає автоморфізм, який переводить кожен елемент групи в обернений, є абелевою, що неможливо у досліджуваному випадку. Тому G не містить інволюцій і $T(G) = \langle a \rangle$. Як зазначалось вище, фактор-група $G/\langle a \rangle$ є локально розв'язною групою без скруту, яка не містить розкладних абелевих підгруп, і в якій будь-які дві неодиначні підгрупи мають неодиначний перетин. З цього та з тверджень 4.1.1 і 4.1.5 випливає, що $G/\langle a \rangle$ — абелева група без скруту рангу 1.

Позначимо $C_2 = C_G(a_1)$, де $a_1 = a^{p^{n-1}}$. Оскільки $\langle a \rangle \subseteq C_2$ і за доведеним $G/\langle a \rangle$ — абелева група, то фактор-група $C_2/\langle a \rangle$ також абелева, звідки $C_2' \subseteq \langle a \rangle$. Далі з умов $\langle a_1 \rangle \subseteq Z(C_2)$ і $C_2 \supseteq N_G^d$ та леми 4.6.1 випливає, що C_2 нільпотентна і тому за теоремою 4.6.2 $C_2 = N_{C_2}^d$. Оскільки C_2 містить усі розкладні абелеві підгрупи групи G , то

$$C_2 = N_{C_2}^d = N_G^d = \langle a \rangle \rtimes B.$$

Отже,

$$G = C_2\langle y \rangle = (\langle a \rangle \rtimes B)\langle y \rangle,$$

де $|y| = \infty$, $[G : C_2] = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \mid (p-1)$, $k > 1$.

Оскільки з кожного елемента підгрупи $\langle a \rangle$ однозначно добувається корінь k -го степеня, де $k = [G : C_2]$, $(k, p) = 1$, то за теоремою 1 [37] із доповнюваності підгрупи $\langle a \rangle$ в C , випливає її доповнюваність у групі G ,

$$G = \langle a \rangle \rtimes H.$$

Оскільки фактор-група G/C_2 циклічна і

$$G/C_2 \cong G/\langle a \rangle / C_2/\langle a \rangle \cong H/B,$$

то $H/B \cong \langle \bar{y} \rangle$ — також циклічна група і $H = B\langle y \rangle$, де y — прообраз елемента \bar{y} , $y^k \in B$. Отже,

$$G = \langle a \rangle \rtimes B\langle y \rangle,$$

де $y^k \in B$, $k \mid (p-1)$, $k > 1$. Враховуючи, що група G не нільпотентна, з умови $G' \subseteq \langle a \rangle$ та леми 4.6.1 випливає, що $G' = \langle a \rangle$ і $[y, a] = a^m$, де $(m, p) = 1$. Отже, у цьому випадку G є групою типу 2) теореми 4.6.3.

2. Нехай тепер $p = 2$. Нехай тепер $p = 2$. Припустимо, що періодична частина $T(G)$ групи G збігається з $\langle a \rangle$. Оскільки фактор-група $G/\langle a \rangle$ є локально розв'язною групою без скруту й без розкладних підгруп, в якій кожна пара нескінченних циклічних підгруп має неединичний перетин, то з тверджень 4.1.1 та 4.1.5 випливає, що $G/\langle a \rangle$ — абелева група без скруту рангу 1. Тому $G' \subseteq \langle a \rangle$ і за наслідком 4.6.4 група G нільпотентна, що суперечить умові.

Отже, G містить елементи скінченного порядку, що не належать підгрупі $\langle a \rangle$. Враховуючи, що $a^{2^{n-1}} \in Z(G)$, з теореми 4.5.2 випливає, що G не містить відмінних від одиниці елементів непарного порядку. Тому елементи скінченного порядку є 2-елементами.

У множині $G \setminus \langle a \rangle$ виберемо елемент g найменшого порядку, $|g| = 2^k$. Оскільки $a^{2^{n-1}}$ — єдина інволюція групи, то $k > 1$, $g^2 \in \langle a \rangle$ і $\langle a, g \rangle$ — циклічна або кватерніонна 2-група.

Нехай $\langle a, g \rangle$ — циклічна 2-група. Тоді можна вважати, що $g^2 = a$ і $\langle a, g \rangle = \langle g \rangle$. Якщо $g \in C_1 = C_G(B_1)$, то підгрупа $\langle g \rangle \in N_G^d$ -допустимою. За наслідком 4.6.4 група $G_1 = \langle g \rangle \rtimes B$ нільпотентна і тому за теоремою 4.6.2

$$G_1 = N_{G_1}^d.$$

Тоді $G'_1 = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ і для довільного елемента $b \in B$ має місце співвідношення

$$[g^2, b] = [g, b]^2 = 1.$$

Але у такому випадку $[a, b] = 1$, що неможливо за умовою.

Отже, у цьому випадку $g \notin C_1$ і елемент g непереставний з жодним елементом нескінченного порядку. Оскільки C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G , а фактор-група G/C_1 ізоморфна підгрупі групи автоморфізмів абелевої групи без скруту рангу 1, періодична частина якої має порядок 2 (див. [150], стор.224), то

$$G = C_1 \langle g \rangle,$$

де $g^2 \in \langle a \rangle \subseteq C_1$.

Нехай тепер $\langle a, g \rangle$ — кватерніонна 2-група. Тоді $g^2 = a^{2^{n-1}} = a_1$, $|g| = 4$ і $g^{-1}ag = a^{-1}$. Припустимо, що $g \in C_1 = C_G(B_1)$. Тоді $\langle g \rangle \in N_G^d$ -допустима підгрупа і

$$[a, g] \in \langle a \rangle \cap \langle g \rangle = \langle a_1 \rangle.$$

Але у такому випадку $|a| = 4$ і $\langle a, g \rangle$ — група кватерніонів порядку 8.

Розглянемо групу

$$G_2 = \langle a, g \rangle \rtimes B.$$

Враховуючи, що підгрупи $\langle a \rangle$ та $\langle g \rangle \in N_G^d$ -допустимими, нормальний ряд

$$1 \triangleleft \langle a^2 \rangle \triangleleft \langle a \rangle \triangleleft \langle a, g \rangle \triangleleft G_2$$

є центральним і група G_2 нільпотентна. За теоремами 4.6.1 та 4.6.2

$$G_2 = N_{G_2}^d = \langle a, g \rangle \times B$$

і тому $[\langle a \rangle, B] = E$, що суперечить умові. Отже, і у цьому випадку $g \notin C_1$ і

$$G = C_1 \langle g \rangle,$$

де $|g| = 4$, $g^2 = a^{2^{n-1}}$ і $g^{-1}ag = a^{-1}$.

Оскільки фактор-група C_1/B_1 локально скінченна, то з твердження 3.9 [154] випливає, що усі елементи скінченного порядку групи C_1 утворюють нормальну підгрупу $T(C_1)$, а фактор-група $C_1/T(C_1)$ — абелева без скруту рангу 1. Враховуючи наведені вище міркування, приходимо до висновку, що $T(C_1) = \langle a \rangle$. Тоді за наслідком 1.3 група C_1 нільпотентна і застосовуючи до неї теорему 4.6.2, одержимо

$$C_1 = N_{C_1}^d = \langle a \rangle \rtimes H,$$

де H — абелева група без скруту рангу 1, $[\langle a \rangle, H] = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$.

Оскільки C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G і кожна розкладна абелева підгрупа групи G є мішаною, то C_1 містить усі розкладні абелеві підгрупи групи G і вони нормальні в C_1 . Тому

$$N_G^d = N_{C_1}^d = C_1$$

і

$$G = (\langle a \rangle \rtimes B) \langle g \rangle, g^2 \in \langle a \rangle,$$

причому або $\langle g^2 \rangle = \langle a \rangle$, або $\langle a, g \rangle$ — кватерніонна 2-група порядку $2^{n+1} \geq 8$.

Розглянемо фактор-групу

$$\bar{G} = G/\langle a \rangle \cong \bar{B} \rtimes \langle \bar{g} \rangle, |\bar{g}| = 2.$$

Оскільки $\bar{N}_G^d = \bar{B} \triangleleft \bar{G}$, то $\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{g} = \bar{b}_1$, де $\bar{b}, \bar{b}_1 \in \bar{B}$. Якщо існує такий елемент $\bar{b} \neq \bar{1}$, що $\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{g} = \bar{b}$, то $g^{-1}bg = ba^r$, де $r \in \mathbb{Z}$ і $|gb| = \infty$. Але тоді $gb \in C_1$ і $g \in C_1$, що суперечить його вибору. Отже,

$$\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{g} = \bar{b}_1 \neq \bar{b}.$$

Тоді $\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{b}_1\bar{g} = \bar{b}\bar{b}_1 = \bar{b}_1\bar{b}$, звідки $\bar{b}\bar{b}_1 = \bar{1}$ і $\bar{b}_1 = \bar{b}^{-1}$. Повертаючись до прообразів, маємо

$$g^{-1}bg = b^{-1}a^r.$$

Нехай $\langle a, g \rangle$ — циклічна група, $g^2 = a$ і $|a| = 2^n \geq 4$. Тоді з рівності

$$[g^2, b] = [a, b] = a^{2^{n-1}},$$

де b — непереставний з a елемент групи B , випливає, що $r = 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ і

$$g^{-1}bg = b^{-1}a^{1+2k}.$$

Припустимо, що $|a| > 4$. Тоді $|gba^{-1-k+2^{n-2}t}| = 2$, де $b \in B$, $[a, b] \neq 1$, а цілі числа k і t мають однакову парність. Отже, група G містить інволюцію $gba^{-1-k+2^{n-2}t}$, відмінну від $a_1 = a^{2^{n-1}}$, що неможливо.

Тому $|a| = 4$ і $g^{-1}bg = b^{-1}a$ або $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$, що є непереставним з a . Якщо $g^{-1}bg = b^{-1}a$, то $|gb| = 2$, що неможливо. Отже, $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$, де $b \in B$ і $[a, b] \neq 1$. За цих умов для елемента $b^2 \in C_G(a)$ маємо

$$g^{-1}b^2g = (b^{-1}a^{-1})^2 = ab^{-2}a^{-1} = b^{-2}.$$

Отже, у цьому випадку G — група типу 3) теореми 4.6.3. Зазначимо, що група G містить підгрупу кватерніонів $\langle a, bg \rangle$ порядку 8.

Нехай тепер $\langle a, g \rangle$ — кватерніонна 2-група порядку $2^{n+1} \geq 8$. Якщо $|a| > 4$, то з умов $g^{-1}bg = b^{-1}a^r$ і $g^2 \in Z(G)$ випливає, що $r = 2^{n-1}k$, де $k \in \{0, 1\}$. Тоді $g^{-1}bg = b^{-1}a_1^k$ і, як неважко переконатись, $|bg| = 2$ при $k = 0$ та $|abg| = 2$ при $k = 1$. Отже, група G містить інволюції, відмінні від a_1 , що неможливо. Тому $|a| = 4$.

Нехай b — довільний елемент групи B такий, що $[a, b] = a^2$. Тоді $g^{-1}bg = b^{-1}a$ або $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$. Оскільки $[a, bg] = 1$ і $\langle (bg)^2 \rangle = \langle a \rangle$, то $\langle a, bg \rangle = \langle bg \rangle$ — циклічна 2-група порядку 8 і знову приходимо до групи типу 3) теореми 4.6.3. Лему доведено. \square

Теорему доведено. \square

Наслідок 4.6.5. *Неперіодична локально розв'язна група G , що має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, є циклічним розширенням цієї норми.*

Наслідок 4.6.6. *Будь-яка неперіодична локально розв'язна група G , яка містить інволюцію та має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, містить групу кватерніонів порядку 8.*

Приклад 4.6.1 разом з прикладами 4.6.2 — 4.6.3 підтверджують існування неперіодичних груп, в яких норма N_G^d розкладних підгруп є групою одного з типів 2) або 3) теореми 4.6.3.

Приклад 4.6.2. $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 27$, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^8$.

У даному випадку G — група типу 2) теореми 4.6.3. При цьому

$$G' = \langle a \rangle, Z(G) = \langle b^6 \rangle,$$

а усі розкладні абелеві підгрупи групи G є групами виду

$$\langle a^{3k}, a^m b^{2n} \rangle,$$

$k = 1, 2, m \in Z, n \in N$ та нормальні у підгрупі $\langle a, b^2 \rangle$. Тому

$$N_G^d = \langle a, b^2 \rangle = \langle a \rangle \rtimes \langle b^2 \rangle.$$

Приклад 4.6.3. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \langle g \rangle$, $|a| = 4$, $|b| = \infty$, $g^2 = a$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$.

Маємо групу типу 3) теореми 4.6.3. Оскільки усі розкладні абелеві підгрупи групи G мішані й нормальні у підгрупі $\langle a, b \rangle$, а елемент g не належить нормалізатору підгрупи $\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle$, то

$$N_G^d = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle.$$

4.7 Про взаємозв'язки між нормами абелевих нециклічних та розкладних підгруп у неперіодичних локально розв'язних групах

Розглянемо взаємозв'язки між нормами розкладних та абелевих нециклічних підгруп у класі неперіодичних локально розв'язних груп.

Очевидно, що якщо в неперіодичній групі G множина абелевих нециклічних і розкладних підгруп збігаються, то збігаються і відповідні норми. З іншого боку, з рівності вказаних норм не слідує рівність множин абелевих нециклічних і розкладних підгруп.

Приклад 4.7.1. Розглянемо ІН-групу С. М. Чернікова ([153], с.176)

$$G = A \rtimes \langle b \rangle,$$

де $A \supseteq A_1 \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$ і A_1 — нециклічна підгрупа без скруту рангу 1, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $|c_1| = p$, $|c_2| = q$, p і q — різні прості непарні числа.

У цій групі підгрупа A_1 нерозкладна нециклічна, а підгрупа $\langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$ — розкладна циклічна. В той же час,

$$N_G^d = N_G^A = G.$$

Наступні приклади показують, що в неперіодичній локально розв'язній групі можливі включення $N_G^d \subset N_G^A$ або $N_G^A \subset N_G^d$.

Приклад 4.7.2. $G = (((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_6 \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle d \rangle$, де $|a_i| = \infty$, $i = 1 \div 6$, $|b| = 7$, $|c| = 3$, $|d| = 4$, $b^{-1}a_i b = a_{i+1}$, $i = 1 \div 5$, $b^{-1}a_6 b = a_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_6^{-1}$, $c^{-1}a_1 c = a_2$, $c^{-1}a_2 c = a_1^{-1}a_2^{-1}$, $c^{-1}a_3 c = a_4$, $c^{-1}a_4 c = a_3^{-1}a_4^{-1}$, $c^{-1}a_5 c = a_6$, $c^{-1}a_6 c = a_5^{-1}a_6^{-1}$, $c^{-1}b c = b^2$, $d^{-1}a_i d = a_i^{-1}$, $i = 1 \div 6$, $[b, d] = [c, d] = 1$.

У цій групі

$$N_G^A = \langle a_1, a_2, \dots, a_6, d \rangle.$$

Оскільки $a_i^n \notin N_G(\langle b, d \rangle)$ для $i = 1 \div 6$, $b \notin N_G(\langle a_i, d^2 \rangle)$, $c \notin N_G(\langle a_i, d^2 \rangle)$ і $d \notin N_G(\langle a_1 b, d^2 \rangle)$, то

$$N_G^d = \langle d^2 \rangle = Z(G)$$

і $N_G^d \subset N_G^A$.

Приклад 4.7.3. $G = \langle a \rangle \rtimes B$, де $|a| = p$ — просте число ($p \neq 2$), B — неповна абелева нециклічна підгрупа без скруту рангу 1 і $G' = \langle a \rangle$.

У цій групі $N_G^d = G$. Оскільки $a \notin N_G(B)$, то $N_G^A \subset N_G^d$ і $N_G^A \neq N_G^d$.

Лема 4.7.1. Якщо норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної групи G недедекіндова і всі її розкладні абелеві підгрупи мішані, то

$$N_G^A \subseteq N_G^d,$$

причому можливий випадок $N_G^A \neq N_G^d$.

Доведення. За теоремою 4.5.1 кожна розкладна абелева підгрупа групи G є мішаною. Отже, має місце включення $N_G^A \subseteq N_G^d$. Прикладом групи, в якій $N_G^A \neq N_G^d$, є група з прикладу 4.7.3. \square

Теорема 4.7.1. Якщо норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної локально розв'язної групи G локально нільпотентна і недедекіндова, то $N_G^A \subseteq N_G^d$, причому мають місце обидва випадки $N_G^A \subset N_G^d$ та $N_G^A = N_G^d$.

Доведення. За теоремою 4.6.1 норма N_G^d є неперіодичною групою одного з типів 1) або 2) цієї теореми. В обох випадках всі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d є мішаними. Враховуючи теорему 4.5.1 приходимо до висновку, що всі розкладні абелеві підгрупи групи G також будуть мішаними, і тому нециклічними. Отже, має місце включення

$$N_G^A \subseteq N_G^d.$$

Включення буде строгим, наприклад, у випадку

$$G = N_G^d = Q \times B,$$

де $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, а група B ізоморфна адитивній групі раціональних чисел. Підгрупа B містить нескінченну послідовність підгруп

$$\langle b_1 \rangle \subset \langle b_2 \rangle \subset \dots \langle b_n \rangle \subset \dots,$$

де $|b_1| = \infty$, $b_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = b_n$ і $(\alpha_{n+1}, 2) = 1$ для $n = 1, 2, \dots$

Неважко показати, що ізолятор ([110], с. 411) підгрупи $\langle q_1 b_1 \rangle$ нециклічний, оскільки з елемента q_1 видобувається корінь довільного непарного степеня. При цьому $A \not\trianglelefteq G$, оскільки

$$[q_2, A] = [q_2, q_1] \notin A.$$

Отже,

$$N_G^A = \langle q_1^2 \rangle \times B = Z(G) \neq N_G^d = G.$$

Якщо

$$G = N_G^d = Q \times B,$$

де $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8 і B — група, ізоморфна адитивній групі двійкових дробів або нескінченна циклічна група, то в G нормальні всі розкладні підгрупи і всі абелеві нециклічні підгрупи. Отже, в цьому випадку $N_G^A = N_G^d$. \square

Лема 4.7.2. *Якщо в локально розв'язній неперіодичній групі G виконуються умови $N_G^A \not\subseteq N_G^d$ і $N_G^d \not\subseteq N_G^A$, то її норма N_G^d розкладних підгруп дедекіндова.*

Доведення. Нехай в локально розв'язній неперіодичній групі G норми N_G^A і N_G^d задовольняють умовам леми. Тоді G містить абелеву нециклічну нерозкладну підгрупу B , яка не є N_G^d -допустимою, і непримарну циклічну підгрупу $\langle c \rangle$, яка не є N_G^A -допустимою. Очевидно, що в такому випадку B є або квазіциклічною групою, або локально циклічною групою без скруту рангу 1.

Покажемо, що в такій групі норма N_G^d розкладних підгруп дедекіндова. Якщо N_G^d — неперіодична група, то враховуючи, що підгрупа $\langle c \rangle \in N_G^d$ -допустимою, робимо висновок, що існує елемент x нескінченного порядку, який належить централізатору $C_G(c)$. Тоді абелева підгрупа $\langle c, x \rangle$, а разом з нею і її характеристична підгрупа $\langle c \rangle \in N_G^A$ -допустимими, що суперечить вибору $\langle c \rangle$. Отже, N_G^d — періодична локально розв'язна група. Якщо при цьому $|N_G^d| < \infty$, то N_G^d дедекіндова за лемою 4.1.1.

Нехай N_G^d — нескінченна періодична група. Припустимо, що N_G^d не задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Тоді в групі $N_G^d \cap C_G(c)$ можна виділити такі абелеві нециклічні підгрупи A_1 і A_2 , що

$$(A_1 \cup A_2) \cap \langle c \rangle = E.$$

Але в такому випадку підгрупа

$$\langle A_2, c \rangle \cap \langle A_1, c \rangle = \langle c \rangle$$

буде N_G^A -допустимою, що суперечить її вибору. Отже, N_G^d — група з умовою мінімальності для абелевих підгруп. За лемою 4.5.1 і у цьому випадку норма N_G^d дедекіндова. \square

Теорема 4.7.2. *Якщо в неперіодичній локально розв'язній групі G хоча б одна з норм N_G^A або N_G^d недедекіндова і норма N_G^d нескінченна, то має місце одне з включень $N_G^A \subseteq N_G^d$ або $N_G^d \subseteq N_G^A$.*

Доведення. Якщо норма N_G^d розкладних підгруп групи G недедекіндова, то твердження теореми слідує з леми 4.7.2. Тому в подальшому будемо вважати, що N_G^d — дедекіндова група, а недедекіндовою є норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G . Неважко показати, що в такому випадку норма N_G^A нескінченна.

Припустимо, що за цих умов $N_G^A \not\subseteq N_G^d$ і $N_G^d \not\subseteq N_G^A$. Оскільки норма N_G^d нескінченна, то з доведення леми 4.7.2 слідує, що вона дедекіндова і задовольняє умову мінімальності. Отже, N_G^d є скінченим розширенням повної підгрупи P . З припущення випливає також, що група G містить непримарну циклічну підгрупу $\langle c \rangle$, яка не є N_G^A -допустимою, і абелеву нециклічну нерозкладну підгрупу B , яка не є N_G^d -допустимою. При цьому B є або квазіциклічною групою, або локально циклічною групою без скруту рангу 1.

Далі розглянемо окремо кожен із вказаних вище випадків для підгрупи B .

1. Нехай B — квазіциклічна підгрупа. Покажемо, що в цьому випадку вона є максимальною абелевою підгрупою групи G . Дійсно, в іншому випадку в G знайдеться неединична підгрупа $\langle g \rangle$ така, що

$$B \cap \langle g \rangle = E, [B, \langle g \rangle] = E.$$

Тоді підгрупа $B \times \langle g \rangle$ буде N_G^d -допустимою. При цьому, якщо $|g| = \infty$, то N_G^d -допустимою буде і підгрупа B як характеристична підгрупа групи $B \times \langle g \rangle$, що суперечить її вибору. Якщо $|g| < \infty$, то підгрупа

$$\langle B, g \rangle^{|g|} = B$$

також буде N_G^d -допустимою. Отже, B — максимальна абелева підгрупа групи G і $B \triangleleft G$.

Застосовуючи наслідок 1.3 [153] до групи

$$G_1 = BN_G^d$$

і враховуючи, що N_G^d є скінченним розширенням повної підгрупи P , робимо висновок, що G_1 — група з умовою мінімальності для абелевих підгруп. Оскільки B — максимальна абелева підгрупа, то

$$B = P \triangleleft N_G^d,$$

що суперечить вибору B . Отже, B не може бути квазіциклічною групою.

2. Розглянемо тепер випадок, коли B — локально циклічна група без скруту рангу 1.

Оскільки підгрупа $\langle c \rangle$ непримарна і не є N_G^A -допустимою, то хоча б одна з її силовських підгруп також не буде N_G^A -допустимою. Нехай такою буде підгрупа $\langle c \rangle_p$, де p — просте число. Якщо $p \notin \pi(P)$ або P непримарна, то в P можна виділити квазіциклічну q -підгрупу P_1 , де $q \neq p$,

$$\langle c \rangle_p P_1 = \langle c \rangle_p \times P_1$$

і $\langle c \rangle_p$ — N_G^A -допустима підгрупа, що суперечить її вибору. Отже, $\langle c \rangle_p P$ — p -група.

Якщо $\langle c \rangle_p \subset P$, то $\langle c \rangle_p$ — підгрупа деякої квазіциклічної p -групи, і тому вона також буде N_G^A -допустимою, що неможливо. Нехай $\langle c \rangle_p \not\subset P$. Якщо повна p -група P не є квазіциклічною, то $\langle c \rangle_p P$ містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3 . У цьому випадку існує підгрупа $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ порядку p^2 така, що

$$\langle c \rangle_p \cap \langle a_1, a_2 \rangle = E.$$

Тоді підгрупа

$$(\langle a_1 \rangle \times \langle c \rangle_p) \cap (\langle a_2 \rangle \times \langle c \rangle_p) = \langle c \rangle_p$$

буде N_G^A -допустимою, що суперечить її вибору. Отже, P — квазіциклічна p -група і існує такий елемент $a \in \langle c \rangle_p P$ порядку p , що підгрупа $\langle a \rangle \times \langle c \rangle_p$ буде N_G^A -допустимою.

Якщо при цьому підгрупа N_G^A неперіодична, то існує такий елемент $x \in N_G^A$, що $|x| = \infty$ і $[\langle x \rangle, \langle c \rangle_p] = E$. Отже, підгрупа $\langle x \rangle \times \langle c \rangle_p$, а, значить, і підгрупа $\langle c \rangle_p$, є N_G^A -допустимими. Знову отримуємо протиріччя. Норми N_G^A — періодична група. Тоді в групі

$$N_G^A B = N_G^A \times B$$

нормальною буде кожна підгрупа норми N_G^A , отже, N_G^A дедекіндова, що суперечить умові. \square

Як показують наступні приклади, умова нескінченності норми N_G^d в теоремі 4.7.2 є істотною.

Приклад 4.7.4. $G = (\langle a \rangle \rtimes B) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = p$ — просте число ($p \neq 2$), B — група, ізоморфна адитивній групі q -ових дробів, $q \notin \{2, p\}$, $B = B_1 \langle x \rangle$,

$x^2 \in B_1$, $x^{-1}ax = a^{-1}$, $[B_1, \langle a \rangle] = E$, $|c| = 2$, $[c, a] = 1$, $c^{-1}bc = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

У цій групі всі періодичні розкладні підгрупи мають порядок $2p$ і є групами виду $\langle a^m cb_1^k \rangle$, де $b_1 \in B_1$, $k \in \{0, 1\}$, $(m, p) = 1$. Відповідно, усі неперіодичні розкладні підгрупи є мішаними, містяться в групі $B_1 \times \langle a \rangle$ і тому є нормальними в G . Оскільки

$$N_G(\langle a^m cb_1^k \rangle) = \langle a^m cb_1^k \rangle,$$

то $N_G^d = \langle a \rangle$.

Знайдемо тепер норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G . Очевидно, що G не містить періодичні абелеві нециклічні підгрупи, а всі мішані абелеві підгрупи містять $\langle a \rangle$ і є підгрупами групи $(B_1 \times \langle a \rangle)$. Легко переконатися, що всі вони нормальні в G .

Далі, усі абелеві нециклічні підгрупи рангу 1 або містяться в підгрупі B , або в спряжених їй підгрупах $g^{-1}Bg$, $g \in G$, або в групі $(B_1 \times \langle a \rangle)$. Розглянемо нескінченну послідовність підгруп в B_1 :

$$\langle b_1 \rangle \subset \langle b_2 \rangle \subset \dots \langle b_n \rangle \subset \dots,$$

$$|b_1| = \infty, b_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = b_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{N}, (\alpha_{n+1}, p) = 1 \text{ для } n = 1, 2, \dots$$

Неважко показати, що ізолятор підгрупи $\langle ab_1 \rangle$ нециклічний, оскільки з елемента a видобувається корінь довільного степеня, взаємно простий з p . При цьому $N_G(A) = \langle a, B_1 \rangle$. Враховуючи, що

$$N_G(B) = B \rtimes \langle c \rangle,$$

отримаємо, $N_G^A = B_1$ і $N_G^d \cap N_G^A = E$.

Приклад 4.7.5. $G = (\langle a \rangle \rtimes B) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = p$ — просте число ($p \neq 2$), B — група, ізоморфна адитивній групі p -ових дробів, $B = B_1 \langle x \rangle$, $x^2 \in B_1$, $x^{-1}ax = a^{-1}$, $[B_1, \langle a \rangle] = E$, $|c| = 2$, $[c, a] = 1$, $c^{-1}bc = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

Як і у попередньому прикладі норма розкладних підгруп цієї групи абелева

$$N_G^d = \langle a \rangle.$$

При цьому, норма абелевих нециклічних підгруп

$$N_G^A = (B_1 \rtimes \langle c \rangle).$$

Це слідує з того, що для довільного неединичного елемента $y_1 \in B_1$ ізолятор підгрупи $\langle ay_1 \rangle$ циклічний, і тому елемент c нормалізує довільну абелеву нециклічну підгрупу групи G . В цьому випадку норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і знову

$$N_G^d \cap N_G^A = E.$$

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$A \times B$ — прямий добуток підгруп A і B

$A \rtimes B$ — напівпрямий добуток підгруп A і B , у якому підгрупа A нормальна

$C_G(A)$ — централізатор підгрупи A у групі G

E — одинична підгрупа

$|G|$ — порядок групи G

$|G| < \infty$ — група G скінченна

$|G| = \infty$ — група G нескінченна

$G' = [G, G]$ — комутант групи G

G_p — силовська p -підгрупа групи G

$G_{p'}$ — силовська p' -підгрупа групи G

$[G : H]$ — індекс підгрупи H у групі G

$[G : H] < \infty$ — підгрупа H має скінченний індекс у групі G

$H \triangleleft G$ — підгрупа H нормальна в групі G

$H \not\triangleleft G$ — підгрупа H не нормальна в групі G

$N_G(A)$ — нормалізатор підгрупи A у групі G

p -елемент — елемент, порядок якого є степенем простого числа p

$|x|$ — порядок елемента x

$|x| < \infty$ — елемент x має скінченний порядок

$|x| = \infty$ — елемент x має нескінченний порядок

$\langle x \rangle$ — циклічна підгрупа з твірним елементом x

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — комутатор елементів x та y

$[X, Y]$ — підгрупа, породжена всіма комутаторами виду $[x, y]$, де $x \in X$, $y \in Y$

$Z(G)$ — центр групи G

$\pi(G)$ — множина простих дільників порядків елементів групи G

$\omega(G)$ — нижній шар p -групи G — підгрупа, породжена всіма елементами порядку p групи G

$\omega_m(G)$ — m -шар p -групи G — підгрупа, породжена всіма елементами групи G , порядок яких не перевищує p^m

di -група — неабелева група, усі розкладні підгрупи якої або є нормальними, або система таких підгруп порожня

IH -група — нескінченна неабелева група, в якій множина нескінченних абелевих підгруп непорожня і складається лише з нормальних підгруп

INH -група — нескінченна неабелева група, в якій кожна нескінченна підгрупа нормальна

\overline{H} -група — нециклічна неабелева група, усі нециклічні підгрупи якої нормальні

\overline{H}_p -група — \overline{H} -група, яка є p -групою

\overline{HA} -група — неабелева група, в якій множина абелевих нециклічних підгруп непорожня і складається лише з нормальних підгруп

\overline{HA}_p -група — \overline{HA} -група, яка є p -групою

$C(G)$ — норма централізаторів — перетин нормалізаторів централізаторів групи G

$CS(G)$ — норма всіх підгруп комутанта групи — перетин нормалізаторів всіх підгруп комутанта групи G

$D(G)$ — норма комутантів усіх підгруп — перетин нормалізаторів комутантів усіх підгруп скінченної групи G

$D^{\mathfrak{F}}(G)$ — норма \mathfrak{F} -резидуалів $G^{\mathfrak{F}}$ всіх підгруп — перетин нормалізаторів \mathfrak{F} -резидуалів $G^{\mathfrak{F}}$ всіх підгруп групи G

$H(G)$ — гіперцентр групи G — перетин нормалізаторів усіх силовських підгруп групи G

I_G^A — інваріатор підгрупи A в групі G — перетин нормалізаторів в G усіх підгруп групи A

$IW(G)$ — узагальнена підгрупа Віландта — перетин нормалізаторів усіх нескінченних субнормальних підгруп групи G

$\ker(G : H)$ — H -норма групи G — підгрупа, що складається з усіх елементів таких, що нормалізують кожну підгрупу X з G , що містить H

$kC(G)$ — C -норма скінченної групи G — перетин нормалізаторів всіх підгруп групи G , які не входять до класу C

$M(G)$ — метанорма — перетин нормалізаторів усіх неабелевих підгруп групи G

$N(G)$ — норма групи G — перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G

$N_A(G)$ — A -норма скінченної групи G — перетин нормалізаторів усіх максимальних абелевих підгруп групи G

$N_E(G)$ — E -норма групи G — перетин нормалізаторів усіх максимальних підгруп групи із заданою теоретико-груповою властивістю E

$N^*(G)$ — неабелева норма — перетин нормалізаторів усіх неабелевих

підгруп групи G

$N_G(\infty)$ — норма нескінченних підгруп нескінченної групи G — перетин нормалізаторів усіх нескінченних підгруп групи G

$N_G(A_\infty)$ — норма нескінченних абелевих підгруп нескінченної групи G — перетин нормалізаторів усіх нескінченних абелевих підгруп групи G

$N_G(C_\infty)$ — норма нескінченних циклічних підгруп групи G — перетин нормалізаторів усіх нескінченних циклічних підгруп неперіодичної групи G

$N_G(C_{\bar{p}})$ — норма циклічних підгруп простих порядків групи G — перетин нормалізаторів усіх циклічних підгруп групи G , що мають складений або нескінченний порядок

N_G — нециклічна норма групи G — перетин нормалізаторів усіх нециклічних підгруп групи (за умови, що система таких підгруп у групі непорожня)

N_G^A — норма абелевих нециклічних підгруп групи G — перетин нормалізаторів усіх абелевих нециклічних підгруп групи G за умови, що система таких підгруп у групі непорожня

$N_\pi(G)$ — π -розкладна норма скінченної групи G — перетин нормалізаторів π -розкладних резидуалів всіх підгруп скінченної групи G

$N_{\pi sp}(G)$ — π -спеціальна норма скінченної групи G — перетин нормалізаторів π -спеціальних резидуалів усіх підгруп групи G

$N_{\mathfrak{h}\mathfrak{F}}(G)$ — $\mathfrak{h}\mathfrak{F}$ -норма групи G — перетин нормалізаторів добутків \mathfrak{F} -резидуалів всіх підгруп групи G та \mathfrak{h} -радикала групи G

N_G^d — норма розкладних підгруп групи G — перетин нормалізаторів всіх розкладних підгруп групи G

$N_\Sigma(G)$ — Σ -норма групи G — перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G , що належать системі Σ

$Norm_G(B)$ — норма підпростору B в групі G — перетин нормалізаторів усіх F -підпросторів в B

$P(G)$ — пронорма групи G — множина всіх елементів групи G , що пронормалізують кожну підгрупу групи

$R(G)$ — конорма групи G — підгрупа, породжена всіма власними нормалізаторами групи G

$S(G)$ — норма нільпотентних резидуалів всіх підгруп простого порядку — перетин нормалізаторів нільпотентних резидуалів всіх підгруп простого порядку групи G

$U_m(G)$ — m -підгрупа Віландта групи G — перетин нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи G з дефектом не більше m для цілого $m \geq 1$

$W(G)$ — підгрупа Віландта — перетин нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи G

$W^*(G)$ — норма несубнормальних підгруп — перетин нормалізаторів несуб-

нормальних підгруп групи G

$\bar{W}(G)$ — сильна підгрупа Віланда — перетин централізаторів нільпотентних субнормальних фактор-груп групи G

$W_N(G)$ — узагальнена N -підгрупа Віланда — перетин нормалізаторів усіх субнормальних підгруп з N

$W^p(G)$ — локальна підгрупа Віланда — перетин нормалізаторів усіх p' -досконалих субнормальних підгруп групи G

$\Delta(G)$ — підгрупа Гашюца — перетин нормалізаторів усіх максимальних підгруп групи G

$\theta^A(G)$ — норма комутантів усіх несубнормальних підгруп — перетин нормалізаторів комутантів усіх несубнормальних підгруп скінченної групи G

$\omega^A(G)$ — норма комутантів усіх субнормальних підгруп — перетин нормалізаторів комутантів усіх субнормальних підгруп скінченної групи G

бінарно ступінчата група — група, в якій кожна підгрупа з двома твірними елементами локально ступінчата

гамільтонова група — неабелева група, всі підгрупи якої нормальні

група Фробеніуса — група G , яку можна подати у вигляді напівпрямого добутку $G = A \rtimes B$, де $a^{-1}Ba \cap B = E$ для будь-якого елемента $a \in G \setminus B$ і $A \setminus E = G \setminus \bigcup_{a \in G} (a^{-1}Ba)$

група Чернікова — група, яка є скінченим розширенням прямого добутку скінченного числа (у тому числі рівного нулю) квазіциклічних підгруп

дедекіндова група — абелева або гамільтонова група

інволюція — елемент порядку 2

кватерніонна 2-група — група виду $G = A\langle b \rangle$, де A — локально циклічна 2-група, або циклічна група порядку 2^n , $n \geq 4$, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in A$

комутаторна сходи́на елемента x — послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ різних елементів групи, для яких $[a_1, x] = 1$, $[a_{n+1}, x] = a_n$ при $n \geq 1$

локально ступінчата група — група, в якій кожна неединична скінченно породжена підгрупа містить власну підгрупу скінченного індекса

майже дедекіндова група — недедекіндова група, в якій множина циклічних підгруп простих порядків непорожня і складається лише з нормальних підгруп

метациклічна група — група, яка є циклічним розширенням циклічної підгрупи

розкладна підгрупа — підгрупа, що розкладається у прямий добуток двох нетривіальних множників

ЛИТЕРАТУРА

1. Amin, F., Ali, A., Arif, M. *On Generalized Wielandt Subgroup*, World Applied Sciences Journal, N.30(12), 2014, pp. 1939-1946.
2. Baer, R. *Almost Hamiltonian groups*, Compositio Math, N.6, 1939, pp. 382-406.
3. Baer, R. *Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe*, Comp. Math, N.1, 1934, pp. 254-283.
4. Baer, R. *Groups with preassigned central and central quotient group*, Transactions of the American Mathematical Society, N.44, 1938, pp. 387-412.
5. Baer, R. *Group Elements of Prime Power Index*, Trans. Amer. Math. Soc., N.75(1), 1953, pp. 20-47.
6. Baer, R. *Gruppen mit hamiltonschen Kern*, Compositio Math, N.2, 1935, pp. 241-246.
7. Baer, R. *Gruppen mit vom Zentrum wesentlich verschiedenem Kern und abelsche Factorgruppe nach dem kern*, Compositio Math, N.4, 1937, pp. 1-77.
8. Baer, R. *Groups with abelian norm quotient group*, Amer. J. Math, N.61, 1939, pp. 700-708.
9. Baer, R. *Nilpotent groups and their generalizations*, Trans. Amer. Math. Soc, N.47, 1940, pp. 393-434.
10. Baer, R. *Norm and hypernorm*, Publ. Math, N.4, 1956, pp. 347-350.
11. Baer, R. *Situation der Untergruppen und Structur der Gruppe*, S.-B. Heidelberg.Akad, N.2, 1933, pp. 12-17.
12. Baer, R. *Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung*, Compositio Math, N.2, 1935, pp. 247-249.

13. Ballester-Bolinches, A., Cossey, J., Zhang, L. *Generalised norms in finite soluble groups*, Journal of Algebra, N.402(15), 2014, pp. 392-405.
14. Beidleman, J. C., Heineken, H., Newell, M. *Centre and norm*, Bull. Austral. Math. Soc., N.69, 2004, pp. 457-464.
15. Beidleman, J. C., Dixon, M. R., Robinson, D. J. S. *The generalized Wielandt subgroup of a group*, Canad. J. Math., N.47, 2, 1995, pp. 246-261.
16. Beidleman, J. C., Dixon, M. R., Robinson, D. J. S. *The Wielandt Subgroup*, In: *Infinite Groups 94*, Berlin-New-Jork, 1995, pp. 23-40.
17. Bell, H., Guzman, F., Kappe, L.-C. *Ring analogues of Baer's norm and P.Hall's margins*, Arch. Math., N.55, 1990, pp. 342-354.
18. Berkovich, Ya. *Alternate proof of the Reinold Baer theorem on 2-groups with nonabelian norm*, Glasnik Matematicki, N.47(1), 2012, pp. 149-152.
19. Blackburn, N. *Generalization of certain elementary theorems on p-groups*, Proc. London Math. Soc., XI, 41, 1961, pp. 1-22.
20. Brandl, R., Franciosi, S., Giovanni, F. *On the Wielandt subgroup of a infinite soluble groups*, Glasgow Math. J., N.3, 2, 1990, pp. 121-125.
21. Brewster, B., Martinez-Pastor, A., Perez-Ramos, M. D. *Embedding properties in direct products*, Groups St Andrews, N.1, 2005, pp. 246-256.
22. Bryce, R. A., Cossey, J. *A note on Hamiltonian 2-groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, N.86, 1991, pp. 175-182.
23. Bryce, R. A. *The Subgroups of Baer and Hughes*, Arch. Math, N.61, 1993, pp. 305-312.
24. Bryce, R. A., Rylands, L. J. *A note on groups with non-central norm*, Glasgow Math. J., N.36, 1994, pp. 37-43.
25. Bryce, R. A., Cossey, J. *The Series of Norms in a Soluble p-Group*, Bull. London Math. Soc., N.29, 2, 1997, pp. 165-172.
26. Bryce, R. A., Cossey, J. *A Note on Groups with Hamiltonian Quotients*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, N.100, 1998, pp. 1-11.
27. Bryce, R., Cossey, J. *The Wielandt subgroup of a finite soluble group*, J. London. Math. Soc., N.40, 2, 1989, pp. 244-256.

28. Bryce, R., Cossy, J., Ormerod, E. A. *A note on p -Groups with power automorphisms*, Glasgow Math. J., N. **34**, 3, 1992, pp. 327-332.
29. Bryce, R. *Subgroups like Wielandt's in Finite Soluble Groups*, Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society, N. **107**, 2, 1990, pp. 239-259.
30. Camina, A. R. *The Wielandt length of finite groups*, J. Algebra., N. **15**, 1970, pp. 142-148.
31. Casolo, C. *Soluble groups with finite Wielandt length*, Glasgow Math. J., N. **31**, 1989, pp. 329-334.
32. Casolo, C. *Wielandt series and defects of subnormal subgroups in finite soluble groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, N. **87**, 1992, pp. 93-104.
33. Chen, X., Guo, W. *On the $\pi\mathfrak{F}$ -norm and the $h\mathfrak{F}$ norm of a finite group*, Journal of Algebra, N. **405**, 1, 2014, pp. 213-231.
34. Cossy, J. *The Wielandt subgroup of a polycyclic group*, Glasgow Math. J., N. **33**, 1991, pp. 231-234.
35. Dedekind, R. *Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind*, Math. Ann, N. **48**, 1897, pp. 548-561.
36. Dixon, M. R., Kurdachenko, L. A., Otal, J. *Linear groups with finite dimensional orbits*, Proc. Ischia Group Theory, 2010, pp. 131-145.
37. Dixon, J. D. *Complements of normal subgroups in infinite groups*, Pros. London. Math. Soc., N. **3**, 17, 1967, pp. 431-446.
38. Doerk, K., Hawkes, T. *Finite Soluble Groups*, Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
39. Evan, J. *Permutable diagonal-type subgroups of $G \times H$* , Glasgow Math. J., N. **45**, 2003, pp. 73-77.
40. De Falco, M., De Giovanni, F., Musella, C. *Groups with decomposable set of quasinormal subgroups*, Serdica Math. J., N. **27**, 2001, pp. 137-142.
41. De Falco, M., de Giovanni, F., Kurdachenko, L. A., Musella, C. *The Metanorm and its Influence on the Group Structure*, J. Algebra, V. **506**, 2018, pp. 76-91.
42. De Falco, M., de Giovanni, F., Kurdachenko, L. A., Musella, C. *The metanorm, a characteristic subgroup: embedding properties*, J. Group Theory, V. **21**, Is. 5, 2018, pp. 847-864.

43. Franchi, C. *Subgroups like Wielandt's in Soluble Groups*, Glasgow Math. J., N.42, 2000, pp. 67-74.
44. Franchi, C. *m-Wielandtseries in infinite Groups*, J. Austral. Math. Soc., N.70, 2001, pp. 76-87.
45. Gashutz, W. *Über die Φ -Untergruppe endlicher Gruppen*, Mat. Z., N.58, 5, 1953, pp. 160-170.
46. Gashutz, W. *Zur Erweiterungstheorie der Endlicher Gruppen*, J. Reine Angew. Math., 190, 1952, pp. 93-107.
47. Gavioli, N., Legarreta, L., Sica, C., Tota, M. *On the number of conjugacy classes of normalisers in a finite p-groups*, Bull. Aust. Math. Soc., N.73, 2005, pp. 219-230.
48. Giovanni, F., Vincenzi, G. *Pronormality in infinite groups*, Math. Proc. of the Royal Irish Academy, N.100 (2), 2000, pp. 189-203.
49. Giovanni, F., Fransiosi, S. *Groups in which every infinite subnormal subgroup is normal*, J. Algebra, N.96, 2, 1985, pp. 566-580.
50. Gong, L., Zhao, L., Guo, X. *On the Generalized Norm of a Finite Group*, Journal of Algebra and its Applications, N.15, 1, 2016, doi.org/10.1142/S0219498816500080.
51. Gong, L., Guo, X. *On the Intersection of the Normalizers of the Nilpotent Residuals of All Subgroups of a Finite Group*, Algebra Colloq., N.20, 2, 2013, pp. 349-360.
52. Guo, X., Zhang, X. H. *On the Norm and Wielandt Series in Finite Groups*, Algebra Colloq., N.19, 2012, pp. 411-426.
53. Guo, X., Wang, J. *On Generalized Dedekind groups*, Acta Math Hungar., N.122(1-2), 2009, pp. 37-44.
54. Huppert, B. *Zur Theorie der Formationen*, Arch. Math., N.19, 1968, pp. 561-674.
55. Kappe, W. *Die A-Norm einer Gruppe*, Ill. J. Math., N.5, 2, 1961, pp. 187-197.
56. Kappe, W. *Gruppentheoretische Eigenschaften und charakteristische Untergruppen*, Arch. Math., N.13, 1, 1962, pp. 38-48.
57. Kappe, W. *Properties of Groups Related to the Second Center*, Math. Zeitschr., N.101, 1967, pp. 356-368.

58. Kappe, W. *E-Normen Endlicher Gruppe*, Arch. Math., N.19, 1968, pp. 256-264.
59. Kegel, O. H. *Über den Normalisator von subnormalen und erreichbaren Untergruppen*, Math. Ann., N.163, 1966, pp. 248-258.
60. Kirichenko V. V., Kurdachenko L. A., *On some developments in investigation of groups with prescribed properties of generalized normal subgroups*, Algebra and Discrete Mathematics, N.9,1, 2010, pp. 41-71.
61. Laue, R. *Kerne von Permutationsdarstellungen der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe*, Archiv der Mathematic, N.27, 1, 1976, pp. 463-472.
62. Lemeshev, I. V. *On norm and center of finite group*, Classes of groups, algebras and their applications, International Algebraic Conference, Gomel, 2007, pp. 99-100.
63. Levi, F. W. *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, Ill. J. Math., N.6, 1942, pp. 87-97.
64. Lewis, M. L., Zarrin, M. *Generalizing Baer's norm*, J. Group Theory, N.22, 2019, pp. 157-168.
65. Lia, Sh., Shenb, Zh. *On the intersection of the normalizers of derived subgroups of all subgroups of a finite group*, Journal of Algebra, N.323, 5, 2010, pp. 1349-1357.
66. Lyman, F., Lukashova, T., Drushlyak, M. *Finite 2-groups with a non-Dedekind non-metacyclic norm of Abelian non-cyclic subgroups*, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. Accepted.
67. Mari, F., Giovanni, F. *Groups with Few Normalizer Subgroups*, Irish. Math. Soc. Bulletin, N.56, 2005, pp. 103-113.
68. Miller, G. A. *Subgroups transformed according to a group of prime order*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, N.29, 1943, pp. 311-314.
69. Murashka, V. I. *On one generalization of Baer's theorems about hypercentre and nilpotent residual*, Problems of Physics, Mathematics and Technics, N.3(16), 2013, pp. 84-88.
70. Newman, B. H. *Groups with finite classes of conjugate subgroups*, Math. Z., 1955, 63, No.1, pp. 76-96.

71. Ormerod, E. A. *The Wielandt Subgroup of Metacyclic p -groups*, Bull. Australian Math. Soc., N.42, 3, 1990, pp. 499-510.
72. Robinson, D. J. S. *Course in the Theory of Groups*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982.
73. Robinson, D. J. S. *On the theory of subnormal subgroups*, Math. Z., N.89, 1965, pp. 30-51.
74. Robinson, D. L. S. *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Cambridge Philos. Soc., N.60, 1964, pp. 21-38.
75. Romano, E., Vincenzi, G. *Pronormality in generalized FC-groups*, Bull. Aust. Math. Soc., N.83, 2, 2011, pp. 220-230.
76. Roseblade, J. E. *On certain subnormal coalition classes*, J. Algebra, N.1, 1964, pp. 132-138.
77. Russo, F. *A note on the Quasicentre of a Group*, International Journal of Algebra, N.2(7), 2008, pp. 301-313.
78. Russo, F. *The generalized commutativity degree in finite group*, Acta Universitatis Apulensis, N.18, 2009, pp. 161-167.
79. Schenkman, E. *On Norm of a Group*, Ill. J. Math, N.4, 1960, pp. 150-152.
80. Scott, W. R. *Group theory*, Englewood Gliffs, 1964.
81. Selkin, V. M. *On the π -decomposable norm of a finite group*, Proceedings of Francisk Scorina State University, N.6, 2018, pp. 88-91.
82. Selkin, V. M., Kosenok N. S. *On the generalized norm of a finite group*, Problems of Physics, Mathematics and Technics, N.4(37), 2018, pp. 103-105.
83. Shen, Z., Lia, S., Shi, W. *On the norm of the derived subgroups of all subgroups of a finite group*, Bull. Iranian. Math. Soc., N.40, 1, 2014, pp. 281-291.
84. Shen, Zh., Chen, J., Li, Sh. *On the Derived Norm of a Finite Group*, Ukr.Math.J., N.68, 8, 2016, pp. 1037-1042.
85. Shen, Zh., Shi, W., Qian, G. *On norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite order*, Journal of Algebra, N.352, 1, 2012, pp. 290-298.

86. Shen, Z., Shi, W., Zhang, J. *Finite non-nilpotent generalizations of Hamiltonian groups*, Bull. Korean. Math.Soc., N.**48**, 6, 2011, pp. 1147-1155.
87. Shen, Z., Zhang, J., Shi, W. *On a Generalization of Hamiltonian Groups and a Dualization of PN-Groups*, Communications in Algebra, N.**41**(5), 2013, pp. 1608-1618.
88. Smith, J. *Groups with a chain of normalizers*, The XXVIIth Ohio State-Denison Mathematics Conference, Columbus, Ohio, 2004, pp. 45.
89. Smith, J. *Groups in which every subgroup of the norm is normal*, The XXIXth Ohio State-Denison Mathematics Conference, Columbus, Ohio, 2008, pp. 35.
90. Su, N., Wang, Ya. *On the intersection of normalizers of the \mathfrak{F} -residuals of all subgroups of a finite group*, Journal of Algebra, N.**392**, 15, 2013, pp. 185-198.
91. Wang, J. *Finite Groups with a Cyclic Norm Quotient*, Bull. Korean Math. Soc., N.**53**,2, 2007, pp. 479-486.
92. Wang J., Guo, X. *On the norm of finite groups*, Algebra Colloquium, N.**14**,4, 2007, pp. 605-612.
93. Wang, J. X., Guo, X. J. *Finite groups with its power automorphism groups having small indices*, Acta Mathematica Sinica, English Series, N.**25**,7, 2009, pp. 1097-1108.
94. Wethwrell, C. J. T. *The Wielandt series of metabelian groups*, Bull. Austral. Math. Soc., N.**67**, 4, 2003, pp. 267-276.
95. Wethwrell, C. J. T. *Soluble groups of small Wielandt length*, Comm. Alg., N.**32**, 4, 2004, pp. 1472-1486.
96. Wielandt, H. *Über der Normalisator der Subnormalen Untergruppen*, Mat. Z., N.**69**, 5, 1958, pp. 463-465.
97. Wos, L. *On commutative prime power subgroups of the norm*, Ill. J. Math, N.**2**,1958, pp. 271-284.
98. Zarrin, M. *On the Norm of the Centralizers of a Group*, Colloquium Mathematicum **149**, 2017, pp. 87-91.
99. Zhang, X., Guo, X. *On the Wielandt subgroup in a p -group of maximal class*, Chinese Annals of Mathematics, Series B, N.**33**(1), 2012, pp. 83-90.

100. Блудов, В. В. *О группах Фробениуса*, Сиб. мат.журн., 38, 6, 1997, pp. 1219-1221.
101. Бродский, С. Д. *О некоторых классах Куроша—Черникова*, XVI Всесоюз. алгебр. конф., Ленинград, 1981, Р. 2, pp. 19.
102. Бусаркин, В. М., Старостин, А. И. *О расщепляемых локально конечных группах*, Матем. сб., 62, 3, 1963, pp. 275-294.
103. Горчаков, Ю. М. *Группы с конечными классами сопряженных элементов*, М.: Наука, 1978.
104. Друшляк, М. Г. *Конечные p -группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой абелевых нециклических подгрупп*, Известия Гомельского университета имени Ф.Скорины, N.58,1, 2010, pp. 192-197.
105. Друшляк, М. Г. *Про норму абелевих нециклічних підгруп у неперіодичних групах*, Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки N.1, 2009, pp. 14-18.
106. Журтов, А.Х., Мазуров, В.Д. *О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами*, Алгебра и логика, 42, 3, 2003, pp. 271-292.
107. Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И. *Основы теории групп*, М.: Наука, 1982, 288 с.
108. Каргаполов, М. И. *О проблеме О. Ю. Шмидта*, Сиб. матем. журн., 4, 1963, pp. 232-235.
109. Кузенный, М. Ф., Семко, М. М. *Метагамільтонові групи та їх узагальнення.*, К: Ін-т матем. НАН України, 1996.
110. Курош, А. Г., *Теория групп*, М.: Наука, 1967.
111. Лелеченко, Т. Г., Лиман, Ф. Н. *Группы с инвариантными максимальными абелевыми подгруппами ранга 1 непростых порядков*, In: *Подгрупповая характеристизация групп*, К.: Институт математики, 1982, pp. 85-92.
112. Лиман, Ф. М. *Группы, все разложимые подгруппы которых инвариантны*, Укр. мат. журн., N.22, 6, 1970, pp. 725-733.
113. Лиман, Ф. М., *Групи з обмеженнями на нормалізатори різних систем підгруп* Деп. в ДНТБ України 24.11.97, N.577. - Ук 97, 293 с.

114. Лиман, Ф. Н. *p-группы, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні*, Доклады АН УРСР, N.8, 1968, pp. 696-699.
115. Лиман, Ф. Н. *2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами*, Математические заметки, N.4, 1, 1968, pp. 75-83.
116. Лиман, Ф. Н. *Групи з інваріантними нециклічними підгрупами*, Доклады АН УРСР, N.12, 1967, pp. 1073-1075.
117. Лиман, Ф. Н. *Неперіодичні групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні*, Доклады АН УРСР, N.1, 1969, pp. 11-13.
118. Лиман, Ф. Н. *Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп*, Алгебра и логика, N.7, 4, 1968, pp. 70-86.
119. Лиман, Ф. Н. *О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс*, Укр. мат. журн., N.49, 5, 1997, pp. 678-684.
120. Лиман, Ф. Н. *Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны*, In: *Группы с ограничениями для подгрупп*, К.: Наукова думка, 1971, pp. 65-96.
121. Лиман, Ф. М., Друшляк, М. Г. *О непериодических группах без свободных абелевых подгрупп ранга 2 с недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп*, Вісник Дніпропетровського університету, N.6, 2011, pp. 83-97.
122. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *Бесконечные локально конечные группы с локально нильпотентной недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп*, Вестник ВГУ имени П.М. Машерова, N.6(72), 2012, pp. 5-12.
123. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *О норме бесконечных циклических подгрупп непериодических групп*, Вестник ВГУ имени П. М. Машерова, N.4, 2006, pp. 108-111.
124. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *О норме разложимых подгрупп в локально конечных группах*, Укр. мат. журн., N.67, 4, 2015, pp. 480-488.
125. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *Обобщённые нормы непериодических групп*, Известия Гомельского государственного университета им. Франсиска Скорины, N.19, 4, 2003, pp. 62-67.

126. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *О норме разложимых подгрупп в непериодических группах*, Укр. мат. журн., N.67, 12, 2015, pp. 1679-1689.
127. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп*, Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки N.1, 2005, pp. 56-64.
128. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп*, Укр. мат. журн., N.53, 2001, pp. 625-630.
129. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д. *Про норму нескінченних абелевих підгруп непериодичних груп*, III Міжнар. алгебр. конф. в Україні, Суми, 2001, pp. 205-207.
130. Лиман, Ф. М., Лукашова, Т. Д., Друшляк, М. Г. *Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп*, Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки, N.1, 2012, pp. 26-32.
131. Лукашова, Т. Д. *Конечные 2-группы с недедекиндовой нормой нециклических подгрупп*, Известия Гомельского гос-го ун-та им. Ф. Скорины, N.6, 3, 200, pp. 139-150.
132. Лукашова, Т. Д. *Локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою нециклічних підгруп*, Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки, N.1, 2001, pp. 43-53.
133. Лукашова, Т. Д. *Локально скінченні групи з ненільпотентною нормою нециклічних підгруп*, Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки, N.3, 2001, pp. 38-42.
134. Лукашова, Т. Д. *Про нециклічну норму нескінченних локально скінченних груп*, Укр. мат. журн., N.54, 3, 2002, pp. 342-348.
135. Лукашова, Т. Д. *Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p -груп ($p \neq 2$)*, Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки N.3, 2004, pp. 35-39.
136. Лукашова, Т. Д., Друшляк, М. Г. *Про норму циклічних підгруп непростого порядку у непериодичних групах*, Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова, N.7, 2006, pp. 72-77.
137. Махнев, А. А. *О конечных метабильтоновых группах*, Мат. Записки Уральского университета, N.1, 1976, pp. 60-75.

138. Нагребецкий, В. Т. *Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна*, Мат. записки Уральского университета, N.1, 1967, pp. 80-88.
139. Ольшанский, А. Ю. *Бесконечная группа с подгруппами простых порядков*, Изв. АН СССР, N.44, 2, 1980, pp. 309-321.
140. Ромалис, Г. М., Сесекин, Н. Ф. *О метагамильтоновых группах I*, Мат. записки Уральского университета, N.5, 3, 1966, pp. 45-49.
141. Ромалис, Г. М., Сесекин, Н. Ф. *О метагамильтоновых группах II*, Мат. записки Уральского университета, N.6, 5, 1968, pp. 50-53.
142. Ромалис, Г. М., Сесекин, Н. Ф. *О метагамильтоновых группах III*, Мат. записки Уральского университета, N.7, 3, 1970, pp. 195-199.
143. Семко, М. М. *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп*, К.: Ін-т математики НАН України, 1998, 285 с.
144. Семко, Н.Н. *Непериодические группы с почти нормальными непериодическими подгруппами*, Группы и системы их подгрупп, К.: Ин-т математики АН УССР, 1983, pp. 79-86.
145. Семко, Н.Н., Левищенко, С.С., Курдаченко, Л.А. *О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами*, Изв. вузов. Математика, 1983. N.10, pp. 57-63.
146. Субботин, И. Я., *Конечные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна*, Мат.заметки, N.12, 1972, pp. 739-746.
147. Субботин, И. Я. *О группах с инвариаторным условием*, In: *Подгрупповая характеристика групп*, К.: Ин-т матем. АН УССР, 1982, pp. 99-109.
148. Субботин, И. Я., Кузенный, Н. Ф., *Разрешимые группы с инвариаторным условием для неабелевых нормальных делителей*, Изв. вузов. Матем, N.10, 1987, pp. 68-70.
149. Устюжанинов, А. Д. *Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами*, Матем. записки, 6, 1, 1967, pp. 107-128.
150. Фукс, Л. *Бесконечные абелевы группы*, М.: Мир, 1974, 336с., Т.1.
151. Холл, М. *Теория групп*, М.: Изд-во иностр.лит-ры 1962, 468 с.

152. Черников, С. Н. *Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп*, Укр. мат. журн., N.19,6, 1967, pp. 111-131.
153. Черников, С. Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, М.: Наука, 1980.
154. Черников, С. Н. *Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами*, In: *Группы с ограничениями для подгрупп*, К.: Наукова думка, 1971, pp. 47-65.
155. Черников, С.Н. *О нормализаторном условии*, Матем. Заметки, 1968,3, N.1, pp. 45-50.
156. Черников, Н. С., Половицкий, Я. Д., Чечулин, В. Л. *Группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп*, Укр. мат. журн., N.4,48, 1996, pp. 533-539.
157. Шеметков, Л. А. *Формации конечных групп*, М.: Наука, 1978, 272 с.
158. Шеметков, Л. А., Скиба, А. Н. *Формации алгебраических структур*, М.: Наука, 1989.
159. Шериев, В. А. *Конечные 2-группы с дополняемыми инвариантными подгруппами*, Сиб. матем. журн., 8, 1967, pp. 195-213.
160. Шунков, В. П. *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп*, Алгебра и логика, 9, 1970, pp. 579-615.

Наукове видання

**Федір Миколайович Лиман,
Тетяна Дмитрівна Лукашова, Марина Григорівна Друшляк**

УЗАГАЛЬНЕНІ НОРМИ ГРУП

Монографія

Суми: Видавництво СумДПУ, 2019 р.
Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Відповідальний за випуск: ***В. І. Шейко***
Комп'ютерна верстка: ***Т. Д. Лукашова, М. Г. Друшляк***

Здано в набір 13.06.19. Підписано до друку 20.06.19.
Формат 60х84/16. Гарн. Times New Roman. Друк ризогр. Папір друк.
Ум. друк. арк. 18,37. Обл.-вид. арк. 18,96.
Тираж 100 прим. Вид № 37.

Видавництво СумДПУ імені А. С. Макаренка
40002, м. Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ імені А. С. Макаренка