

Лубенець Зоряна

Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»

zoriana.lubenets@gmail.com

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У сучасній математиці функціональний аналіз є одним із фундаментальних напрямків. Його важливою особливістю є те, що він дозволяє поєднувати і одночасно досліджувати різні, на перший погляд, питання. Зокрема, вивчення функціональних рівнянь $F(x)=y$ дає можливість об'єднати дослідження обчислення диференціальних і інтегральних рівнянь, граничних задач та нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Методи функціонального аналізу виявились досить ефективними при постановці та дослідженні задач щодо повноти систем функцій та розв'язуванні граничних задач у певному класі функцій [4, с.7-8].

Варто зауважити, що функціональний аналіз застосовується в теоретичній фізиці, математичній фізиці, в прикладному аналізі та інших областях математики.

На сучасному етапі досить широко використовуються можливості комп'ютерних технологій, створення яких сприяло і продовжує сприяти розвитку обчислювальної математики, яка, з одного боку, присвячена створенню і дослідженню (із застосуванням функціонального аналізу, статистики і інших розділів математики) наближених методів обчислення задач і, з іншого боку, розвитку програмування й алгоритмічних мов [5, с.5].

Багато задач обчислювальної математики можна звести до відшукування нерухомої точки відображення, для цього використовують метод послідовних наближень (метод ітерацій). У свою чергу принцип стискаючих відображень, окрім доведення існування та єдиності розв'язків рівняння $f(x)=x$ (f – відображення), дає фактичний метод наближеного знаходження такого розв'язку – метод послідовних наближень [8, с.100].

Метод стискаючих відображень використовується в алгебрі, геометрії, фізиці, медицині, інформатиці та у теорії фракталів тощо. Розглянемо сучасне застосування цього методу, зокрема, в ядерній медицині. Ядерна медицина – це розділ медичної радіології, який використовує радіонукліди та іонізуючі випромінювання для дослідження функціонального і морфологічного стану організму, а також для лікування захворювань людини.

Відомо, що діагностика і лікування різних захворювань неможливі без використання рентгенівських апаратів, потужних гамма-терапевтичних установок, прискорювачів електронів, протонів та інших елементарних частинок, синтезованих радіоактивних ізотопів – джерела іонізуючих випромінювань різного типу, радіонукліди медичного призначення та радіоактивні фармацевтичні препарати [1, с.4]. Сучасна медична техніка дозволяє виявити структурні і функціональні зміни одного і того ж органу за допомогою приладів, які мають різний принцип дій. Найбільш інформаційним методом є томографія, яка надає більше інформації про об'єкт дослідження, ніж інші відомі методи діагностики. Існує декілька видів томографії: рентгенівська, електронно-променева, магнітно-резонансна, позитронно-емісійна, ультразвукова, оптична когерентна томографія та інші. Інформативність і достовірність кожного з них залежить від багатьох чинників, що визначають кінцевий результат дослідження, зокрема й від принципу дії пристрою [7, с.5].

Розглянемо специфіку використання методу стискаючих відображень для реконструкції зображень у комп'ютерній томографії. При томографічному дослідженні ставиться математична задача відновлення внутрішньої структури об'єкта за його проекціями – цифровими знімками, зробленими з різних точок. Її розв'язування

зводиться до пошуку перетворення, оберненого до перетворення Йоганна Радона (16 грудня 1887 р. – 25 травня 1956 р.) – австрійський математик. При цьому складають систему операторних рівнянь першого роду, наближені розв'язки якої знаходять за допомогою методу регуляризації.

Даний метод відносять до ітераційних методів обчислювальних алгоритмів. Ітераційні методи відновлення зображення використовують апроксимацію відновлюваного об'єкта масивом комірок рівної щільності, що являють собою невідомі величини, пов'язані системою алгебраїчних рівнянь, вільними членами яких є кількість проекцій [1, с.148].

Серед найбільш відомих ітераційних методів відновлення перетинів виділяють такі:

- алгебраїчний метод (ART – Algebraic Reconstruction Techniques);
- метод одночасного ітераційного відновлення (SIRT – Simultaneous Iterative Reconstruction Technique);
- ітераційний метод найменших квадратів (ILST – Iterative Least-Squares Technique).

Ці методи відрізняються в основному послідовністю внесення поправок під час ітерації.

Алгебраїчні методи мають однаковий алгоритм дій. Спочатку здійснюється дискретизація функції g , що реконструюється, і проекційних даних f , при цьому їх вважають векторами лінійних просторів. Одним із способів дискретизації функції g є такий, при якому її область визначення розбивається на малі підобласті (пікселі в R^2 і вокселі в R^3), що перетинаються лише по межах, у яких значення функції вважається незмінним. Номер пікселя або вокселя j визначає координату у векторному просторі, а величина g_j задає значення координати. Якщо дані об'єднані в проекції і кожна проекція утворюється показами q детекторів, то p -ому детектору на m -ій проекції приписують номер:

$$i = (m - 1) \cdot q + p.$$

Потім будується проектуючий оператор, внаслідок чого дана задача зводиться до системи рівнянь, яка може бути нелінійною та містити не алгебраїчні рівняння. Але медична рентгенівська томографія та емісійна томографія плазми описуються системою лінійних алгебраїчних рівнянь. У обох випадках проектуючий оператор апроксимує інтеграли вздовж прямих скінченною сумою, тому можна записати:

$$\sum_j a_{ij} g_j = f_i \text{ або } Ag = f,$$

де $g \in R^J$, $f \in R^I$, J – число пікселів (вокселів), на які розбита область визначення шуканої функції, I – повне число відомих інтегралів вздовж прямих. Відповідно матриця A має порядок $I \times J$.

Отриману систему рівнянь зазвичай обчислюють ітераційними методами. Найбільш простими з них є алгоритми, які мають наступну спільну форму:

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + c_k(g^{(k)}, f, A),$$

де значеннями функції c_k є вектори простору R^J .

Найпоширенішим методом серед ітераційних є ART:

$$g^{(k+1)} = \begin{cases} g^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{f_{i(k)} - \langle a^{i(k)}, g^{(k)} \rangle}{\|a^{i(k)}\|^2} (a^{i(k)})^T, & \|a^{i(k)}\| \neq 0 \\ g^{(k)}, & \|a^{i(k)}\| = 0 \end{cases}.$$

де $\langle a^{i(k)}, g^{(k)} \rangle$ – скалярний добуток в R^J ; $a^{i(k)} - i(k)$ -ий рядок матриці A ; $(a^{i(k)})^T$ – вектор-стовпець, отриманий в результаті транспонування рядка $a^{i(k)}$ [6, с.90-94].

При реконструкції методом ART корекція відбувається одночасно для усіх точок, що входять в окремий промінь. Потім процедура повторюється для наступного променя тощо. При цьому враховуються результати попередніх ітерацій. Серед алгебраїчних методів відновлення даних метод є найшвидшим, оскільки він потребує меншої кількості затрат часу.

Зауважимо, що алгоритми ART використовувалися в першому рентгенівському медичному томографі Хаунсфілда, а сьогодні застосовуються в мікротомографії. Також, окрім зазначених вище способів алгебраїчної реконструкції, існують десятки їх модифікацій, які використовують апріорні дані з функції, що відновлюється [9, с.117].

Розглянемо застосування ітерацій в геоінформаційних системах.

Зображення, які ми отримуємо за допомогою космічних засобів дистанційного зондування Землі, відіграють велику роль у наукових дослідженнях, промислових, господарських, військових та інших цілях. Вони дозволяють отримати інформацію про стан навколишнього середовища та атмосфери, оцінку врожаю сільськогосподарських культур, оцінку наслідків стихійних лих (повені, землетрусів, вивержень вулканів, лісових пожеж). Також засоби дистанційного зондування ефективні при вивченні забруднення ґрунтів та водойм.

Для створення основної складової геоінформаційних систем (ГІС) – електронних карт, використовують цифрові аерокосмічні зображення земної поверхні разом з топографічними картами, планами міст, аеронавігаційними і морськими картами [3, с.4].

Дані на картографічних сервісах отримують шляхом переходу від призначених для користувача систем до системи координат WGS-84 за алгоритмом, що складається з таких етапів:

1. Перехід від місцевої системи або від СК-63 (система плоских прямокутних координат в картографічній проекції Гаусса-Крюгера) до системи координат СК-42.
2. Обчислюють геодезичні координати: широту і довготу B_{42}, L_{42} .
3. Визначають прямокутні просторові координати в системі СК-42:

$$\begin{aligned} X_{42} &= (N_{42} + H_{42}) \cos B_{42} \cos L_{42}; \\ Y_{42} &= (N_{42} + H_{42}) \cos B_{42} \sin L_{42}; \\ Z_{42} &= [N_{42}(1 - e^2) + H_{42}] \sin B_{42}, \end{aligned}$$

де N_{42} – радіус кривизни перетину першого вертикала, що обчислюється за широтою B_{42} ; H_{42} – геодезична висота відносно еліпсоїда Красовського; e – перший ексцентриситет меридіанного еліпса для еліпсоїда Красовського.

4. Виконують переобчислення прямокутних просторових координат із системи СК-42 в WGS-84.
5. Переходять від прямокутних просторових координат WGS-84 до еліпсоїдних координат, використовуючи формули:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L_{84} &= \frac{Y_{84}}{X_{84}}; \\ \operatorname{tg} B_{84} &= \frac{Z_{84}}{\sqrt{X_{84}^2 + Y_{84}^2}} + \frac{N_{84} e^2}{N_{84} + H_{84}} \operatorname{tg} B_{84}; \\ H_{84} &= \sqrt{X_{84}^2 + Y_{84}^2} \sec B_{84} - N_{84}. \end{aligned}$$

Обчислення за двома останніми формулами виконується методом ітерацій.

Отримані значення B_{84}, L_{84}, H_{84} використовуються прикладними для користувача програмами для формування KML-файла, який дозволяє відобразити відповідну просторову інформацію на картографічному веб-сервісі.

Даний алгоритм є універсальним і може бути застосований для достатньо широкого кола задач [2, с.359-361].

Ітераційні методи також використовують у будівельній механіці, наприклад, при розрахунку стійкості пружних систем.

Також слід зазначити, що метод ітерацій будується на принципі стискаючих відображень. Їх взаємозв'язок можна спостерігати, наприклад, при доведенні теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, яке ґрунтується на методі послідовних наближень в умовах, коли діє принцип стискаючих відображень.

Список використаних джерел

1. Бекман И.Н. Радиационная и ядерная медицина: физические и химические аспекты. Радиохимия. Том 7. – МО, Щёлково: Издатель Мархотин П.Ю., 2012. – 400 с.
2. Гавриленко Д.Ю. Использование картографических web-сервисов для представления маркшейдерско-геодезической информации // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2013. – №12. – с.356-365.
3. Горбачев С.В. Цифровая обработка аэрокосмических изображений / С.В. Горбачев, С.Г. Емельянов, Д.С. Жданов и др. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. – 304 с.
4. Канторович Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматлит, 1959. – 684 с.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
6. Лихачев А.В. Алгоритмы томографической реконструкции. Учеб. пособие. – Новосибирск: НИУ-НГУ, 2013. – 117 с.
7. Марусина М.Я. Современные виды томографии. Учебное пособие / М.Я. Марусина, А.О. Казначеева. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 132 с.
8. Морозова В.Д. Введение в анализ: Учеб. Для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 408 с.
9. Филонин О.В. Общий курс компьютерной томографии. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2012. – 407 с.

Анотація. Лубенець З. Застосування методу стискаючих відображень. У статті розглянуто деякі практичні застосування методу стискаючих відображень та методу ітерацій. Наведено приклад застосування ітераційного методу в ядерній медицині, а саме в томографії, та в геоінформаційних системах.

Ключові слова: метод стискаючих відображень, метод ітерацій, ядерна медицина, комп'ютерна томографія, електронні карти.

Abstract. Lubenets Z. Application of the method of compression mappings. The article considered some practical applications of the method of compression mappings and the iteration method. An example application of the iterative method in geoinformation systems and nuclear medicine, namely in tomography, is given.

Keywords: method of compression mappings, the iteration method, nuclear medicine, computed tomography, electronic maps.