Іван Марчук
Житомирський агротехнічний коледж, м. Житомир
elena.k.02@i.ua
Науковий керівник – О.Е. Корнійчук

МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ: ЗАГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

Важливим аспектом у моделюванні механічних конструкцій і систем є диференціальні рівняння. Простим прикладом коливань, які виникають у більш складних механічних системах є рух фізичного тіла, з'єднаного з пружиною. Для багатьох подібних систем задача дослідження коливань зводиться до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо тіло масою m, що з'єднане з одного боку зі звичайною пружиною, яка надає опору як розтягненню, так і стисканню, а з іншого – з амортизатором (пристроєм, що поглинає удари). Тіло може рухатися вперед або назад, без тертя, по горизонтальній площині.

Нехай x – відстань від тіла до положення рівноваги. За законом Гука зворотня сила F_R (*reverse force*), з якою пружина діє на тіло: $F_R = -kx$, де k – коефіцієнт жорсткості пружини. Сила F_D, з якою діє амортизатор (*damping force*), пропорційна швидкості $v = \frac{dx}{dt}$ руху тіла: $F_D = -cv = -c\frac{dx}{dt} = -cx'$, де c – коефіцієнт поглинання. Якщо крім сил F_Rта F_D на тіло діє й зовнішня сила (*external force*) $F_E = F(t)$, то рівнодіюча сил, що діють на тіло: $F = F_R + F_D + F_E$. Використовуючи другий закон Ньютона $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx''$, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку, яке описує рух тіла:

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \quad (1)$$

Якщо амортизатор відсутній (або ми нехтуємо силами опору), то у рівнянні (1) коефіцієнт $c = 0$ – коливання *незгасаючі*. При $c > 0$ – коливання *загасаючі*. Якщо на систему зовнішні сили не діють, то вважаємо $F(t) = 0$, а коливання *вільними*. У випадку $F(t) \neq 0$ – коливання *вимушені*. Однорідне рівняння (2) описує вільні коливання системи, яка складається з тіла, пружини й амортизатора та не піддається впливу зовнішніх сил:

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad (2)$$

Рівняння загасаючих коливань (2) можна подати у вигляді:

$$x'' + 2px' + w_0^2 x = 0, \quad (3)$$

де $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – кругова частота незагасаючих коливань і $p = \frac{c}{2m} > 0$. Тоді $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - w_0^2}$ – корені відповідного характеристичного рівняння: $r^2 + 2pr + w_0^2 = 0$. (4)

Дійсними або комплексними будуть ці корені залежить від знаку підкореневого виразу:

$$p^2 - w_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}.$$

Критичне загасання $c_{кр}$ відбувається у разі, коли $c^2 - 4km = 0$, а отже $c_{кр} = \sqrt{4km}$. Можливі три випадки: $c > c_{кр}$ – закритичне загасання, $c = c_{кр}$ – критичне, $c < c_{кр}$ – загасаючі коливання.

Розглянемо розв'язок характеристичного рівняння (4) у випадку загасаючих коливань (докритичного загасання): $c < c_{кр}$ або $c^2 < 4km$. Це два комплексних спряжених кореня:

$$r_{1,2} = -p \pm i\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} = -p \pm i\sqrt{w_0^2 - p^2} = -p \pm iw_1. \quad (5)$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = e^{-pt}(Acos(w_1 t) + Bsin(w_1 t)) \quad \text{або} \quad x(t) = Ce^{-pt}(\frac{A}{C}cos(w_1 t) + \frac{B}{C}sin(w_1 t)),$$

$$\text{звідки} \quad x(t) = Ce^{-pt}(cos\alpha \cdot cos(w_1 t) + sin\alpha \cdot \sin(w_1 t)),$$

де $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $cos\alpha = \frac{A}{C}$, $sin\alpha = \frac{B}{C}$. За формулою косинуса суми кутів:

$$x(t) = Ce^{-pt}\cos(w_1 t - \alpha). \quad (6)$$

Розв'язок (6) відображує експоненціально загасаючі коливання матеріальної точки біля положення рівноваги. Геометричну інтерпретацію цього розв'язку проведено за допомогою пакету GRAN1 (рис.1). Дослідження моделей та аналіз геометричного змісту параметрів можливо проводити й у більш потужних системах комп'ютерної математики, таких, як MATLAB, Mathematika, Maple, MathCAD та ін. Деякі приклади застосувань цих технологій наведено у роботах [1-9].

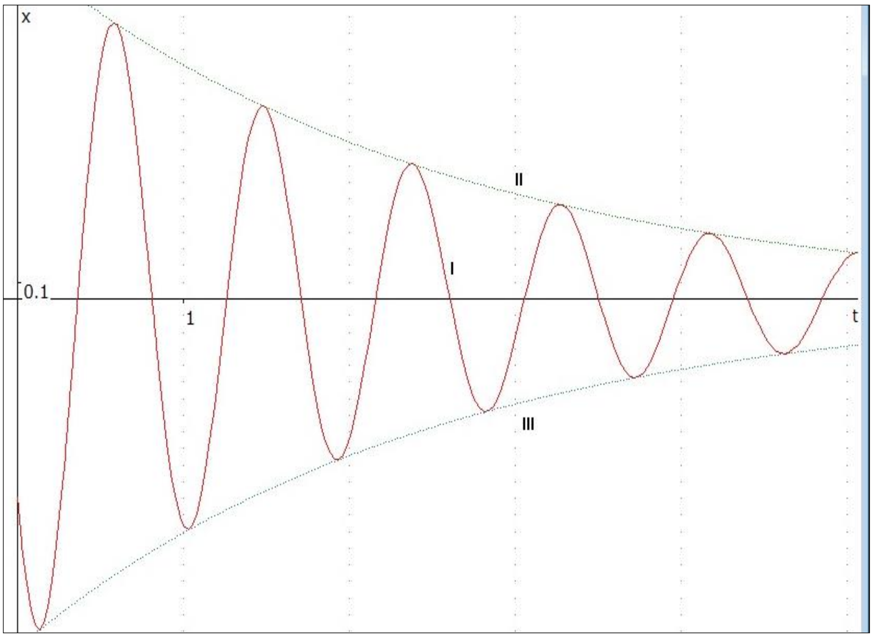

Рис. 1. Загасаючі коливання $\boldsymbol{x(t) = Ce^{-pt}\cos(w_1 t - \alpha)}$

Графік (I), зображеної на рис. 1 функції $x(t)$, міститься між обмежуючими амплітуду кривими $x(t) = Ce^{-pt}$ (II) та $x(t) = -Ce^{-pt}$ (III). Такі коливання не є гармонічними, а рух не є періодичним. Проте, і в цьому випадку, w_1 називається круговою частотою загасаючих коливань, α – фазою, $T_1 = \frac{2\pi}{w_1}$ – умовним періодом загасаючих коливань, а Ce^{-pt} – амплітудою загасаючих коливань. З виразу (5) видно, що w_1 менше за кругову частоту незагасаючих коливань w_0, тому T_1 більше за період $T = \frac{2\pi}{w_0}$ коливань тіла такої самої маси, що з'єднане з такою самою пружиною, але без амортизатора.

Отже, дія амортизатора проявляється, принаймні, у двох явищах.

1. Амортизатор гасить коливання і вони експоненціально загасають (це виражається в залежності (зменшенні) амплітуди від часу.
2. Амортизатор уповільнює рух, а саме зменшує частоту коливань.

На практиці механічна система з малим загасанням під дією резонансних коливань може зруйнуватися. Наступним важливим кроком постає задача розробки та дослідження диференційних моделей задля визначення власної частоти системи і запобігання руйнівної сили резонансних явищ.

Список використаних джерел

1. Корнійчук О. Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О. Е. Корнійчук // Освіта та педагогічна наука. – Луганськ : ЛНПУ ім. Т. Шевченка, 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.
2. Корнійчук О. Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.

3. Корнійчук О. Е. Напрямки інтеграції математики з інформатикою у процесі підготовки молодших спеціалістів економічного профілю / О.Е. Корнійчук, В.М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 6(38). – С. 16-18.
4. Корнійчук О. Е. Комп'ютерні технології у вивченні математики для економістів / О.Е. Корнійчук, В.М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 8(40). – С. 16-19.
5. Корнійчук О. Математичні моделі в економічних розрахунках на базі MathCAD / Олена Корнійчук // Математика в школі : науково-методичний журнал. – 2006. – № 6. – С. 35-41.
6. Корнійчук О. Мотивація в системі навчання математичних дисциплін / Олена Корнійчук // Витоки педагогічної майстерності. – Полтава : ПНПУ ім. В.Г. Короленка, 2012. – Вип. 10. – С. 144-148.
7. Корнійчук О. Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О. Е. Корнійчук // Сб. научных трудов межд. конф. «Совр. иннов. технологии подготовки инжен. кадров для горной пром. и трансп. 2016». – Днепропетровск, ГВУЗ «Нац. горный университет», 2016. – С. 431-440.
8. Корнійчук О. Е. Вивчення похідної разом із Maple / О. Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : Сумський держ. пед. університет ім. А. С. Макаренка, 2016. – № 3(9). – С. 61-69.
9. Корнійчук О.Е. Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства / О. Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : СДПУ ім. А.С. Макаренка, 2017. – Вип. 1(11). – С. 62-67.

Анотація. Марчук І. Моделювання механічних систем: загасаючі коливання. *У статті проведено дослідження і аналіз механічної системи, яка описує вільні загасаючі коливання, складається з тіла, пружини й амортизатора та не піддається впливу зовнішніх сил. Модель побудовано на основі теорії диференціальних рівнянь з використанням комп'ютерної графічної інтерпретації розв'язку.*
Ключові слова: *загасаючі коливання, амортизатор, диференціальне рівняння.*

Аннотация. Марчук И. Моделирование механических систем: затухающие колебания. *В статье проведено исследование и анализ механической системы, которая описывает свободные затухающие колебания, состоит из тела, пружины, амортизатора и не поддается влиянию внешних сил. Модель построена на основе теории дифференциальных уравнений с использованием компьютерной графической интерпретации решения.*
Ключевые слова: *затухающие колебания, амортизатор, дифференциальное уравнение.*

Summary. Marchuk I. Modeling of mechanical systems: damped oscillations. *The article investigates and analyzes a mechanical system that describes free damped oscillations, consists of a body, a spring, a shock absorber and is not influenced by external forces. The model is constructed on the basis of the theory of differential equations using computer graphic interpretation of the solution.*
Keywords: *damped oscillations, shock absorber, differential equation.*