

**Kravchenko Z. Some peculiarities in organizing the pupils' independent work while teaching them Algebra and Basis of Analysis with the use of a two-level textbook.**

*The article deals with the peculiarities in organizing the pupils' independent work with the use of a two-level textbook. Four major stages are singled out. They are a stimulating and motivating stage, a training stage, a diagnosing and correction stage, and that one of control and evaluation. The emphasis is made on the types of educational material for organizing the pupils' independent work. Appropriate tasks are suggested.*

**Key words:** independent work, stages, two-level textbook, method, activity, differentiation of learning.

УДК 519.246.8

**О. В. Мартиненко,  
Г. І. Мащенко**

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ СПОЖИВЧОЇ ПОВЕДІНКИ

*У статті розглянуто основні питання економетрії, що встановлює безпосередній зв'язок економічних понять та процесів з математикою. Охарактеризовано основні проблеми економіки, які до нашого часу не мають розв'язків без втручання математичних моделей. Також досліджено питання математичних методів, що активно використовуються в економічній науці. Встановлено переваги економіко-математичних моделей. Розглянуто теорію поведінки споживача. Основну увагу приділено математичним методам та моделям споживчої поведінки. Дана стаття є корисною для практичного використання в економічних дослідженнях споживчої поведінки та попиту.*

**Ключові слова:** модель, математичне та економіко-математичне моделювання, економетрія, метод, поведінка споживача, поверхня байдужості, бюджетна множина.

**Постановка проблеми.** Останніми десятиліттями світова практика економічних досліджень підтверджує ефективність використання інструментарію економіко-математичного аналізу.

Створення нової галузі математики – математичної економіки - дозволяє вивчати та аналізувати економіку як цілісну систему, досліджувати динаміку її розвитку, залежності між параметрами, які характеризують її стан в цілому, описувати окремі елементи економічної системи, робити методами чисельного аналізу оцінку економічних ситуацій, що виникають у процесі трансформації виробничих ресурсів у готову продукцію.

Однак, однією з проблем на різних рівнях економічних систем є обмеженість ресурсів необхідних для виготовлення кінцевого продукту. Щоб відшукати шляхи її вирішення, потрібно проводити експериментальні дослідження та розрахунки. Очевидним є те, що експериментування з економічними системами не завжди доцільне з точки зору його вартості або наявності умов, тому єдиним науково обґрунтованим засобом отримання достовірних результатів є математичне моделювання певного економічного процесу.

Проте, кожна економічна модель в залежності від конкретної економічної задачі має певну специфіку та обмеження (умови), тому потрібно правильно оцінити ці особливості при побудові відповідної їй математичної моделі. На особливу увагу заслуговують і вибір відповідного математичного методу для даної

математичної моделі і правильна оцінка достовірності отриманих розв'язків, тому знання з економіко-математичного моделювання дають змогу виділити більшість економічних проблем.

**Аналіз актуальних досліджень.** У сучасних економічних умовах господарювання України формування фундаментальних засад розвитку підприємств є актуальним завданням. У цьому аспекті виникає необхідність використання певного інструментарію з економіки та математичного моделювання.

Розвитку математичних методів моделювання економіки присвячено ряд монографій та підручників, таких як: В.І. Варфоломеев «Алгоритмічне моделювання елементів економічних систем», В.Б. Занг «Синергетична економіка», В.А. Колемаєв «Математична економіка», в яких розроблено теоретичні основи та розглянуто прикладні аспекти застосування методу математичного моделювання до різних економічних процесів і явищ.

У ринковій економіці функціонування різних соціально-економічних систем здійснюється під впливом великого числа факторів зовнішнього середовища, які викликають збої в русі потокових процесів, а це спричиняє великі втрати у діяльності систем. Еволюція й нестабільність економічних об'єктів приводять до необхідності широкого використання складних математичних методів та моделей, методів, що дають можливість врахувати особливості ринкових умов. Математичні методи та моделі щодо дослідження та управління ринковою економікою дозволяють вивчати економічні явища і процеси та покращувати обґрунтування й прийняття управлінських рішень.

Математичні моделі використовувались з ціллю ілюстрації та дослідження ще Ф. Кене (1758р. «Економічна таблиця»), А. Смітом (класична макроекономічна модель), Л. Рікардо (модель міжнародної торгівлі). В ХХ ст. математичні методи моделювання використовувалися дуже широко, з їх використанням пов'язані майже всі роботи нагороджені Нобелівською премією з економіки (Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв та інші). Розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін пов'язано з більш високим рівнем їх формалізації. Основу для цього поклав прогрес в області прикладної математики – теорія ігор, математичне програмування, математична статистика. Значний внесок у розвиток практичного застосування методів математичного моделювання в економіці зробили вчені, такі як: Б. Буркінський, В.В. Вітлінський, Б.Є. Грабовецький, В. Здрок, Н. Лепа, В. Осипов, С.В. Прокопов, Є. Слуцький, М.І. Туган-Барановський та інші. За допомогою економіко-математичних методів вони побудували свої теорії, провели практичні розрахунки, дали обґрунтовані висновки, здійснили прогнози й оцінили ризики багатьох економічних явищ і процесів.

**Мета статті:** теоретично обґрунтувати необхідність використання математичних методів та моделей споживчої поведінки, охарактеризувати особливості їх застосування при розв'язанні економічних задач.

**Виклад основного матеріалу.** Економіко-математичне моделювання є універсальним інструментом аналізу та дослідження виробничих та фінансово-господарських процесів і явищ.

Широке використання математичних методів стає важливим напрямком удосконалення економічного аналізу, який підвищує ефективність діяльності підприємств та їхніх підрозділів. Основними причинами швидкого поширення та пришвидшення темпів розвитку методів економіко-математичного моделювання являється різке ускладнення сучасної економічної практики, викликане високим рівнем розвитку виробництва, зростанням темпів науково-технічного прогресу, ІР-технологій; вимоги підвищення ефективності використання природних ресурсів та глобалізація економіки в цілому.

Шляхом подолання цих проблем стає моделювання, тобто наукова теорія побудови і реалізації моделей, за допомогою яких досліджуються явища, процеси в природі і суспільному житті. Побудова економіко-математичних моделей – складний процес, що вимагає глибоких знань з економічної теорії, предмета дослідження і математичного інструментарію. Спрощеним представленням або абстракцією реальності, умовним образом об'єкта, який створюється для більш глибокого вивчення дійсності і є модель [4].

Економіко-математичні методи і моделі дають такі можливості:

- точно і компактно викласти положення економічної теорії;
- формально описати зв'язки між економічними змінними;
- розв'язати задачі оптимізації планування та управління, відображаючи специфіку виробничих процесів;
- своєчасно реагувати на зміни цілей, обмежень на ресурси, залежностей між параметрами та адекватно коректувати плани й управлінські рішення;
- отримати інформацію про об'єкт, його функціонування;
- спрогнозувати об'єкт і його поведінку в майбутньому.

Наприклад, методи елементарної математики використовуються в економічних розрахунках при обґрунтуванні потреб у ресурсах, обліку витрат на виробництво, розробці планів, проектів, при балансових розрахунках [1].

Широкого розповсюдження в економічному аналізі набули методи математичної статистики. Ці методи застосовуються в тих випадках, коли зміну аналізованих показників можна представити як випадковий процес.

Своєрідним поєднанням трьох областей знань: економіки, математики і статистики можуть бути економетричні методи. Основу економетрії становить економічна модель, що є схематичним представленням економічного явища чи процесу за допомогою наукової абстракції. Одним із основних розділів економетрики виступає кореляційно-регресійний аналіз – сукупність математичних методів, які досліджують взаємозв'язки кореляційно зв'язаних змінних.

Для дослідження складних і великорозмірних економічних структур використовують матричні методи і моделі, вони дають змогу у найбільш компактній формі описати взаємозв'язок витрат і результатів виробництва. Зручність розрахунків і чіткість економічної інтерпретації – головні особливості матричних моделей. Це важливо при створенні систем механізованого оброблення даних, при плануванні виробництва продукції з використанням комп'ютера [6].

Методи математичного програмування призначені для оптимізації виробничо-господарської діяльності як засіб планових розрахунків. Цінність їх для економічного аналізу полягає у тому, що вони дають змогу оцінювати досягнення потенціалу, напруженість планових завдань, визначати стан устаткування, обмежені види сировини і матеріалів, ступінь конкурентності та дефіцитності.

Для прийняття управлінських рішень в умовах ризику і невизначеності на підприємствах варто використовувати теорію ігор. Теорія ігор – це сукупність математичних методів і моделей, пов'язаних із прийняттям раціональних рішень в умовах конфлікту та невизначеності [5].

А. Маршалл стверджував, що вибір покупців є результатом значною мірою «раціональних», а отже, свідомих, логічно послідовних підрахунків. Індивідуальний покупець намагається витратити свій дохід на товари, які найбільше задовольняють його запити щодо смаків і рівня цін. Ця теорія вказує на особливості поведінки споживачів, а саме: вибір товарів чи послуг здійснюється після попереднього обмірковування, рівень якого залежить від важливості товару; вибір базується на передбачуваних результатах у майбутньому; на вибір впливає принцип загальної

недостатності, згідно з яким діє індивід (принцип недостатності грошей, товарів, часу, інформації) [8].

Нова економічна теорія поведінки споживачів, що була розроблена після А. Маршалла, доповнює попередню тим, що споживання - це діяльність, у межах якої людина здійснює вибір благ з метою «створення» послуг, які забезпечують корисність даного блага. Вона розглядає блага як сукупність властивостей чи атрибутів, а споживача - як творця кінцевого задоволення [8]. Ця теорія потребує відповідного підходу до побудови моделі.

Під моделлю поведінки споживачів розуміють концептуальні схеми, які систематизують інформацію про те, як і чому приймаються рішення про купівлю товарів чи послуг. Вони визначають такі фактори: яким чином покупець приймає рішення про купівлю; як зовнішній вплив і характеристики покупця впливають на його поведінку; в якій системі координат досліджувати поведінку споживачів.

Як зазначає В.В. Вітлінський, вибір споживача щодо купівлі певного набору товарів математично можна подати як вибір точки у просторі товарів. Нехай  $n$  - скінченне число різноманітних товарів, де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  - вектор-стовпчик споживчих товарів (обсяги), що їх придбав споживач за певний термін (наприклад протягом року) за заданих цін, маючи певний обсяг доходів за цей самий період [2].

*Простір товарів* – це множина різноманітних наборів товарів  $x$  з невід’ємними координатами:  $C = \{x : x \geq 0\}$  (1)

У теорії споживчого вибору припускається гіпотеза, що кожен споживач має свої пріоритети на певній підмножині простору товарів:

$$X \subset \{x : x \geq 0\} \quad (2)$$

Це означає, що для кожної пари  $x \in X, y \in X$  має місце одне з трьох відношень:

$x > y$  – набір  $x$  є привабливішим, ніж  $y$ ;

$x < y$  – набір  $x$  є менш привабливим, ніж  $y$ ;

$x \sim y$  – для споживача обидва набори еквівалентні.

Відношення переваги мають такі властивості:

1) якщо  $x > y, y > z$ , то  $x > z$  (транзитивності),

2) якщо  $x > y$ , то  $z < y$  (ненасиченість: більший набір завжди привабливіший меншого).

У теорії споживання припускаються гіпотези і вважається, що функція корисності має такі властивості:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$$

- зі зростанням споживання блага корисність зростає;

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$$

- невеликий приріст блага за його початкової відсутності різко збільшує корисність;

$$3) \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} < 0$$

- зі зростанням споживання блага швидкість зростання корисності зменшується (спадає);

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

- коли є дуже великий обсяг блага, його подальше зростання не приводить до зростання корисності.

Умова 3) зазвичай використовується як від’ємно визначена матриця других похідних (матриця Гессена):

$$U(x) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right\| \quad (3).$$

Гранична корисність товару  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  показує, на скільки зростає корисність, якщо кількість товару зростає в малому обсязі.

Поверхнею байдужості називають гіперповерхню розмірності  $(n-1)$ , на якій корисність постійна, тобто  $u(x) = c = \text{const}$  або має диференційовану форму:

$$\partial u = \sum_{i=1}^x \frac{\partial u}{\partial x_i} \partial x_i = 0 \quad (4)$$

Дана умова показує, що дотична до поверхні байдужості перпендикулярна градієнтові корисності, тобто з погляду споживача це означає, що один товар можна замінити певною кількістю іншого (рівноцінного) товару.

Замінімо  $\partial x_i = 0$  для  $i=3, \dots, n$ , тоді це співвідношення має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \partial x_2 = 0 \quad - \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}$$

, звідси  $-\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}$ , тобто гранична норма заміщення першого товару іншим дорівнює відношенню граничної корисності першого та другого товарів. Ця норма показує, скільки необхідно одиниць другого товару, щоб замінити малий обсяг першого товару, який вибув. Множину тих наборів товарів, які може придбати споживач, маючи дохід обсягом  $M$  називають *бюджетною множиною*, тобто  $B = \{x : p \in M\}$ , де  $p = (p_1, \dots, p_n)$  - вектор-рядок цін.

Опишемо модель поведінки споживача. У теорії споживання вважається, що споживач завжди прагне максимізувати свою корисність, і єдине, що його стримує, - це

$$\text{обмежений дохід: } \max_{x \in B} u(x) = \max_{px \in M} u(x) \quad (5)$$

Ця задача на умовний екстремум приводиться до знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа:  $L(x) = u(x) - \lambda(px - M)$ . Необхідні умови

$$\text{локального екстремуму: } \sum_{j=1}^n p_j x_j^* = M, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i^*) - \lambda p_i = 0, i=1, \dots, n \quad (6).$$

Це

дійсно визначає точку максимуму, бо матриця  $(u)$  - від'ємно визначена. З останньої рівності бачимо, що споживач зафіксованого доходу так обирає набір  $x^*$ , що в цій точці відношення граничної корисності дорівнює відношенню цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} : \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{p_{n-1}}{p_n} \quad (7)$$

Якщо розв'язати дві останні рівності відносно  $x^*$  отримаємо функцію попиту споживача:  $x^* = x^*(p, M)$  (8)

Якщо ціну товару позначити через  $p$ , а попит на нього в натуральних одиницях - через  $Q$ , то, як відомо, зі збільшенням ціни товару попит на нього має спадати, що можна записати як  $Q = f(p)$ , де  $f(p)$  - спадна функція. Залежність може бути,

$$\text{наприклад, такою: } Q = \frac{600}{11 + p^2}$$

Відповідність між ціною товару та попитом на нього може задаватися таблицею (табл.1).

Таблиця 1.

Ціна товару, грн.	Попит, шт.	Виручка, грн.
0,5	100	50
1	80	80
1,5	66,7	100
2	57,1	114

У економічних дослідженнях досить часто відповідно до поставленої задачі незалежна величина може розглядатися як залежна і навпаки.

У випадку залежності ціни від попиту  $Q$  є незалежною змінною, а  $p$  - залежною:  $p = \varphi(Q)$ .

При цьому функція  $p = \varphi(Q)$  є оберненою до функції  $Q = f(p)$ . Легко підрахувати, що  $p = \sqrt{\frac{600}{Q}} - 11$

**Висновки та перспективи подальших наукових досліджень.** Економіко-математичне моделювання є актуальним методом дослідження та прогнозування економічних процесів. Він за допомогою комп'ютерної техніки, програмного забезпечення та інтелектуальних здібностей спеціалістів, без значних матеріальних затрат, сприяє вдосконаленню управління підприємством для покращення його фінансового становища.

У процесі моделювання та прогнозування попиту і споживання подальшої розробки потребує інструментарій генерування точних і розпливчастих шаблонів, що визначають характерні профілі клієнтів, пошуку стереотипних схем і моделей поведінки, аналізу схожості, дослідження часових шаблонів, виявлення операторів - класифікації, упорядкування, пошуку закономірностей тощо.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бідник Н.Б. Використання математичних методів і моделей в економіці, фінансах / Н.Б. Бідник // Науковий вісник НЛТУ України. – 2008. – №18.6. – С. 258.
2. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навчальний посібник / В.В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.
3. Гончаренко Я.В. Деякі проблеми навчання математичної статистики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / Я.В. Гончаренко, М.В. Працьовитий // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Вип. 35. – Донецьк: ДонНУ, 2011. – С. 53-57.
4. Здрок В.В. Прикладна економетрика: навчальний посібник у 2-х ч. / В.В. Здрок // Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка. – Ч.1. Симультивні моделі. – 2010. – С. 112.
5. Іванченко І.Ю. Моделювання економічних ризиків і ризикових ситуацій / І.Ю. Іванченко // Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури. – 2007. – С. 344

6. Лаврінський Г.В. Моделювання економічної динаміки / Г.В. Лаврінський, О.С. Пшенишнюк, С.В. Устенко, О.Д. Шарапов. – К.: Вид-во «Атіка». – 2006. – С. 276.

7. Нельсон Р. Эволюционная теория экономических изменений / Р. Нильсон, С. Уинтер. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 474 с.

8. Малахова Л.И. Правоведение: краткий курс лекций / Л.И. Малахова. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 270 с.

Надійшла до редакції 24.12.2015

**Мартыненко Е.В., Мащенко А.И. Математические методы и модели потребительского поведения.**

*В статье рассмотрены основные вопросы эконометрии, что устанавливает непосредственную связь экономических понятий и процессов с математикой. Охарактеризованы основные проблемы экономики, которые до настоящего времени не имеют решений без вмешательства математических моделей. Также исследованы вопросы математических методов, которые активно используются в экономической науке. Установлено преимущества экономико-математических моделей. Рассмотрена теория поведения потребителя. Основное внимание уделено математическим методам и моделям потребительского поведения. Данная статья является полезной для практического использования в экономических исследованиях потребительского поведения и спроса.*

**Ключевые слова:** модель, математическое и экономико-математическое моделирование, эконометрия, метод, поведение потребителя, поверхность безразличия, бюджетная множество.

**Martynenko O., Mashchenko G. Mathematical methods and models of consumer behavior.**

*In the article examines the main issues econometrics, establishing a direct connection economic concepts and processes of mathematics. We characterized the main problems of the economy, which to this day have no solutions without the intervention of mathematical models. Also explored question of mathematical methods that are widely used in economics. Established benefits of economic and mathematical models. We examined the theory of consumer behavior. Special attention is paid of mathematical methods and models of consumer behavior. This article is useful for practical use in economic studies consumer behavior and demand.*

**Key words:** model, mathematical and economic and mathematic modeling, econometrics method, consumer behavior, indifference surfaces, the budget set.

УДК 37.016:517.1

С. В. Музиченко

Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка

## ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ У СТАРШОКЛАСНИКІВ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ

*Стаття присвячена проблемі формування у школярів складних абстрактних математичних понять. До таких понять належить поняття границі. Це поняття має велике значення для якісного засвоєння математичного аналізу, основою якого є операція граничного переходу. У статті вказані об'єктивні причини, через які учні відчують труднощі у сприйнятті поняття границі. Однією з таких причин є*