Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Погребний В.Д. Про обмеженість множин: різні аспекти / Валерій Погребний // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 2 (5). – С. 58-64.

Pogrebnoy V. About Limitation Of Sets: Various Aspects // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2015. – Issue 2 (5). – P. 58-64.

УДК 517.6

Валерій Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ МНОЖИН: РІЗНІ АСПЕКТИ

Метою даної статті є розгляд різних аспектів важливого математичного поняття – обмеженості множин. Це поняття дійсно має різні аспекти, що відображають у різних ситуаціях різні властивості множин, що розглядаються у математиці.

Першоджерелом поняття обмеженості, звичайно, є геометрія, тут маємо наглядний аспект цього поняття. Але строге формулювання вже повинно використовувати строгі математичні поняття і факти. Отже:

1. Множина A на прямій обмежена, якщо вона входить в деякий скінчений проміжок: $A \subset \langle a, b \rangle, a, b \in R, a < b$.
2. Множина A на площині обмежена, якщо входить в деякий круг: $A \subset \omega_2(0, r)$ (круг можна брати відкритим чи замкненим).
3. Множина A у просторі обмежена, якщо входить у деяку кулю: $A \subset K(0, r)$ (цю кулю теж можна брати відкритою чи замкненою).

Математика вимагає переходу до більш загальних просторів, які є моделями більш складних реальних процесів. Аналіз вищенаведених геометричних аспектів обмеженості показує, що основою всюди є відстань між точками:

1. На прямій, відстань між точками $M(x)$ та $P(y)$ є число $\rho(M, P) = |x - y|$.
2. На площині: $M(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$, $\rho(M, P) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
3. У просторі: $M(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$,
$$\rho(M, P) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Природнім узагальненням є розгляд $n-$вимірного евклідового простору $E^n, n \geq 1$, що є узагальненням прямої, площини, геометричного тривимірного простору. Узагальненням геометричної відстані є метрика $\rho(M, P) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (v_1 - v_2)^2}$, де $M(x_1, y_1, \ldots, v_1)$, $P(x_2, y_2, \ldots, v_2)$.

Обмеженість множини означає, що $A \subset K(O, r)$, де $O(0,0,...,0), r > 0$, куля визначається умовою $K(0, r) = \{M \in E^n : \rho(M, 0) \le r\}$.

Можливість дальшого узагальнення достатньо прозора: розглядати ті множини, де можна ввести «відстань» - метрику іншим, неевклідовим способом. Звичайно, ця метрика повинна задовольняти деякі умови – аксіоми метрики, джерела яких, знову таки в геометрії:

M1. Невід'ємність. $\forall M, P[\rho(M, P) \ge 0]$.

M2. Віддільність. $\rho(M, P) = 0 \Leftrightarrow M = P$.

M3. Симетричність. $\forall M, P[\rho(P, M) = \rho(M, P)]$.

M4. Нерівність трикутника. $\forall M, P, T[\rho(M, T) \le \rho(M, P) + \rho(P, T)]$.

Це дає можливість у одержаній структурі (X, ρ), яка має назву метричного простору, розглядати кулі і обмеженість множин, хоча наглядності, як у геометрії, вже немає. Наприклад, у метричному просторі $C_L[a, b]$ функцій неперервних на $[a, b]$ з метрикою $\rho(f, g) = (R)\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ можна розглядати обмежені множини функцій.

Модуль дійсного числа, через який розглядається відстань на прямій має, крім метричного аспекту $|x| = \rho(O, M)$, $M = M(x)$ і інший аспект – порядковий. В упорядкованих просторах розглядаються обмежені множини [4, с. 20]. Обмеженість множини $A \subset X$ в упорядкованому просторі X має інший смисл: A обмежена і зверху, і знизу. Тобто $\exists a \in X$, $\exists b \in X : a \le x \le b \quad \forall x \in X$. Теорія упорядкованих просторів являє собою велику і важливу математичну науку. Про цей аспект упорядкованості далі говорити не будемо, це окреме велике питання. Повернемось до метричного аспекту упорядкованості.

Поряд з порядковими структурами, головною математичною структурою є алгебраїчна, а також топологічна. Поєднанням метричної і топологічної структур є метричний лінійний простір [4, с. 22], в якому алгебраїчна і метрична структури узгоджені за допомогою аксіом, алгебраїчні операції додавання і множення на число неперервні в даній метриці:

1. $x_n \to x_0, y_n \to y_0 \Rightarrow x_n + y_n \to x_0 + y_0$

2. $\lambda_n \to \lambda_0, x_n \to x_0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$.

Прикладом метричного лінійного простору є простір S послідовностей $(a_n)_{n \in N}$ з метрикою $\rho(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}, a = (a_n)_{n \in N}, b = (b_n)_{n \in N}$.

В метричних лінійних просторах можна також розглядати обмежені множини – по даній метриці.

Найважливішим класом метричних лінійних просторів є нормовані лінійні простори, де кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність дійсне число $\|x\|$ – його норма, що є узагальненням геометричної довжини вектора. Повинні виконуватись аксіоми норми.

N1. Невід'ємність. $\forall x \in X[\|x\| \ge 0]$

N2. Віддільність. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (нульовий вектор).

N3. Абсолютна однорідність. $\forall \lambda \in R(C) \forall x \in X[\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|]$

N4. Субаддитивність. $\forall x, y \in X[\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|]$

В цих просторах $\|x-y\|$ є метрика $\rho(x,y)$. Отже, можна розглядати обмеженість множин. $A \subset X$ обмежена, якщо $\exists \alpha_0 > 0 : \|x\| \le \alpha_0 \ \ \forall x \in A$.

Узагальненням метричних лінійних просторів є топологічні лінійні простори. Це поєднання лінійної і топологічної структур. Топологічні простори – це простори, у яких кожній точці відповідає система її околів, що задовольняє певні аксіоми. Топологічну структуру можна ввести різними способами, наприклад, аксіоматично задавши відкриті множини [3, с. 79]. Топологічний лінійний (або векторний) простір – це лінійний простір, що одночасно є і топологічним простором, і обидві структури узгоджені аксіомами: лінійні операції $x+y$, λx неперервні в вихідній топології $\tau(X)$. В топологічних лінійних просторах означається своє поняття обмеженої множини. Розглянемо його.

Нехай X – топологічний лінійний простір, $M \subset X$. Кажуть, що множина M поглинає множину T, якщо існує число $\lambda_0 > 0$ таке, що $T \subset \lambda M$ при всіх λ таких, що $|\lambda| \ge \lambda_0$. Множина M називається обмеженою, якщо вона поглинається всіма околами $V(\theta)$ нульового елемента [5, с. 69].

Відомо [3, с. 159], що в нормованих лінійних просторах обмеженість множини в означеному смислі співпадає з обмеженістю по нормі. Цей факт вказується в літературі, але доведень у доступних джерелах не наводиться. Тому доведемо цей принциповий результат.

Теорема 1. В нормованих лінійних просторах множина обмежена у розумінні топологічного лінійного простору (ТЛП) тоді і тільки тоді, коли вона обмежена по нормі.

Доведення. 1). Нехай множина M обмежена у розумінні ТЛП. Покажемо, що вона обмежена по нормі. Околи $V(\theta)$ достатньо розглядати як кулі $K(\theta,r) = \{x : \|x\| < r\}$. Якщо розглядати $\lambda V(\theta)$, то одержимо $\{x : x \in \lambda K(\theta,r)\}$. Це є $K(\theta,|\lambda| r)$. Якщо множина M не обмежена по нормі, то для $K(\theta,r)$ не вдасться знайти $\lambda_0 > 0 : |\lambda| \ge \lambda_0 \Rightarrow M \subset \lambda K(\theta,r)$, оскільки M має елементи з як завгодно великою нормою.

2). Нехай M обмежена по нормі. Тоді $\|x\| \le \alpha_0$ для всіх $x \in M$ і при достатньо великих $|\lambda|$ буде $M \subset \lambda K(\theta,r)$.

Теорему доведено.

Іншою, еквівалентною характеристикою обмеженості множини [5, с. 40] є така: $\forall (\lambda_n)_{n\in N} : \lambda_n \to 0 \wedge \forall (x_n)_{n\in N} : x_n \in M \Rightarrow \lambda_n x_n \to \theta$ в топології $\tau(X)$. Доведення еквівалентності обох підходів є у [5, с. 40, 41]. Дамо для нормованих лінійних просторів незалежне доведення для зв'язку збіжності і обмеженості по нормі.

Теорема 2. Нехай X – нормований лінійний простір, $M \subset X$. Множина M обмежена по нормі тоді і тільки тоді, коли виконана умова:

$$\forall (\lambda_n)_{n\in N}, \lambda_n \in R(C) : \lambda_n \to 0 \wedge \forall (x_n)_{n\in N} : x_n \in M \Rightarrow \lambda_n x_n \to \theta .$$

Доведення. 1). Нехай множина M обмежена по нормі і дані дві вказані послідовності $(\lambda_n)_{n\in N}$, $(x_n)_{n\in N}$. Тоді $\exists \alpha_0 > 0 : \|x\| \le \alpha_0 \quad \forall x \in M$. Зокрема, $\|x_n\| \le \alpha_0 \ \forall n \in N$. Оскільки $\lambda_n \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : n > n_0 \Rightarrow |\lambda_n| < \dfrac{\varepsilon}{\alpha_0}$. Розглянемо послідовність $(\lambda_n x_n)_{n\in N}$. Нехай $n > n_0$. Тоді $\|\lambda_n x_n\| = |\lambda_n|\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{\alpha_0} \cdot \alpha_0 = \varepsilon$. Отже, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Rightarrow \|\lambda_n x_n\| < \varepsilon$. Це і означає, що $\lambda_n x_n \to \theta$ в топології $\tau(X)$.

2). Нехай для множини M виконується вказана умова для послідовностей. Покажемо, що M обмежена по нормі. Відомо, що власно збіжна послідовність $(\lambda_n)_{n\in N}$ обмежена: $\exists l_0 > 0 : |\lambda_n| < l_0 \ \forall n \in N$. Аналогічно, послідовність $(\lambda_n x_n)_{n\in N}$ обмежена: $\exists \beta_0 > 0 : \|\lambda_n x_n\| < \beta_0 \ \forall n \in N$. Якщо б M була б не обмежена по нормі, то в M були б елементи з як завгодно великими нормами і умова $\|\lambda_n x_n\| < \beta_0$ не могла б виконуватись для всіх $x_n \in M$. Отже, M обмежена по нормі.

Теорему доведено.

Слід відзначити, що в метричних лінійних просторах цей результат уже не зберігається: обмеженість у розумінні ТЛП може не співпадати з обмеженістю по метриці. Наприклад, так є у просторі послідовностей $\Lambda = R^{\infty}$ (або C^{∞}) [3, с. 159]. Околи точок у цьому просторі $V(k_1, k_2, ..., k_n; \varepsilon)$ визначаються $k_1, k_2, ..., k_m \in N, \varepsilon > 0$ умовою: $|x_{k_i}| < \varepsilon,\ i = 1,2,...,m$. $x = (x_n)_{n\in N}$ – дана послідовність.

Таким чином, обмеженість множин у ТЛП може бути охарактеризована як у термінах околів, так і в термінах збіжності послідовностей в даній топології. Але далі природнім чином виникає питання: обмеженість множин характеризується збіжністю послідовностей, а, з іншого боку, відомо, що збіжність послідовностей не є адекватною топологічній структурі. Необхідні більш складні конструкції збіжності – фільтри або напрямленості [6, с. 97]. Будемо використовувати напрямленості.

Напрямленість – це узагальнення послідовностей. Послідовність $(x_n)_{n\in N}$ є відображення множини N натуральних чисел в деяку множину X. Множина N, як відомо, лінійно упорядкована. Нехай A - упорядкована (лінійно чи частково_ множина. Вона називається напрямленою, якщо $\forall \alpha, \beta \in A \exists \gamma \in A : \gamma \ge \alpha \wedge \gamma \ge \beta$. Функція $S : A \to X$ на напрямленій множині називається напрямленістю. Запис: $S = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Послідовність є частинним випадком напрямленості. Збіжність послідовностей у топологічних просторах визначається умовою: $x_\alpha \to x_0 \Leftrightarrow \forall V(x_0) \exists \alpha_0 \in A : \alpha \ge \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in V(x_0)$. $V(x_0)$ – довільний окіл точки x_0.

Виникає проблема: якщо в умові обмеженості множини в ТЛП замінити послідовності на напрямленості, то це буде те ж поняття чи інше. Отже, означимо таке поняття.

Означення. Множина $M \subset X$ в ТЛП називається посилено обмеженою, якщо для кожної напрямленості чисел $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ і для кожної напрямленості елементів $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $x_\alpha \in M$ виконується умова $\lambda_\alpha x_\alpha \to \theta$ в топології $\tau(X)$.

Виясними зв'язок обмеженості і посиленої обмеженості

Теорема 3. Множина $M \subset X$ в ТЛП є посилено обмеженою тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

Доведення. 1). Якщо M посилено обмежена, то вона обмежена, оскільки послідовність є частинним випадком напрямленості.

2). Нехай множина M обмежена. Покажемо, що вона посилено обмежена. Припустимо супротивне. Тоді існує напрямленість чисел $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$, збіжна до θ і напрямленість елементів $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ множини M, такі що напрямленість $(\lambda_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in A}$ не збігається до θ в топології $\tau(X)$. Отже, знайдеться такий окіл $V_0(\theta)$ нульового елемента, що $\forall\alpha_0\in A\exists\alpha'\in A:\alpha'\geq\alpha_0$, $\lambda_{\alpha'}x_{\alpha'}\in V_0(\theta)$. Позначимо $B=\{\alpha\in A:\lambda_\alpha x_\alpha\bar{\in}V_0(\theta)\}$. Покажемо, що B конфінальна в A. Порядок у множині B індукований порядком у множині A. B – напрямлена. Дійсно, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in B\exists\alpha_0\in A:\alpha_3\geq\alpha_1,\alpha_3\geq\alpha_2$. Для $\alpha_3\in A\exists\alpha_4\in B:\alpha_4\geq\alpha_3$ за властивістю околу $V_0(\theta)$. Тоді $\alpha_4\geq\alpha_1$, $\alpha_4\geq\alpha_2$ і множина B конфінальна в A. Це означає, що $(\lambda_{\alpha'})_{\alpha'\in B}$ є конфінальна піднапрямленість напрямленості $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$. Оскільки збіжність чисел задовольняє другу аксіому класу збіжності [2, с. 107], то $\lambda_{\alpha'}\to 0$. Виберемо її піднапрямленість $(\lambda_{\alpha'_n})_{n\in N}$, що є послідовністю. Вона збіжна до нуля по тій же причині. Розглянемо послідовність елементів $(x_{\alpha'_n})_{n\in N}$ множини M. За побудовою, $\lambda_{\alpha'_n}x_{\alpha'_n}\notin V_0(\theta)$. Це означає, що $\lambda_{\alpha'_n}x_{\alpha'_n}\overline{\to}\theta$. Отже, M необмежена. Протиріччя.

Теорему доведено.

Таким чином, узагальнена посилена обмеженість в ТЛП співпадає зі звичайною обмеженістю і використання напрямленостей не дає нового поняття, хоча послідовності не адекватні топології. Причиною цього явища, мабуть, є той факт, що збіжність чисел повністю характеризується послідовностями, а в умові обмеженості послідовність $(\lambda_n)_{n\in N}$ грає більш визначальну роль, ніж послідовність $(x_n)_{n\in N}$. Це дозволяє зробити висновок, що обмеженість тісно пов'язана з зчисленістю. Це проявляється і в критерії нормуємості ТЛП: ТЛП нормуємий тоді і тільки тоді коли він локально обмежений і локально опуклий, і в тому, що локально обмежені ТЛП повністю характеризуються p-однорідною нормою – узагальненням норми $(\|\lambda x\|=|\lambda|^p\|x\|, 0<p<1)$ [7]. Зв'язки різних аспектів ТЛП з зчисленістю являють значний інтерес, оскільки зчислені множини все ж таки, мабуть, найбільш вивчені серед нескінчених множин.

Список використаних джерел

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б.З. Вулих. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 408 с.
2. Келли Дж. Л. Общая топология / Дж. Л. Келли. – М.: Наука, 1968. – 384 с.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
4. Крейн С.Г. и др. Функциональный анализ. СМБ / С.Г. Крейн и др. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
5. Робертсон А.П. Топологические векторные пространства / А.П. Робертсон, В.Дж. Робертсон. – М.: Мир, 1967. – 259 с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
7. Zelasko W. Metric generalisations of Banach algebras // Rosprawy Matematycne, Warszawa, 47, 1965.

Анотація. Погребний В.Д. Про обмеженість множин: різні аспекти.

Поняття обмеженості множини є одним з найважливіших математичних понять. В класичній математиці розглядаються обмежені множини на прямій, на евклідовій площині, у тривимірному евклідовому просторі. У сучасній математиці це поняття узагальнюється і вивчається у різних аспектах. Сучасна математика є наукою про структури. З точки зору цих основних структур, обмеженість можна розглядати в метричному, порядковому і тополого-алгебраїчному аспектах. В деяких просторах обмеженість з метричної точки зору співпадає з обмеженістю з тополого-алгебраїчної точки зору, а в деяких не співпадає. Ці проблеми розглядаються у даній роботі. Також аналізується поняття обмеженості множин в топологічних лінійних просторах. Це поняття може бути введене через збіжність послідовностей. В той же час, як відомо, структура топологічного лінійного простору не адекватна збіжності послідовностей. Природньо, виникає проблема: якщо ввести нове поняття обмеженості, використовуючи апарат збіжності напрямленостей, що адекватний структурі топологічного лінійного простору, то чи одержимо ми нове поняття обмеженості множини? Ця проблема аналізується і доведено, що одержуємо те ж саме поняття обмеженості. З'ясовується причина такого явища з точки зору різного значення послідовностей чисел і послідовностей елементів множини в топологічному лінійному просторі.

Ключові слова: множина, обмеженість, простір, послідовність, напрямленість.

Аннотация. Погребной В.Д. Об ограниченности множеств: различные аспекты.

Понятие ограниченности множеств является одним из важнейших математических понятий. В классической математике рассматриваются ограниченные множества на прямой, на евклидовой плоскости, в трехмерном евклидовом пространстве. В современной математике это понятие обобщается и изучается в различных аспектах. Современная математика – это наука о структурах. С точки зрения этих основных структур, ограниченность можно рассматривать в метрическом, порядковом и тополого-алгебраическом аспектах. В некоторых пространствах ограниченность с метрической точки зрения совпадает с ограниченностью с тополого-алгебраической точки зрения, а в некоторых не совпадает. Эти проблемы рассматриваются в данной работе. Также анализируется понятие ограниченности множеств в топологических линейных пространствах. Это понятие может быть введено через сходимость последовательностей. В то же время, как известно, структура топологического линейного пространства не адекватна сходимости последовательностей. Естественно, возникает проблема: если ввести новое понятие ограниченности, используя аппарат сходимости сетей, который адекватен структуре топологического линейного пространства, то получим ли мы новое понятие ограниченности множества? Эта проблема анализируется и доказано, что получается то же понятие ограниченности. Выясняется причина такого явления с точки зрения различного значения последовательностей чисел и последовательностей элементов множества в топологическом линейном пространстве.

Ключевые слова: множество, ограниченность, пространство, последовательность, сеть.

Abstract. **Pogrebnoy V.** ***About limitation of sets: various aspects.***

The notion of limited sets is one of the most important mathematical concepts. In classical mathematics we consider bounded sets on the line, on Euclid's plane, in three-dimensional Euclidean space. In modern mathematics, this notion is generalized and studied in various aspects. Modern mathematics is a science of structures. From the point of view of these basic structures, the limitations can be considered in the metric, order and topology-algebraic aspects. In some limited spaces from a metric point of view coincides with the constraints on topology-algebraic point of view, and some do not match. These issues are discussed in this paper. It also analyzes the concept of limited sets in topological linear spaces. This concept may be introduced through the convergence sequences. At the same time, as we know, the structure of a topological linear space is not adequate for the convergence of sequences. Of course, there is a problem: if we introduce a new notion of boundedness, using the device for the convergence of nets, adequate to the structure of a topological linear space, we obtain a new notion of limited many? This problem is analysed and it is proved that we get the same concept of limited. It turns out the reason for this phenomenon from the point of view of different meanings of various number sequences and sequences of elements of a set in a topological linear space.

*Keywords**:** set, limitation, space, sequence, net.*