

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
 ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

Мельнікова О.Г. Підсумовуюча формула Ейлера та її застосування // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 4(14). – С. 225-228.

Melnikova O.G. Summary Of Eyley's Formula And Its Application .// Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 4(14). – P. 225-228.

УДК 511.34

О.Г. Мельнікова

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
 melnikova.mela@gmail.com

ПІДСУМОВУЮЧА ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація. Як відомо, підсумовуюча формула Ейлера застосовується в теорії чисел та аналізі різного типу властивостей цілих чисел. У статті розглянуто можливість застосування підсумовуючої формули Ейлера, як одного з важливих інструментів аналітичної теорії чисел, до встановлення чи доведення інших не менш важливих математичних фактів. Наведене в даній роботі доведення формули Ейлера є досить простим та зрозумілим і обґрунтовує її особливу форму.

У статті наведено приклади застосування підсумовуючої формули Ейлера при обчисленні часткових сум гармонічного ряду, а також часткових сум логарифмічного ряду і, як наслідок, отримано елементарне доведення формули Стірлінга, яку в свою чергу часто застосовують при наближених обчисленнях, зокрема границь, інтегралів, тощо, коли треба позбутися від факторіалів у певних виразах.

В роботі містяться теоретичні відомості та приклади що можуть бути використані викладачами і вчителями при підготовці й проведенні факультативних занять, а також студентами, що займаються науковою діяльністю.

Ключові слова: підсумовуюча формула Ейлера, формула Стірлінга, неперервно диференційовна функція, інтегрування частинами, часткова сума ряду.

Постановка проблеми. В аналітичній теорії чисел, особливе місце займають дослідження, пов'язані з отриманням властивостей числових функцій: суми та добутку дільників числа, функції Ейлера, функції Мебіуса тощо. У зв'язку з цим виникає необхідність представлення у більш зручному вигляді сум функцій виду

$$\sum_{n \leq x} f(n).$$

Враховуючи необхідні відомості з математичного аналізу, найпростішим випадком таких сум є суми неперервно диференційованих (тобто гладких) функцій $f(x)$, визначених для кожного дійсного значення x .

Аналіз актуальних досліджень. Підсумовуюча формула Ейлера – це формула, що дозволяє виражати дискретні суми значень функції через інтеграли від цієї функції. Зокрема, багато асимптотичних розкладів сум отримують саме через цю формулу. Вона була знайдена Леонардом Ейлером в 1732 р.. Також цим питанням займалися Йоганна Бернуллі, Крістіан Гольдбах Джеймс Стирлінг, Колін Маклорен та інші. Ця формула застосовується в теорії чисел та аналізі різного типу властивостей цілих чисел.

Мета статті. Побудувати приклади застосування підсумовуючої формули Ейлера до доведення різних важливих математичних фактів.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо наступну теорему:

Теорема 1 (Підсумовуюча формула Ейлера) [2, с. 51]. Якщо функція $f(t)$ визначена на відрізку $[y; x]$, причому $0 < y \leq x$, та має на ньому неперервну похідну, то має місце рівність

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x \{t\} f'(t) dt - \{x\} f(x) + \{y\} f(y),$$

де $\{t\}$ – дробова частина числа t , тобто $\{t\} = t - [t]$.

Доведення. Нехай $F(x) = [x] = x - \{x\}$. Тоді можна записати задану суму за допомогою інтеграла Стілтєса $\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dF(t)$. Оскільки $dF(t) = dt - d\{t\}$, то $\int_y^x f(t) dF(t) = \int_y^x f(t) dt - \int_y^x f(t) d\{t\}$. Перший із двох останніх інтегралів є доданком шуканого виразу, а другий можна перетворити, використовуючи метод інтегрування частинами. Таким чином, отримуємо потрібну рівність

$$\int_y^x f(t) d\{t\} = f(x)\{x\} - f(y)\{y\} - \int_y^x f'(t)\{t\} dt.$$

Зауваження. Наведене вище доведення є досить простим та зрозумілим і обґрунтовує особливу форму підсумовуючої формули Ейлера. Щоправда, це доведення не є достатньо елементарним, оскільки залежить від початково запропонованої ідеї та не залежить від способу представлення виразів, зокрема у вигляді інтеграла Стілтєса.

Підсумовуюча формула Ейлера застосовується в теорії чисел та аналізі різного типу властивостей цілих чисел. Розглянемо її застосування на прикладі обчислення часткових сум гармонічного ряду.

Нехай $S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$. За підсумовуючою формулою Ейлера отримуємо:

$$\sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x \{t\} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)' dt + \frac{\{x\}}{x} + 1 = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\{t\} dt}{t^2} + \frac{\{x\}}{x} + 1 = \ln x - I(x) + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Щоб обчислити інтеграл $I(x)$, спрямуємо верхню межу x до нескінченності та оцінимо отриманий інтеграл. Оскільки підінтегральна функція обмежена функцією $\frac{1}{t^2}$, то інтеграл $I(x)$ є абсолютно збіжний, а отже, дорівнює деякій сталій величині I . Тоді отримуємо

$$I(x) = \int_1^{\infty} \frac{\{t\} dt}{t^2} - \int_x^{\infty} \frac{\{t\} dt}{t^2} = I - \int_x^{\infty} \frac{\{t\} dt}{t^2} = I + O\left(\int_x^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = I + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \geq 1).$$

Таким чином, ми показали, що $\forall x \geq 1 \quad \sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} = S(x) = \ln x + 1 - I + O\left(\frac{1}{x}\right)$. Це означає, зокрема, що $S(x) - \ln x$ при $x \rightarrow \infty$ збігається до числа $1 - I$. Оскільки, за означенням, $\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} (S(x) - \ln x)$, то отримаємо $1 - I = \gamma$. Отже, отримано наступний результат.

Теорема 2. Для кожного $x \geq 1$ має місце рівність:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

де $\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \ln x \right) \approx 0,5772$ – стала Ейлера.

Наступний результат ілюструє використання формули Ейлера у доведенні важливих формул, зокрема у виведенні формули Стірлінга.

Теорема 3. Має місце наступна формула:

$$\sum_{n \leq N} \ln n = N(\ln N - 1) + \frac{1}{2} \ln N + c + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (N \in \mathbb{N}),$$

де c – деяка константа.

Доведення. Нехай $S(N) = \sum_{n \leq N} \ln n$. Застосовуючи підсумовуючу формулу Ейлера, і беручи до уваги, що $\{N\} = 0$, оскільки N – ціле число, отримуємо

$$S(N) = I_1(N) + I_2(N),$$

де

$$I_1(N) = \int_1^N (\ln t) dt = t(\ln t - 1) \Big|_1^N = N \ln N - N + 1,$$

$$I_2(N) = \int_1^N \left(\frac{\{t\}}{t} \right) dt = \int_1^N \left(\frac{1}{2t} \right) dt + \int_1^N \left(\frac{\rho(t)}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln N + I_3(N), \quad \rho(t) = \{t\} - \frac{1}{2},$$

а $I_3(N) = \int_1^N \left(\frac{\rho(t)}{t} \right) dt$. Таким чином, маємо:

$$S(N) = N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + 1 + I_3(N). \tag{1}$$

Далі для обчислення інтеграла $I_3(N)$ почнемо з інтегрування частинами:

$$I_3(N) = \frac{R(t)}{t} \Big|_1^N + I_4(N),$$

$$\text{де } R(t) = \int_1^t \rho(t) dt, \quad I_4(x) = \int_1^x \left(\frac{R(t)}{t^2} \right) dt.$$

Оскільки $\rho(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$ періодична функція з періодом 1, то $|\rho(t)| \leq \frac{1}{2}$ для всіх t дійсних, а оскільки

$$\int_k^{k+1} \rho(t) dt = 0 \text{ для будь-якого цілого } k, \text{ то } R(t) = 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли } t \text{ ціле число, і } |R(t)| \leq \frac{1}{2} \text{ для всіх } t.$$

Отже, доданки $\frac{R(t)}{t}$ зникають при $t = 1, t = N$, і ми маємо $I_3(N) = I_4(N)$. Тепер інтеграл $I_4(N)$ збігається при

$x \rightarrow \infty$, оскільки його підінтегральна функція обмежена $|R(t)|t^{-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)t^{-2}$, а тому маємо:

$$I_4(N) = I - \int_N^{\infty} \frac{R(t)}{t^2} dt = c - O\left(\int_N^{\infty} \frac{1}{t^2} dt\right) = c + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\text{де } c = \int_1^{\infty} \frac{R(t)}{t^2} dt.$$

Отже, $I_3(N) = I_4(N) = c + O\left(\frac{1}{N}\right)$ і, підставляючи цей вираз в рівність (1), отримуємо твердження теореми.

Використовуючи отриману вище оцінку, спробуємо довести формулу Стірлінга для $n!$

Висновки. Для закріплення результату пропоную розглянути наступний наслідок.

Наслідок 1 (Формула Стірлінга). Якщо n натуральне число, то

$$n! = C \sqrt{nn^n} e^{-n} \left(1 + O\left[\frac{1}{n}\right] \right),$$

де C – деяка стала.

Доведення. Дійсно, Оскільки $n! = \exp\left(\sum_{k \leq n} \ln k\right)$, то за теоремою 3 має місце рівність:

$$n! = \exp\left\{ n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + c + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Тоді доведення наслідку зводиться до оцінки правої частини при сталій $C = e^c$.

Для визначення константи C можна використати формулу Валліса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} [n!]^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)}.$$

Прологарифмувавши цю рівність, маємо

$$\begin{aligned} \ln \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ 4n \ln 2 + 4 \ln(n!) - 2 \ln[(2n)!] - \ln(2n+1) \} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 4n \ln 2 + 4 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + C \right] - 2 \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \ln(2n) - 2n + C \right] - \ln(2n+1) \right\} = -2 \ln 2 + 2C \end{aligned}$$

де $C = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$, і в результаті цього отримуємо

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-n} \left[1 + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \dots \right] = \sqrt{2\pi} \sqrt{nn^n} e^{-n} \left(1 + O\left[\frac{1}{n}\right] \right).$$

Це і є формула Стірлінга. Автором цієї формули вважається Абрахам де Муавр (1667-1754), у роботі якого «Miscellanea Analytica» (1730 р.) вперше з'явилася ця формула. Однак в силу багатьох причин вона відома саме як формула Стірлінга, хоча Джеймс Стірлінг (1692–1770) лише показав, що арифметична константа у формулі Муавра дорівнює $\sqrt{2\pi n}$. Формула Стірлінга часто використовується у наближених обчисленнях. За її допомогою неважко, наприклад, наближено обчислити значення $n!$, зокрема

$$100! \approx 9.33 \cdot 10^{157}, \quad 1000! \approx 4.02 \cdot 10^{2567}, \quad 10000! \approx 2.85 \cdot 10^{35659}.$$

Також цю формулу зручно застосовувати при обчисленні границь, коли треба «позбутися» від факторіалів. Окрім звичайного факторіала $n!$ існують багато інших (подвійні, кратні, спадні, зростаючі факторіали, прайморіали, суперфакторіали та ін.).

У статті була розглянута можливість застосування підсумовуючої формули Ейлера. Наведене доведення, яке обґрунтовує її особливу форму. Підсумовуюча формула Ейлера застосовується в теорії чисел та аналізі різного типу властивостей цілих чисел. Наведений приклад її застосування в доведенні формули Стірлінга.

Список використаних джерел

1. Д.Грін, Д.Кнут: Математические методы анализа алгоритмов М.: Мир, 1987, 120 стр.
2. A. J. Hildebrand Introduction to Analytic Number Theory. – Math 531 Lecture Notes, Fall 2005 Department of Mathematics, University of Illinois.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.1. М.: ГИФМЛ, 1962. – 464 с.

References

1. D. Greene, D. Knuth: Mathematical methods of analysis of algorithms M.: Mir, 1987, 120 pp. (in Russian).
2. A.J. Hildebrand Introduction to Analytic Number Theory Math 531 Lecture Notes, Fall 2005 Department of Mathematics University of Illinois (in English).
3. Berezin IS, Zhidkov NP Computational methods, T.1. Moscow: GIFML, 1962. – 464 pp. (in Russian).

SUMMARY OF EYLER'S FORMULA AND ITS APPLICATION

Melnikova O.G.

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. As you know, summing Euler's formula is applied in the theory and analysis of different types of properties of integers. The article considers the possibility of using the summing formula of Euler, as one of the important tools of analytic number theory, to establish or bring other important mathematical facts. Given in this work a proof of Euler's formula is quite simple and straightforward and justifies its special form.

The article presents examples of application of the summing Euler's formula in the calculation of the partial sums of the harmonic series, and partial sums of the logarithmic series and, as a consequence, the obtained elementary proof of Stirling's formula, which in turn is often used in approximate calculations, in particular borders, integrals, etc., when you need to get rid of the factorials in certain expressions.

The work contains theoretical information and examples which can be used by instructors and teachers in the preparation and conduct of extracurricular activities, and students engaged in scientific activities.

Key words: summation of Euler formula, Stirling's formula, continuously differentiable function, integration by parts, partial sum of the series.