Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Сверчевська І.А. Історико-генетичний підхід у фаховій підготовці майбутніх учителів математики// Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 4(14). – С. 82-86.

Sverchevska I. A Combined Historical And Genetic Approach In Training Of Teachers Of Mathematics // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 4(14). – Р. 82-86.

УДК 511:378.147

І.А. Сверчевська
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна
iryna_sver@ukr.net

ІСТОРИКО-ГЕНЕТИЧНИЙ ПІДХІД У ФАХОВІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

***Анотація**. Історико-генетичний підхід розглядається як один з методів навчання. Цей метод передбачає, що навчання повинно повторювати історичний шлях виникнення понять, математичних теорій, методів доведення тверджень.*

На практичних заняттях з алгебри цей підхід може бути представлений через історичні задачі. Такий підхід не лише сприяє підвищенню інтересу студентів до вивчення курсу алгебри, а й дає можливість більш ґрунтовно та свідомо засвоювати математику, тобто вдосконалювати фахову підготовку майбутнього вчителя математики до професійної діяльності.

Виокремлено деякі розділи курсу алгебри та до них запропоновано історичні задачі. Зокрема, запропоновано задачі, в розв’язанні яких з’являються та використовуються комплексні числа. До розділу про застосування результанту для розв’язування систем нелінійних рівнянь підібрано системи та розв’язано їх авторськими і сучасними способами. У темі про розв’язування алгебраїчних рівнянь у радикалах послідовність визначних задач дає можливість пройти історичний шлях розв’язування рівнянь другого і третього степеня від геометричного методу до словесного, який привів до відкриття формул.

При цьому рекомендується знайти доцільне співвідношення історичного і логічного підходу при вивченні різних розділів курсу "Алгебри і теорії чисел".

***Ключові слова**: історико-генетичний підхід, алгебра, історичні задачі, комплексні числа, алгебраїчні рівняння, нелінійні системи.*

Постановка проблеми. Уведення елементів історії математики відіграє важливу роль у навчанні математики. Використовуючи різні методи навчання, доцільно звернути увагу на історико-генетичний метод. Математичні поняття та ідеї розглядаються у процесі їх виникнення і розвитку. Це сприяє розуміння студентами, як пов’язані шкільні знання з математики з тими теоріями, що вивчаються у вищому навчальному закладі, готує їх до майбутньої професійної діяльності. На практичних заняттях з алгебри історико-генетичний підхід може бути представлений через історичні задачі. Це задачі з історичних пам'яток, задачі, створені відомими математиками, задачі з деяких журналів, підручників. Ці задачі сприяють не лише розвитку інтересу до вивчення предмету, а й піднімають культурний рівень, дають можливість краще засвоювати поняття. Оволодіння методами розв’язування історичних задач, їх аналіз дає можливість запропонувати власні методи й авторські задачі та надалі застосовувати ці практичні навички в своїй педагогічній та науковій діяльності.

Аналіз актуальних досліджень. Ідея історико-генетичного підходу у викладанні предмету алгебри була здійснена англійським математиком Джоном Валлісом у роботі "Історичний і практичний трактат з алгебри". Природний історичний підхід застосував французький математик А. К. Клеро в підручнику "Початки алгебри", який у свій час був у всіх, хто займався математикою.

Визначний математик М. В. Остроградський був чудовим педагогом і математиком-методистом. Він вважав, що потрібно ширше й частіше подавати історію наукових винаходів та історію їхніх творців. У книзі "Міркування про викладання" Остроградський стверджує, що біографії людей, корисних для науки є одним з методів для привернення уваги учнів.

Історик математики В. В. Бобинін у роботі "Філософське, наукове і педагогічне значення історії математики" робить висновок, що розумовий розвиток дитини в основному проходить ті ж етапи, що і розумовий розвиток усього людства, тому викладання науки повинно йти тим же шляхом, яким ішла в своєму розвитку сама наука.

Активну роль у вирішенні проблем, пов'язаних з викладанням математики відіграв відомий учений Б. В. Гнеденко. На його думку, оскільки вивчення історії математики сприяє розвитку мислення, то необхідно введення елементів історії математики при навчанні учнів і студентів. Причому це доцільно робити у вигляді коротких бесід, розв'язування історичних задач, знайомства з методами роботи вчених.

Практичні рекомендації та фундаментальні принципи навчання математики опублікували видатні американські математики в меморандумі, який підписали Ріхард Курант, Дьєрдь Пойа, Андре Вейль та інші. Зокрема, вони виділили генетичний метод, який на їх думку дає можливість досягти в багатьох питаннях більшого успіху, ніж наслідуючи формальну концепцію математики.

Важливе значення для здійснення історичного підходу до навчання математики мають книги історика математики Г. І. Глейзера "Історія математики в школі", математичні хрестоматії О. С. Смогоржевського для 6 – 8 класів, М. І. Кованцова для старших класів, біографічні словники О. І. Бородіна, А. С. Бугая та О. М. Боголюбова, журнали "Математика в школах України", "Математика в рідній школі".

Активними прихильниками історичного підходу були математики-методисти. О. М. Астряб виділяв ті особливості діяльності математиків, на які потрібно звертати увагу викладачеві, здійснюючи історичний підхід до теми. Г. П. Бевз розглядає елементи історизму в навчанні математики як засіб гуманізації процесу навчання. Важливими книгами для практичного застосування історико-генетичного методу є книги А. Г. Конфоровича "Колумби математики", "У пошуках інтегралу", "Визначні математичні задачі" та інші, які можна використати для історичних довідок про вчених, розв'язування історичних задач, показу того, як виникли нові поняття та математичні теорії. Роль історії математики у фаховій підготовці студентів досліджують В. Г. Бевз, Н. О. Вірченко, А. О. Розуменко. На думку Н. О. Вірченко, математика, висвітлена в історичному плані, засвоюється краще, глибше й легше. Вона виділяє ряд методичних задач, які при цьому розв'язуються. Особливості використання історико-генетичного методу навчання в курсі методики математики розглядає В. Г. Бевз. О. А. Розуменко досліджує можливості використання елементів історії математики, зокрема історичних задач, для пізнавальної мотивації студентів, розвитку критичного мислення.

У статті здійснюється історико-генетичний підхід до вивчення деяких розділів алгебри при підготовці майбутніх учителів математики. Пропонується подавати необхідний історичний матеріал через визначні математичні задачі. Послідовність розв'язування запропонованих задач відтворює шлях виникнення математичних понять, теорій методів доведень.

Метою статті є дослідження можливості застосування історико-генетичного методу до вивчення деяких розділів алгебри шляхом подання історичного матеріалу через визначні математичні задачі.

Виклад основного матеріалу. Наведемо приклади використання історико-генетичного підходу на практичних заняттях з "Алгебри і теорії чисел". При цьому ми підтримуємо висновок В. Г. Бевз про правильне співвідношення історичного та логічного в змісті завдань, які виконуються, оскільки в рамках фахової підготовки майбутнього вчителя математики необхідно забезпечити "одержання комплексу фундаментальних і гуманітарних знань" [1, с. 102].

Комплексні числа.

1. *Задача Кардано*.

Джіроламо Кардано (1501 – 1576) – італійський математик, філософ і лікар. У творі "Велике мистецтво, або про правила алгебри" опублікував формулу для коренів кубічного рівняння. Він один з перших європейських математиків допускав від'ємні корені рівнянь та уявні величини [2, с. 215].

Розкласти число 10 на такі два доданки, щоб їх добуток дорівнював 40.

Розв'язання автора. "Поділити 10 навпіл, буде 5, помножене саме на себе воно дасть 25. Потім відняти від 25 те, що одержиться при перемноженні, тобто 40, тоді залишиться (– 15). Якщо взяти від цього корінь квадратний і додати 5 та відняти 5, то одержимо частини, які при множенні дають 40. Таким чином ці частини будуть $5+\sqrt{-15}$ і $5-\sqrt{-15}$". При цьому Кардано показує, що з цими числами потрібно виконувати дії як з двочленами і покласти $-\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}=15$.

Подамо це розв'язання в сучасних позначеннях: *x* і *y* – шукані доданки, тоді $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=40 \end{cases}$.

З першого рівняння $y=10-x$, тоді підставивши в друге рівняння маємо $x^2-10x+40=0$, $x=5\mp\sqrt{25-40}=5\mp\sqrt{-15}$. Одержані доданки: $5-\sqrt{-15}$, $5+\sqrt{-15}$.

Наведена задача показує, як у математиці з'явилися комплексні числа.

2. *Задача Коші*.

Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) – французький математик, праці якого стосуються різних галузей математики. Він запропонував розглядати геометричне зображення комплексної змінної як точки, що переміщується на площині. Коші ввів терміни "модуль" комплексного числа, "спряжені" комплексні числа [2, с. 246].

Якщо перемножити між собою два цілих числа, кожне з яких є сумою двох квадратів, то одержаний добуток буде також складатися з суми двох квадратів.

Розв'язання автора. Візьмемо 4 комплекси, попарно спряжених $a+bi$, $a-bi$, a_1+b_1i, a_1-b_1i.

Знайдемо добуток всіх, перемножуючи пару комплексів: $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a_1^2+b_1^2\right)$. Якщо помножити перший на третій і другий на четвертий, то загальний добуток дорівнює: $\left(aa_1-bb_1+\left(ab_1+ba_1\right)i\right)\cdot\left(aa_1-bb_1-\left(ab_1+ba_1\right)i\right)=\left(aa_1-bb_1\right)^2+\left(ab_1+ba_1\right)^2$.

Можна запропонувати інший спосіб, розклавши суму квадратів на множники, ввівши уявну одиницю i $\left(i^2=-1\right)$.

Нелінійні системи.

1. *Задача Абу Каміла й Леонардо Фібоначчі*.

Абу-Каміл (бл. 850 – 930) народився Єгипті, працював у м. Каїрі. Це перший вчений, який писав твори з алгебри після ал-Хорезмі. Довгий час була популярна його книга "Книга про алгебру й алмукабалу", де спостерігається підвищення теоретичного рівня [2, с. 10].

Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (бл. 1170 – після 1240). Після тривалого занепаду європейської науки у XIII ст. з'являються вчені – теоретики математики. Найвидатнішим математиком цього періоду був Леонардо Пізанський. Виключну роль у поширенні в Західній Європі математичних знань мала його "Книга абака" (1202, перероблена 1228). У книзі є значна кількість задач на розв'язування нелінійних алгебраїчних систем. Розглянемо деякі з них [2, с. 289].

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\sqrt{5} \end{cases}$$

Абу Каміл робить підстановку $\dfrac{y}{x}=z$, тоді з другого рівняння визначає $z^2+1=\sqrt{5}z$, $z=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5-4}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}$. Врахувавши, що з першого рівняння $y=10-x$, отримує $\dfrac{10-x}{x}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}$, $10-x=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)x$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)x=10$, $x=\dfrac{20}{\sqrt{5}+1}=5\sqrt{5}-5$, $y=10-x=10-5\sqrt{5}+5=15-5\sqrt{5}$.

Інший корінь, якщо $z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}$, $x=15-5\sqrt{5}$, $y=5\sqrt{5}-5$ автор не розглядає.

Фібоначчі пропонує два способи. Перший: виразити з першого рівняння $y=10-x$, підставити в друге і розв'язати одержане квадратне рівняння $x^2-10x+\left(100\sqrt{5}-200\right)=0$.

Другий: використати, що $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}=1$. Нехай $\dfrac{y}{x}=z$, тоді з другого рівняння маємо $\dfrac{x}{y}=\sqrt{5}-z$. Оскільки $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}=1$, то $z\left(\sqrt{5}-z\right)=1$, $z^2-\sqrt{5}z+1=0$, $z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}$, тоді $z=\dfrac{y}{x}=\dfrac{10-x}{x}$, $\dfrac{10-x}{x}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}$. Після перетворень одержимо $x=15-5\sqrt{5}$, тоді $y=-5+5\sqrt{5}$. Інший корінь Леонардо не розглядає.

2. *Задача ал-Хорезмі*.

Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі (бл. 780 – бл. 850) – арабський математик, працював у Багдаді під час правління халіфа ал-Мамуна в Будинку Мудрості. Найважливішими є його трактати "Арифметика" й "Алгебра". Автор зібрав у своїх творах головне, що потрібно було і вченим, і діловим людям, враховуючи потреби практики. Значна увага в алгебрі ал-Хорезмі приділяється правилам розв'язування основних типів квадратних рівнянь і задачам, що зводяться до систем нелінійних рівнянь [2, с. 507].

Розділити 10 на дві частини, сума квадратів яких дорівнює 58.

Задача зводиться до системи рівнянь: $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$

Автор зводить розв’язування цієї системи до квадратного рівняння: $x^2+(10-x)^2=58$ або $2x^2+100-20x=58$. Він робить перетворення $2x^2+100=58+20x$ (ал-джебр), ділить на 2 і зводить подібні доданки $x^2+21=10x$ (ал-мукабала). Одержує рівняння типу $ax^2+c=bx$ "квадрати і числа дорівнюють кореням", для якого дає словесне правило визначення коренів.

"Поділи надвоє число коренів, це буде 5, і помнож це на рівне собі, буде 25, і відніми з цього 21, залишається 4, добудь з цього корінь – буде 2, і відніми це від половини коренів, тобто п’яти, залишається 3; це і буде корінь квадрата, який ти шукаєш, а квадрат є 9. Додай це до половини коренів, буде 7, це – корінь квадрата, який ти шукаєш, а квадрат є 49".

Словесне правило в сучасних позначеннях має вигляд: $x=5\mp\sqrt{25-21}=5\mp 2;\ x_1=3;\ x_2=7$.

ІІ спосіб. Введемо заміну $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$, тоді $x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy=(x+y)^2-2xy=$ $=\sigma_1^2-2\sigma_2$ та система матиме вигляд:

$\begin{cases}\sigma_1=10\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=58\end{cases}$; $\begin{cases}\sigma_1=10\\ 2\sigma_2=42\end{cases}$; $\begin{cases}\sigma_1=10\\ \sigma_2=21\end{cases}$. Тоді для x, y маємо $\begin{cases}x+y=10\\ xy=21\end{cases}$, звідки $x=3, y=7$ або $x=7, y=3$.

ІІІ спосіб. Використаємо загальний підхід до розв’язування систем нелінійних рівнянь із застосуванням результанта двох многочленів, що вивчається в курсі алгебри і теорії чисел. Вважаємо, що в рівняннях змінною є x, а y – константа. Впорядкуємо ліві частини рівнянь за змінною x. $\begin{cases}x+(y-10)=0\\ x^2+(y^2-58)=0\end{cases}$.

Утворимо результант у формі Сільвестра, записавши коефіцієнти першого рівняння у 2 рядки зі зсувом вправо, а у третій рядок коефіцієнти другого рівняння. $\begin{vmatrix}1 & y-10 & 0\\ 0 & 1 & y-10\\ 1 & 0 & y^2-58\end{vmatrix}=0$. Рівняння мають спільний корінь тоді і тільки тоді, коли результант дорівнює нулю. Маємо $y^2-58+(y-10)^2=0$; $y^2-10y+21=0$; $y=3$ або $y=7$. Для кожного значення змінної *y* отримаємо систему рівнянь та знайдемо значення змінної *x*. При $y=3$ маємо $x-7=0$ і $x^2-49=0$. Спільний корінь обох рівнянь $x=7$. При $y=7$ маємо $x-3=0$ і $x^2-9=0$. Спільний корінь $x=3$. Отже шукані числа 3 та 7.

Розв'язування рівнянь у радикалах.

1. *Задача ал-Хорезмі*.

Розв'язати рівняння $x^2+10x=39$.

Розв'язання. Будуємо квадрат зі стороною x і добудовуємо два прямокутники зі сторонами x та 5, одержана фігура називається "гномон" (рис. 1). Доповнюємо цей гномон до квадрата зі стороною $x+5$. Тоді площа побудованого квадрата $S=(x+5)^2$. За рис. 1 визначаємо $S=x^2+2\cdot 5x+25=x^2+10x+25$. Маємо $(x+5)^2=x^2+10x+25$. За умовою задачі $x^2+10x=39$, тоді $(x+5)^2=39+25=64$, $x+5=8$, $x=3$. Ал-Хорезмі визначає додатній корінь.

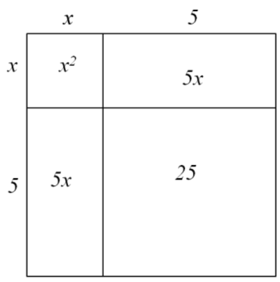

Рис. 1

2. *Задача Вієта*.

Франсуа Вієт (1540 – 1603) – французький математик, "батько алгебри". У працях Вієта алгебра стала загальною наукою про алгебраїчні рівняння, яка ґрунтується на символічних позначеннях [2, с. 101].

Розв’язати рівняння $x^2+px+q=0$ підстановкою $x=y+z$.

Авторське розв'язання. В даному рівнянні $x^2+px+q=0$ покладемо $x=y+z$. Тоді $x^2=y^2+2yz+z^2$, тому рівняння набуде вигляду: $y^2+y(2z+p)+z^2+pz+q=0$. Виберемо z так, щоб

$2z+p=0$. Тоді $z=-\frac{p}{2}$ і $z^2+pz+q=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q=q-\frac{p^2}{4}$. Отже, рівняння буде мати вигляд $y^2+q-\frac{p^2}{4}=0$, $y^2=\frac{p^2}{4}-q$. Звідки $y=\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Оскільки $x=y+z$ і $z=-\frac{p}{2}$, то $x=-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

3. *Задача О. Хайяма*.

Омар Хайям (1048 – 1131), персидський математик і поет. Він вважав, що алгебра – це теорія рівнянь. У математичному трактаті "Про доведення задач алгебри і алмукабали" він дає класифікацію алгебраїчних рівнянь першого, другого і третього степенів та геометричні побудови коренів [2, с. 500].

Розв'язати рівняння $x^3+a=cx^2$.

Рівняння розв’язувалося за допомогою параболи $y^2=\sqrt[3]{a}(c-x)$ та гіперболи $xy=\sqrt[3]{a^2}$. Коренем є абсциса точки перетину цих кривих. Зробимо перетворення цього рівняння, які обґрунтовують метод О. Хайяма. $x^3+a=cx^2$; $cx^2-x^3=a$; $x^2(c-x)\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}$; $x^2\cdot\sqrt[3]{a}(c-x)=\sqrt[3]{a^4}$. Позначимо $\sqrt[3]{a}(c-x)=y^2$, маємо $x^2y^2=\sqrt[3]{a^4}$; $xy=\sqrt[3]{a^2}$. Отже *x* і *y* визначаються з системи рівнянь:

$\begin{cases} y^2=\sqrt[3]{a}(c-x) \\ xy=\sqrt[3]{a^2} \end{cases}$, тобто як координати точки перетину параболи та гіперболи, які розглядає О. Хайям.

Висновки. Застосування історико-генетичного підходу робить навчання математики більш ґрунтовним, ефективним і цікавим. Зокрема, його доцільно застосовувати на практичних заняттях шляхом використання системи визначних історичних задач, які розв’язуються в певній послідовності й супроводжуються короткими історичними довідками. Але для збереження логічної структури курсу "Алгебра і теорія чисел" потрібно знайти доцільне співвідношення логічного та історичного підходу. В подальшому потрібно дослідити можливості використання історичного підходу в навчанні деяких розділів лінійної алгебри.

Список використаних джерел

1. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія / В. Г. Бевз. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2005. 360 с.
2. Бородін О. І., Бугай А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики / О. І. Бородін, А. С. Бугай. К.: Вища шк. , 1973. 552 с.

References

1. Bevz V. H. History of mathematics in teacher training: Monograph / V. H. Bevz. – K.: NPU imeni M. P. Drahomanova, 2005. – 360 s. (in Ukrainian)
2. Borodin O. I., Buhai A. S. Biographical dictionary of prominent figures in the field of mathematics / O. I. Borodin, A. S. Buhai. – K.: Vushcha shkola, 1973. – 552 s. (in Ukrainian)

A COMBINED HISTORICAL AND GENETIC APPROACH IN TRAINING OF TEACHERS OF MATHEMATICS

Iryna Sverchevska

Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine

Abstract. *Historical-genetic approach is considered as one of teaching methods. This method assumes that training should replicate the historical path of emergence of concepts, mathematical theories, methods of proof of claims.*

In practical classes in algebra, this approach can be represented through the historic task. This approach not only promotes increase of interest of students to studying algebra, but also gives the opportunity to more thoroughly and consciously learn mathematics, that is, to improve training of future teachers of mathematics to professional activities.

Highlighted certain sections of the algebra course and the proposed historic task. In particular, the proposed problems, whose solution appears and uses complex numbers. In the section on the use of resultants to solve systems of nonlinear equations matched system and back to their author and modern ways. The topic of solving algebraic equations by radicals a sequence of outstanding tasks gives the opportunity to the historical way of solving equations of the second and third degree by geometrical method to the verbal, which led to the discovery of formulas.

It is recommended to find a suitable ratio of the historical and logical approach in studying various sections of the course "algebra and number theory".

Key words: *combined historical and genetic approach, algebra, historical tasks, complex numbers, algebraic equations, nonlinear systems of equations.*