

Scientific journal  
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION**  
 Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)  
 ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал  
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА**  
 Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

*Василенко Я.П. Застосування апроксимаційно-ітеративного методу до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, заданих неявно // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 2(8). – С. 35-47.*

*Vasylenko Y.P. Application approximal-iterative method to the solution of ordinary differential equations defined implicitly // Physics and Mathematics Education : scientific journal. – 2016. – Issue 2(8). – P. 35-47.*

**УДК 519.62**

**Я.П. Василенко**

*Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Україна*

**ЗАСТОСУВАННЯ АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ  
 ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗАДАНИХ НЕЯВНО**

**Постановка проблеми.** В роботах [1, 2, 3] В.К. Дзядиком був запропонований і теоретично обґрунтований апроксимаційно-ітеративний метод (AI-метод) чисельно-аналітичного наближення розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь виду

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, x \in [x_0, x_0 + h].$$

Досить часто в прикладних галузях виникає необхідність розв'язувати задачі Коші, в яких залежність похідної від розв'язку задається неявно. На даний час існують чисельні методи їх розв'язування [див., напр., 4]. У даній статті досліджуються особливості застосування AI-методу для отримання наближеного аналітичного розв'язку задачі Коші

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, x \in [x_0, x_0 + h] \tag{2}$$

Як відомо із теорії звичайних диференціальних рівнянь [див., напр., 5], при виконанні наступних умов відносно функції  $F(x, y, y')$  в околі точки  $(x_0, y_0, y'_0)$ , де  $y'_0$  — один із коренів рівняння  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ :

- $F(x, y, y')$  неперервна по  $x$  і неперервно-диференційована по  $y$  і  $y'$ ;
- її похідна по  $y'$   $\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \neq 0$ ,

в достатньо малому околі точки  $x_0$  існує єдиний розв'язок  $y = \varphi(x)$  задачі Коші (1), (2), для якого  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Зауважимо, що вказані умови існування розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь мають локальний характер.

**Мета статті.** У даній статті пропонується більш конкретний опис області існування розв'язків задачі (1), (2) (подібно до статті [6] для неявних функцій) і апроксимаційно-ітеративний алгоритм його знаходження. Наведено оцінки відхилень у випадках скінченної гладкості функції  $F(x, y, y')$  та її аналітичності.

**Виклад основного матеріалу.**

**Ітераційний процес Пікара.** Нехай функція  $F$  володіє властивостями:

1)  $F(x, y, y')$  задана в області  $D = (x_0, y_0, y'_0, h, a, b)$ :

$$x_0 \leq x \leq x_0 + h, |y - y_0| \leq a, |y' - y_0'| \leq b;$$

- 2)  $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ ;
- 3)  $F(x, y, y')$  має частинні похідні до порядку  $r \geq 2$  включно, неперервні в області  $D$ ;
- 4)  $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$  в області  $D$ .

Вважаючи, що розв'язок задачі (1), який проходить через точку  $(x_0, y_0, y_0')$ , є відомим, продиференціюємо тотожність  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$  по  $x$ . В результаті отримаємо

$$F'_x(x, y(x), y'(x)) + F'_y(x, y(x), y'(x))y'(x) + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))y''(x) \equiv 0.$$

Звідси будемо мати:

$$y'' = - \frac{F'_x(x, y(x), y'(x)) + F'_y(x, y(x), y'(x))y'(x)}{F'_{y'}(x, y(x), y'(x))}.$$

Шляхом інтегрування по відрізьку  $[x_0, x]$  ( $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ ) отримаємо:

$$y'(x) = y_0' - \int_{x_0}^x \frac{F'_x(\xi, y(\xi), y'(\xi)) + F'_y(\xi, y(\xi), y'(\xi))y'(\xi)}{F'_{y'}(\xi, y(\xi), y'(\xi))} d\xi, \tag{3}$$

$$y(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \frac{F'_x(\eta, y(\eta), y'(\eta)) + F'_y(\eta, y(\eta), y'(\eta))y'(\eta)}{F'_{y'}(\eta, y(\eta), y'(\eta))} d\eta d\xi \tag{4}$$

Очевидно, що у випадку, коли  $y_0'$  є фіксованим коренем рівняння  $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ , то задача Коші (1), (2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь(3), (4).

Далі для компактності викладу введемо позначення:

$$p(x) := y'(x),$$

$$\psi(x, y(x), p(x)) := \frac{F'_x(x, y(x), p(x)) + F'_y(x, y(x), p(x))p(x)}{F'_{y'}(x, y(x), p(x))}$$

**Теорема 1.** Якщо функція  $F$  в рівнянні (1) володіє властивостями 1)–4), то існує єдиний розв'язок  $y = \varphi(x)$  задачі (1), (2), визначений на сегменті  $[x_0, x_0 + h_1]$ , де  $h_1 = \min\{h, \frac{a}{|y_0'| + \frac{Mh}{2}}, \frac{b}{M}\}$ ,  $M := \max_D |\psi(x, y, p)|$ , такий що  $\varphi'(x_0) = y_0'$ . Крім того,  $\varphi \in C_{[x_0, x_0 + h_1]}^{r+1}$ .

**Доведення.** Згідно методу Пікара (див. напр., [7]) послідовні наближення до розв'язку  $y(x)$  системи рівнянь (3), (4) (а, відповідно, і до розв'язку задачі (1), (2)) будуються за наступними ітеративними формулами:

$$y_0(x) \equiv y_0, p_0(x) \equiv y_0',$$

$$y_{v+1}(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \psi(\eta, y_v(\eta), p_v(\eta)) d\eta d\xi \tag{5}$$

$$p_{v+1}(x) = p_0(x) - \int_{x_0}^x \psi(\xi, y_v(\xi), p_v(\xi)) d\xi, v = 0, 1, 2, \dots$$

Для того щоб, перейти від ітерації  $v + 1$  до ітерації  $v + 2$ , необхідно, щоб виконувалися нерівності:

$$|y - y_0| \leq a, |y' - y_0'| \leq b \tag{6}$$

Нерівності (6) будуть виконані, якщо поставити вимогу, щоб

$$\left| y_0'(x - x_0) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \psi(\eta, y_v(\eta), p_v(\eta)) d\eta d\xi \right| \leq a,$$

$$\left| \int_{x_0}^x \psi(\xi, y_v(\xi), p_v(\xi)) d\xi \right| \leq b$$

або

$$|x - x_0| \cdot \left( |y_0'| + \frac{Mh}{2} \right) \leq a, |x - x_0| \cdot M \leq b, \tag{7}$$

де  $M := \max_D |\psi(x, y, p)|$ .

Для доведення збіжності методу Пікара і отримання оцінки відхилення нам буде зручно скористатися функцією

$$\delta_v(x) := |y_v(x) - y_{v-1}(x)| + |p_v(x) - p_{v-1}(x)|.$$

Якщо покласти  $B := \max_D \left| \frac{F'_y(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)} \right|$  і позначити через  $A$  константу Ліпшиця для функції

$\frac{F'_x(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)}$  по змінним  $y$  і  $p$ , то функція  $\psi(x, y, p)$ , буде задовольняти умову Ліпшиця по тим самим

змінним з константою  $A + B$ , тобто

$$|\psi(x, y_1, p_1) - \psi(x, y_2, p_2)| \leq (A + B)(|y_1 - y_2| + |p_1 - p_2|)$$

для довільних  $y_1, y_2$  і  $p_1, p_2$  із області  $D$ .

Зауважимо, що функція  $\frac{F'_x(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)}$  задовольняє умову Ліпшиця в силу того, що  $r \geq 2$  і  $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$

в області  $D$ .

Із (5) видно, що

$$\delta_{v+1}(x) \leq (A + B) \left\{ \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \delta_v(\eta) d\eta d\xi + \int_{x_0}^x \delta_v(\xi) d\xi \right\}, \quad v = 1, 2, \dots,$$

$$\delta_1(x) \leq \alpha |x - x_0| \cdot \left( 1 + \frac{h}{2} \right),$$

де  $\alpha = C + B|y_0'|$ ,  $C := \max_D \left| \frac{F'_x(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)} \right|$ .

Далі маємо

$$\delta_2(x) \leq \alpha(A + B) \left( 1 + \frac{h}{2} \right) \left( \frac{|x - x_0|^3}{3!} + \frac{|x - x_0|^2}{2!} \right) \leq \alpha(A + B) \frac{|x - x_0|^2}{2!} \left( 1 + \frac{h}{2} \right)^2,$$

$$\delta_3(x) \leq \alpha(A + B)^2 \left( 1 + \frac{h}{2} \right)^2 \left( \frac{|x - x_0|^4}{4!} + \frac{|x - x_0|^3}{3!} \right) \leq \alpha(A + B)^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!} \left( 1 + \frac{h}{2} \right)^3,$$

...

$$\delta_{v+1}(x) \leq \alpha(A + B)^v \frac{|x - x_0|^{v+1}}{(v + 1)!} \left( 1 + \frac{h}{2} \right)^{v+1} \leq \alpha(A + B)^v \frac{h^{v+1}}{(v + 1)!} \left( 1 + \frac{h}{2} \right)^{v+1}. \tag{8}$$

Оскільки, в силу (7) ряди

$$y_0 + \sum_{v=0}^{\infty} [y_{v+1}(x) - y_v(x)], \quad p_0 + \sum_{v=0}^{\infty} [p_{v+1}(x) - p_v(x)]$$

сходяться рівномірно на  $[x_0, x_0 + h]$  (бо мажоруються збіжними числовими рядами), то їх суми

$$y(x) = y_0 + \sum_{v=0}^{\infty} [y_{v+1}(x) - y_v(x)] = \lim_{v \rightarrow \infty} y_v(x),$$

$$p(x) = y_0 + \sum_{v=0}^{\infty} [p_{v+1}(x) - p_v(x)] = \lim_{v \rightarrow \infty} p_v(x)$$

є розв'язками інтегральних рівнянь (3), (4), причому неперервно-диференційованими на  $[x_0, x_0 + h]$ . Отримане  $y(x)$  є розв'язком задачі Коші (1), (2).

Покажемо, що знайдені функції  $y(x)$  і  $p(x)$  будуть єдиними в класах неперервно-диференційованих та неперервних функцій відповідно. Для цього припустимо, що існують, крім того, ще функції  $\bar{y}(x)$  і  $\bar{p}(x)$ , які теж задовольняють рівнянням (3), (4). Тоді

$$\begin{aligned} |y(x) - \bar{y}(x)| &\leq (A + B) \left\{ \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} (|y(\eta) - \bar{y}(\eta)| + |p(\eta) - \bar{p}(\eta)|) d\eta d\xi \right\}, \\ |p(x) - \bar{p}(x)| &\leq (A + B) \left\{ \int_{x_0}^x (|y(\xi) - \bar{y}(\xi)| + |p(\xi) - \bar{p}(\xi)|) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Нехай  $\varepsilon$  — достатньо мале число, тоді отримаємо

$$\max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |y(x) - \bar{y}(x)| \leq (A + B) \cdot \Delta \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |p(x) - \bar{p}(x)| \leq (A + B) \cdot \Delta \cdot \varepsilon,$$

де  $\Delta := \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |y(x) - \bar{y}(x)| + \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |p(x) - \bar{p}(x)|$ .

В результаті

$$\Delta \leq \Delta(A + B)\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

або

$$1 \leq (A + B)\varepsilon \left(1 + \frac{h}{2}\right), \quad (\varepsilon \leq h).$$

Але остання нерівність є неможливою, якщо взяти  $\varepsilon < \frac{1}{(A + B)\left(1 + \frac{h}{2}\right)}$ .

Зауважимо, що умова, з якої знаходиться довжина  $h_1$  відрізка існування розв'язку задачі Коші (1), (2), слідує із нерівностей (7).

Із єдиності функцій  $y(x)$  і  $p(x) = y'(x)$  слідує, що вони перетворюють рівняння (3), (4) в тотожності і, отже,  $y(x)$  має похідні до  $(r + 1)$ -го порядку включно, неперервні на  $[x_0, x_0 + h_1]$ .

*Наслідок.* Із (8) легко отримується наступна оцінка відхилення:

$$\begin{aligned} |y(x) - y_v(x)| + |p(x) - p_v(x)| &\leq \sum_{j=v}^{\infty} \delta_j(x) \leq \\ &\leq \alpha(A + B)^v \frac{h^{v+1}}{(v+1)!} \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{v+1} \leq \alpha(A + B)^v \frac{h^{v+1}}{(v+1)!} \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{v+1} \cdot e^q, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $q := (A + B)h \cdot \left(1 + \frac{h}{2}\right)$ .

**Апроксимаційно-ітеративний алгоритм.** Слідуючи роботі [2], розглянемо інтерполяційний оператор

$$A_n^0(f^0; \xi) = \sum_{i=0}^n f^0(\xi_i) l_i^0(\xi),$$

заданий на відрізку  $[-1, 1]$ , де для кожного  $n - 1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = 1$  — екстремальні точки многочлена Чебишева 1-го роду  $T_n(\xi) = \cos(\arccos \xi)$ ,  $l_i^0(\xi)$  — фундаментальні многочлени Лагранжа по вузлах  $\{\xi_i\}_{i=0}^n$ . Пересадку оператора  $A_n^0$  на сегмент  $[x_0, x_0 + h]$ , що нас цікавить, будемо здійснювати за формулами

$$\xi = -1 + \frac{2}{h}(x - x_0): [x_0, x_0 + h] \rightarrow [-1, 1],$$

$$f^0(\xi) = f^0\left(-1 + \frac{2}{h}(x - x_0)\right) = f(x), \quad x \in [x_0, x_0 + h],$$

$$A_n^0(f^0; \xi) = \sum_{i=0}^n f^0(\xi_i) l_i^0(\xi) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) =: A_n(f; x).$$

де  $x_i = x_0 + \frac{h}{2}(\xi_i + 1)$ ,  $l_i(x) = l_i^0\left(-1 + \frac{h}{2}(x - x_0)\right)$ . Звідси, зокрема, видно, що  $\|A_n\| = \|A_n^0\|$ .

Систему наближених значень  $y_{vj} \approx y(x_j)$ ,  $p_{vj} \approx p(x_j)$  для шуканих функцій  $y(x)$  і  $p(x)$  (розв'язків системи (3), (4)) в точках  $x_j = x_j(n)$  побудуємо за наступними ітеративними формулами:

$$\begin{aligned} y_{0j} &:= y_0, \quad p_{0j} := y_0', \quad j = \overline{0, n}, \\ y_{v0} &:= y_0, \quad p_{v0} := y_0', \quad v = 1, 2, \dots, \\ y_{vj} &= y_0 + y_0'(x_j - x_0) - \frac{h^2}{4} \sum_{i=0}^n \frac{F'_x(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i}) + F'_y(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i}) p_{v-1,i}}{F'_{y'}(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i})} b_{ij}, \\ p_{vj} &= y_0' - \frac{h}{2} \sum_{i=0}^n \frac{F'_x(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i}) + F'_y(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i}) p_{v-1,i}}{F'_{y'}(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i})} a_{ij}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$a_{ij} = a_{ij}(n) = \int_{-1}^{\xi_j} l_i^0(\xi) d\xi, \quad b_{ij} = b_{ij}(n) = -\left( a_{ij} \cdot \cos \frac{j\pi}{n} + \int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi) d\xi \right). \quad (11)$$

Зауважимо, що наведені в (10) числа є значеннями наступних поліномів (степенів  $n + 2$  і  $n + 1$  відповідно) в точках  $x_j = x_j(n)$ :

$$\begin{aligned} y_0(n; x) &= y_0, \quad p_0(n; x) \equiv y_0', \\ y_v(n; x) &= y_0 + y_0'(x - x_0) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot); t) dt ds = \\ &= y_0 + y_0'(x - x_0) - \sum_{i=0}^n \psi_{v-1}(n; x_i) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s l_i(t) dt ds, \\ p_v(n; x) &= y_0' - \int_{x_0}^x A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot); t) dt = y_0' - \sum_{i=0}^n \psi_{v-1}(n; x_i) \int_{x_0}^x l_i(t) dt, \quad v = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

де для скорочення позначено

$$\psi_v(n; x) := \psi(x, y_v(n; x), p_v(n; x)).$$

На основі (11), використовуючи заміну  $t = x_0 + \frac{h}{2}(\xi + 1) \Leftrightarrow \xi = -1 + \frac{2}{h}(t - x_0)$ , отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\xi_j} l_i^0(\xi) d\xi &= \int_{-1}^{\xi_j} l_i^0\left(-1 + \frac{2}{h}(t - x_0)\right) dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^{\xi_j} l_i^0(\xi) d\xi = \frac{h}{2} a_{ij}, \\ \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s l_i(t) dt ds &= \int_{x_0}^x l_i(t) \int_t^{x_j} ds dt = \int_{x_0}^x l_i(t) (x_j - t) dt = \int_{x_0}^x l_i^0\left(-1 + \frac{2}{h}(t - x_0)\right) (x_j - t) dt = \\ &= \frac{h^2}{4} \int_{x_0}^x l_i^0(\xi) (\xi_j - \xi) d\xi = \frac{h^2}{4} \left( a_{ij} \cdot \xi_j - \int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi) d\xi \right) = \frac{h^2}{4} b_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

Зауважимо, що замість оператора  $A_n^0$  можна використовувати інші підходящі суматорні оператори.

Явна формула для чисел  $a_{ij}$  отримана в роботі [2]. Вона має вигляд

$$a_{ij} = \frac{\varepsilon_i}{n} \left[ 1 - c_j + \frac{c_i}{2} (1 - c_{2j}) + \sum_{v=2}^n \varepsilon_v c_{iv} \left( \frac{c_{j(v-1)}}{v-1} - \frac{c_{j(v+1)}}{v+1} - \frac{2}{v^2-1} \right) \right],$$

де  $\varepsilon_0 = \varepsilon_n = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon_i = 1$ ,  $i = 1, n-1$  і  $c_k := \cos \frac{k\pi}{n}$ .

Для знаходження чисел  $b_{ij}$  обчислимо інтеграл  $\int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi) d\xi$ , скориставшись співвідношеннями (див. [1]),

$$l_i^0(\xi) = \frac{\varepsilon_i}{n} \left[ 1 + 2 \sum_{v=1}^n (-1)^v \cos \frac{vi\pi}{n} T_v(\xi) - (-1)^{n-i} T_n(\xi) \right],$$

$$\int_0^x T_v(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{v+1}(x)}{v+1} - \frac{T_{v-1}(x)}{v-1} \right] + \gamma_n, \quad v = 2, 3, \dots, \quad \gamma_n = const,$$

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi) d\xi &= \frac{\varepsilon_i}{n} \int_{-1}^{\xi_j} \left[ \xi + 2 \sum_{v=1}^n (-1)^v \cos \frac{vi\pi}{n} \xi T_v(\xi) - (-1)^{n-i} \xi T_n(\xi) \right] d\xi = \\ &= \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{j\pi}{n} - 1 \right) + \sum_{v=1}^n (-1)^v \cos \frac{vi\pi}{n} \cdot \int_{-1}^{\xi_j} (T_{v-1}(\xi) + T_{v+1}(\xi)) d\xi \right\} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ (-1)^{n-i} \frac{1}{2} \int_{-1}^{\xi_j} (T_{n-1}(\xi) + T_{n+1}(\xi)) d\xi \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{2j\pi}{n} - 1 \right) - \cos \frac{i\pi}{n} \int_{-1}^{\xi_j} (T_0(\xi) + T_2(\xi)) d\xi + \cos \frac{2i\pi}{n} \int_{-1}^{\xi_j} (T_1(\xi) + T_3(\xi)) d\xi \right\} + \\ &+ \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \sum_{v=3}^n (-1)^v \cos \frac{vi\pi}{n} \cdot \int_{-1}^{\xi_j} (T_{v-1}(\xi) + T_{v+1}(\xi)) d\xi - (-1)^{n-i} \frac{1}{2} \int_{-1}^{\xi_j} (T_{n-1}(\xi) + T_{n+1}(\xi)) d\xi \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{2j\pi}{n} - 1 \right) - \cos \frac{i\pi}{n} \left[ \left( 1 - \cos \frac{j\pi}{n} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} \cos \frac{3j\pi}{n} + \cos \frac{j\pi}{n} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \cos \frac{2i\pi}{n} \left[ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{2j\pi}{n} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \left( \cos \frac{4j\pi}{n} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2j\pi}{n} - 1 \right) \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \sum_{v=3}^n \frac{(-1)^v}{2} \cos \frac{vi\pi}{n} \left[ \frac{1}{v+2} (-1)^{v+2} \left( \cos \frac{(v+2)j\pi}{n} - 1 \right) - \frac{1}{v-2} (-1)^{v-2} \left( \cos \frac{(v-2)j\pi}{n} - 1 \right) \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{(-1)^{n-i}}{4} \left[ \frac{1}{n+2} (-1)^{n+2} \left( \cos \frac{(n+2)j\pi}{n} - 1 \right) - \frac{1}{n-2} (-1)^{n-2} \left( \cos \frac{(n-2)j\pi}{n} - 1 \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{2j\pi}{n} - 1 \right) - \cos \frac{i\pi}{n} \left[ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{j\pi}{n} - \frac{1}{6} \cos \frac{3j\pi}{n} \right] + \frac{1}{8} \cos \frac{2i\pi}{n} \left[ \cos \frac{4j\pi}{n} - 1 \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{v=3}^n \cos \frac{vi\pi}{n} \left[ \frac{\cos \frac{(v+2)j\pi}{n}}{v+2} - \frac{\cos \frac{(v-2)j\pi}{n}}{v-2} + \frac{4}{v^2-4} \right] \right\} - \\
 & - \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{(-1)^i}{4} \left[ (-1)^j \left( \frac{\cos \frac{2j\pi}{n}}{n+2} - \frac{\cos \frac{2j\pi}{n}}{n-2} \right) + \frac{4}{n^2-4} \right] \right\} = \\
 & = \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{2j\pi}{n} - 1 \right) - \cos \frac{i\pi}{n} \left[ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{j\pi}{n} - \frac{1}{6} \cos \frac{3j\pi}{n} \right] + \frac{1}{8} \cos \frac{2i\pi}{n} \left[ \cos \frac{4j\pi}{n} - 1 \right] \right\} + \\
 & + \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{v=3}^n \varepsilon_v \cos \frac{vi\pi}{n} \left[ \frac{\cos \frac{(v+2)j\pi}{n}}{v+2} - \frac{\cos \frac{(v-2)j\pi}{n}}{v-2} + \frac{4}{v^2-4} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Із (14) з врахуванням позначення  $c_k := \cos \frac{k\pi}{n}$  знайдемо, що

$$\begin{aligned}
 b_{ij} = & - \left\{ a_{ij} \cdot c_j + \frac{\varepsilon_i}{n} \left\{ \frac{1}{4} (c_{2j} - 1) - c_i \left[ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} c_j - \frac{1}{6} c_{3j} \right] + \frac{1}{8} c_{2i} [c_{4j} - 1] \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{v=3}^n \varepsilon_v c_{vi} \left[ \frac{c_{(v+2)j}}{v+2} - \frac{c_{(v-2)j}}{v-2} + \frac{4}{v^2-4} \right] \right\}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n}.
 \end{aligned}$$

Після того, як будуть обчислені наближені значення  $y_{vj}, p_{vj}, v = 1, 2, \dots, j = \overline{0, n}$  (див. (10)), поліноми  $y_v(n; x), p_v(n; x)$  згідно (12) знаходяться за формулами

$$\begin{aligned}
 y_v(n; x) & = y_0 + y_0'(x - x_0) - \sum_{i=0}^n \psi(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i}) \Pi_{2i}(x), \\
 p_v(n; x) & = y_0' - \sum_{i=0}^n \psi(x_i, y_{v-1,i}, p_{v-1,i}) \Pi_{1i}(x),
 \end{aligned}$$

де, як неважко переконатися,

$$\begin{aligned}
 \Pi_{1i}(x) & = \frac{h \varepsilon_i}{2 n} \left\{ (\zeta + 1) \left( 1 - \cos \frac{i\pi}{n} (\zeta + 1) \right) + \sum_{v=1}^n \varepsilon_v (-1)^v \cos \frac{vi\pi}{n} \cdot \left[ \frac{T_{v+1}(\zeta)}{v+1} - \frac{T_{v-1}(\zeta)}{v-1} - \frac{2(-1)^v}{v^2-1} \right] \right\} \\
 \Pi_{2i}(x) & = \frac{h}{2} \left[ \zeta \cdot \Pi_{1i}(x) - \frac{h \varepsilon_i}{2 n} \left\{ (\zeta^2 - 1) - \cos \frac{i\pi}{n} \left[ \frac{T_3(\zeta)}{6} + \frac{\zeta}{2} + \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{8} \cos \frac{2i\pi}{n} [T_4(\zeta) - 1] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \varepsilon_v (-1)^v \cos \frac{vi\pi}{n} \cdot \left[ \frac{T_{v+2}(\zeta)}{v+2} - \frac{T_{v-2}(\zeta)}{v-2} - \frac{4(-1)^v}{v^2-4} \right] \right\} \right], \\
 \zeta & = -1 + \frac{2}{h} (x - x_0), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_n = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_i = 1, \quad i = \overline{1, n-1}.
 \end{aligned}$$

**Оцінка відхилення. Випадок достатньої гладкості  $F(x, y, y')$ .**

Якщо функція  $F(x, y, y')$  володіє властивостями 1) - 4), то є справедливою наступна теорема.

**Теорема 2.** При наближенні розв'язку задачі Коші (1), (2) і його похідної поліномами  $y_v(n; x), p_v(n; x)$ , побудованими за формулами (12), для всіх  $x \in [x_0, x_0 + h_2]$ , де

$$h_2 = \min \left\{ h_1, \frac{a}{|y_0'| + \|A_n^0\| \frac{Mh}{2}}, \frac{b}{\|A_n^0\| M} \right\}, \tag{15}$$

$h_1$  – довжина проміжку існування розв’язку задачі (1), (2),  $\|A_n^0\|$  – норма оператора інтерполювання,

$M := \max_D |\psi(x, y, p)|$ , має місце оцінка

$$\begin{aligned} |y(x) - y_v(n; x)| + |p(x) - p_v(n; x)| &\leq h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \left( 1 + \|A_n^0\| \right) \cdot \left[ \frac{1 - q_1^v}{1 - q_1} \cdot E_n(y'')_{C[x_0, x_0+h_2]} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha q_1^v \|A_n^0\|^{-1} \exp \left\{ (A+B)h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) + \|A_n^0\|^{-1} \right\} \right] + \\ &\quad + \alpha (A+B)^v \frac{h_2^{v+1} \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right)^{v+1}}{(v+1)!} \cdot \exp \left\{ (A+B)h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

де  $q_1 := (A+B)h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \cdot \|A_n^0\|$ ,  $\alpha := C + B|y_0'|$ ,  $E_n(y'')_{C[x_0, x_0+h_2]}$  – величина найкращого наближення функції  $y''(x)$  многочленами степені не вище  $n$  в просторі неперервних на  $[x_0, x_0 + h_2]$  функцій, значення величин  $A, B, C$  ті ж самі, що і в теоремі 1.

*Зауваження.* Відомо [8], що для оператора інтерполювання  $A_n^0$  по чебишевських вузлах

$$\xi_i = -\cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = \overline{0, n}$$

$$\|A_n^0\| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \ln n + 1.$$

Доведення теореми 2. Для скорочення записів введемо позначення

$$\Delta_v(n; x) := |y(x) - y_v(n; x)| + |p(x) - p_v(n; x)|, \quad \psi_v(x) := \psi(x, y_v(x), p_v(x)),$$

Для здійснення ітераційного процесу по формулах (12), необхідно, щоб

$$|y_v(n; x) - y_0| \leq a, \quad |p_v(n; x) - y_0'| \leq b.$$

Згідно (12)

$$|y_v(n; x) - y_0| \leq |x - x_0| \left( |y_0'| + \|A_n^0\| \frac{Mh}{2} \right), \quad |p_v(n; x) - y_0'| \leq |x - x_0| \cdot \|A_n^0\| M.$$

Звідси слідує умова (15).

Оцінимо величину  $\Delta_v(n; x)$ , враховуючи (13):

$$\begin{aligned} \Delta_v(n; x) &= \left| \int_{x_0}^x [A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot); t) - \psi_{v-1}(t)] dt + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s [A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot); t) - \psi_{v-1}(t)] dt ds \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x [A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot) - \psi_{v-1}(\cdot); t) + A_n(\psi_{v-1}(\cdot); t) - \psi_{v-1}(t)] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s [A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot) - \psi_{v-1}(\cdot); t) + A_n(\psi_{v-1}(\cdot); t) - \psi_{v-1}(t)] dt ds \right| \leq \\ &\leq h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \cdot \|A_n^0\| (A+B) \Delta_{v-1}(n; x) + h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \cdot \|A_n^0\| (y_v''(\cdot); x) - y_v''(x) \|_{C_{T_2}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= q_1 \Delta_{v-1}(n; x) + h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \|A_n(y_v''(\cdot); x) - y_v''(x)\|_{C_{I_2}} \leq \\
 &\leq q_1^2 \Delta_{v-2}(n; x) + q_1 h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \|A_n(y_{v-1}''(\cdot); x) - y_{v-1}''(x)\|_{C_{I_2}} + \\
 &+ h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \|A_n(y_v''(\cdot); x) - y_v''(x)\|_{C_{I_2}} \leq \dots \leq h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \sum_{j=1}^v q_1^{v-j} \|A_n(y_j''(\cdot); x) - y_j''(x)\|_{C_{I_2}} \leq \\
 &\leq h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left(1 + \|A_n^0\|\right) \sum_{j=1}^v q_1^{v-j} E_n(y_j'')_{C_{I_2}}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Для отримання останньої нерівності ми скористалися нерівністю Лебега [3].

Звідси, використовуючи (9) і той факт, що

$$y_v''(x) = \psi_{v-1}(x), \quad v = 1, 2, \dots,$$

бачимо, що

$$\begin{aligned}
 \|y_j''(x) - y''(x)\| &= \|\psi_{j-1}(x) - \psi(x)\| \leq (A + B) (\|y_{j-1}(x) - y(x)\| + \|p_{j-1}(x) - p(x)\|) \leq \\
 &\leq \alpha \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right\} \frac{\left[(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right]^j}{j!},
 \end{aligned}$$

тобто

$$y_j''(x) = y''(x) + \varepsilon(x) \alpha \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right\} \frac{\left[(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right]^j}{j!}, \quad |\varepsilon(x)| \leq 1.$$

Отже,

$$E_n(y_j'')_{C_{I_2}} \leq E_n(y'')_{C_{I_2}} + \alpha \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right\} \frac{\left[(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right]^j}{j!}.$$

Після підстановки цієї оцінки в (17) і з врахуванням того, що  $e^\xi - \leq \xi e^\xi$  для довільних  $\xi > 0$ , отримуємо

$$\begin{aligned}
 \Delta_v(n; x) &\leq h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left(1 + \|A_n^0\|\right) \left\{ \frac{1 - q_1^v}{1 - q_1} E_n(y'')_{C_{I_2}} + \alpha \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right\} q_1^v \sum_{j=1}^v \frac{\|A_n^0\|^{-1}}{j!} \right\} \leq \\
 &\leq h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left(1 + \|A_n^0\|\right) \left\{ \frac{1 - q_1^v}{1 - q_1} E_n(y'')_{C_{I_2}} + \alpha \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right) + \|A_n^0\|^{-1}\right\} \|A_n^0\|^{-1} q_1^v \right\}.
 \end{aligned}$$

Із цієї нерівності і (9) слідує (16). Теорема 2 доведена.

**Оцінка відхилення. Аналітичний випадок.**

У випадку аналітичності функції  $F(x, y, y')$  має місце значно краща наближення.

Відштовхуючись від деякого відрізка  $[x_0, x_0 + h]$  і деякого  $r \geq 1$ , слідуючи роботам [2, 3], побудуємо замкнену область  $\Omega_r$  в комплексній площині, обмежену еліпсом Жуковського

$$\begin{aligned}
 \partial\Omega_r &= \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : z_1 = x_0 + \frac{h}{2} + a_r \cos t, z_2 = b_r \sin t, t \in [-\pi, \pi] \right\}, \\
 a_r &= \frac{h}{2}(r + r^{-1}), \quad b_r = \frac{h}{2}(r - r^{-1}),
 \end{aligned}$$

$$\Omega_r = \left\{ z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C} : \left( \frac{z_1 - (x_0 + \frac{h}{2})}{a_r} \right)^2 + \left( \frac{z_2}{b_r} \right)^2 \leq 1 \right\}.$$

При  $r = 1$  множина  $\Omega_r$  вироджується у відрізок  $[x_0, x_0 + h]$ .

Замість області  $D$  теореми 1 розглянемо замкнену область  $\bar{D} = \bar{D}(x_0, y_0, y'_0, h, a, b, r)$ :

$$\bar{D} = \left\{ (z, w, w') \in C^3 : z \in \Omega_r, |w - y_0| \leq a, |w' - y'_0| \leq b \right\}.$$

Будемо припускати, що функція  $F(z, w, w')$  є аналітичною в  $\text{int } \bar{D}$  і володіє в  $\bar{D}$  властивостями 1) – 4). Тоді для оцінки наближення розв'язку задачі Коші (1) – (2) справедлива теорема.

**Теорема 3.** При перерахованих вище умовах поліноми  $y_v(n; x)$  і  $p_v(n; x)$  (12) наближають розв'язок задачі (1) – (2) і його похідну на відрізку  $[x_0, x_0 + h_2]$  ( $h_2$  знаходиться із умови (15), в якій  $M$  має той самий зміст) таким чином, що

$$\begin{aligned} & |y(x) - y_v(n; x)| + |p(x) - p_v(n; x)| \leq \\ & \leq 2h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \cdot \left( 1 + \|A_n^0\| \right) \frac{1 - q^v}{1 - q} \|\psi\|_{C_{\bar{D}}} \frac{1}{(r-1)r^n} + \alpha(A+B)^{-1} e^q \frac{q^{v+1}}{(v+1)!}, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $q = (A+B)h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right)$ ,  $A$  – константа Ліпшиця функції  $\frac{F'_x(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)}$  в області  $\bar{D}$ ,

$$B := \max_{\bar{D}} \left| \frac{F'_y(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)} \right|, \quad \alpha = C + B|y'_0|, \quad C := \max_{\bar{D}} \left| \frac{F'_x(x, y, p)}{F'_{y'}(x, y, p)} \right|,$$

$$\psi(x, y, p) := \frac{F'_x(x, y, p) + F'_{y'}(x, y, p)p}{F'_{y'}(x, y, p)}.$$

**Наслідок.** Якщо  $(A+B)h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) < \frac{1}{2}$ , то для всіх  $x \in [x_0, x_0 + h_2]$

$$\begin{aligned} & |y(x) - y_v(n; x)| + |p(x) - p_v(n; x)| \leq \\ & \leq 4,8h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{\pi} \ln n + 2 \right) \cdot \|\psi\|_{C_{\bar{D}}} \left( \frac{h_2}{4c} \right)^{n+1} + \alpha(A+B)^{-1} e^{\frac{1}{2}} \frac{q^{v+1}}{(v+1)!}, \end{aligned}$$

Де  $c$  – радіус круга аналітичності по  $z$  функції  $\psi(z, w(z), w'(z))$  з центром в точці  $x_0 + \frac{h_2}{2}$ , тобто

$$c = \frac{h_2}{4} (r - r^{-1}).$$

**Доведення теореми 3.** Використовуючи позначення, введені при доведенні попередньої теореми, маємо

$$\begin{aligned} \Delta_v(n; x) & \leq \left| \int_{x_0}^x [A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot); t) - \psi_{v-1}(n; t) + \psi_{v-1}(n; t) - \psi_{v-1}(t)] dt \right| + \\ & + \left| \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s [A_n(\psi_{v-1}(n; \cdot); t) - \psi_{v-1}(n; t) + \psi_{v-1}(n; t) - \psi_{v-1}(t)] dt ds \right|. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер нерівність Лебега і теорему Бернштейна (див., наприклад, [2, 3]), отримаємо

$$\Delta_v(n; x) \leq h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) E_n(\psi_{v-1}(n; t))_{C_{I_2}} \left( \|A_n^0\| + 1 \right) + (A+B)h_2 \left( 1 + \frac{h_2}{2} \right) \|\psi_{v-1}(n; x) - \psi_{v-1}(x)\|_{C_{I_2}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\|A_n^0\| + 1\right) h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \frac{2}{r-1} \left(\frac{1}{r}\right)^n \|\psi\|_{C_{\bar{D}}} + q \|\psi_{v-1}(n; x) - \psi_{v-1}(x)\|_{C_{I_2}} \leq \dots \leq \\ &\leq 2h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \left(\|A_n^0\| + 1\right) \cdot \|\psi\|_{C_{\bar{D}}} \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{r}\right)^n \cdot (1 + q + \dots + q^{v-1}) = \\ &= 2h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \left(\|A_n^0\| + 1\right) \cdot \|\psi\|_{C_{\bar{D}}} \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{r}\right)^n \cdot \frac{(1 - q^v)}{1 - q}. \end{aligned}$$

Звідси і з нерівності (9) слідує справедливість (18). Теорема 3 доведена.

За допомогою викладеного вище апроксимаційно-ітеративному алгоритму були розв’язані наступні приклади, точний розв’язок яких є відомим.

*Приклад 1.*

$$xy'(x^3y'-1) - y = 0, \quad y(2) = 0.$$

Шукаємо розв’язок, для якого  $y'(2) = \frac{1}{8}$ .

$$\text{Точний розв’язок: } y(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right).$$

*Приклад 2.*

$$(y')^2 - y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

Шукаємо розв’язок, для якого  $y'(0) = -1$ .

$$\text{Точний розв’язок: } y(x) = e^{-x}.$$

*Приклад 3.*

$$(y')^2 + y^2 \sin^2 x = e^{2\sin x}, \quad y(0) = 1.$$

Шукаємо розв’язок, для якого  $y'(0) = 1$ .

$$\text{Точний розв’язок: } y(x) = e^{\sin x}.$$

Ітераційний процес, побудований по формулах (10), продовжувався до тих пір, поки величини  $|y_{vj} - y_{v-1,j}|$  і  $|p_{vj} - p_{v-1,j}|$  для всіх  $j = \overline{0, n}$  не ставали меншими за  $10^{-11}$ . Похибка отриманих наближень встановлювалась шляхом порівняння значень побудованих по формулах (12) поліномів в 50 точках на кожному із розглянутих відрізків із точними значеннями.

Результати обчислень наведені в таблиці. Порожні клітинки в таблиці означають, що при великих  $n$  точність наближення не збільшується через обмеженість розрядності комп’ютера.

Приклади		1			2			3		
n	h	1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1
3	$\mathcal{E}_y$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$7,8 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-11}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-11}$
	$\mathcal{E}_{y'}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$5,4 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-9}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-10}$
4	$\mathcal{E}_y$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$	$9,3 \cdot 10^{-7}$	$8,9 \cdot 10^{-9}$	$3,6 \cdot 10^{-12}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-11}$
	$\mathcal{E}_{y'}$	$9,8 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-11}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$	$6,7 \cdot 10^{-8}$	$7,2 \cdot 10^{-12}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-10}$
5	$\mathcal{E}_y$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$8,8 \cdot 10^{-11}$	$3,6 \cdot 10^{-12}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$
	$\mathcal{E}_{y'}$	$9,0 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$9,3 \cdot 10^{-8}$	$9,1 \cdot 10^{-10}$	$3,6 \cdot 10^{-12}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-11}$
6	$\mathcal{E}_y$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^{-11}$		$3,2 \cdot 10^{-10}$	$3,6 \cdot 10^{-12}$		$7,2 \cdot 10^{-7}$	$8,0 \cdot 10^{-10}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$
	$\mathcal{E}_{y'}$	$9,0 \cdot 10^{-8}$	$9,0 \cdot 10^{-10}$		$2,4 \cdot 10^{-9}$	$5,3 \cdot 10^{-11}$		$7,2 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$
7	$\mathcal{E}_y$	$8,2 \cdot 10^{-10}$	$2,4 \cdot 10^{-12}$		$7,3 \cdot 10^{-12}$	$3,6 \cdot 10^{-12}$		$1,0 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-11}$	
	$\mathcal{E}_{y'}$	$9,5 \cdot 10^{-9}$	$5,4 \cdot 10^{-11}$		$6,8 \cdot 10^{-11}$	$2,7 \cdot 10^{-12}$		$8,8 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-9}$	
8	$\mathcal{E}_y$	$8,6 \cdot 10^{-11}$	$1,2 \cdot 10^{-12}$		$7,3 \cdot 10^{-12}$			$6,6 \cdot 10^{-9}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$	
	$\mathcal{E}_{y'}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$3,4 \cdot 10^{-12}$		$6,8 \cdot 10^{-11}$			$8,4 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-11}$	

Приклади		1			2			3		
n	h	1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1
9	$\varepsilon_y$	$8,2 \cdot 10^{-12}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$		$3,2 \cdot 10^{-12}$			$4,1 \cdot 10^{-10}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$	
	$\varepsilon_{y'}$	$1,2 \cdot 10^{-10}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$		$2,7 \cdot 10^{-12}$			$5,9 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^{-11}$	
10	$\varepsilon_y$	$1,0 \cdot 10^{-12}$						$3,1 \cdot 10^{-11}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$	
	$\varepsilon_{y'}$	$1,2 \cdot 10^{-12}$						$5,4 \cdot 10^{-10}$	$7,3 \cdot 10^{-12}$	
v		13-15	11	7	9-10	7	5	13-16	11-12	8

Позначення:

$h$  – довжина відрізка, на якому шукалися наближення розв'язку та його похідної;

$n$  – степінь наближаючих поліномів;

$v$  – число ітерацій;

$\varepsilon_y$  – фактична точність наближення розв'язку;

$\varepsilon_{y'}$  – фактична точність наближення похідної.

Як видно із таблиці, шляхом зменшення довжини відрізка  $h$  і збільшення степенів наближаючих поліномів  $n$  можна досягти практично довільної допустимої комп'ютерної точності, що узгоджується із отриманими апріорними оцінками. Така ж ситуація спостерігається при розв'язанні даних прикладів з подвійною точністю.

**Висновки.** Таким чином, розроблений апроксимаційно-ітераційний алгоритм є цілком придатним для отримання наближених розв'язків задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язних відносно похідної. Особливою перевагою AI-методу є можливість побудови наближених розв'язків в аналітичному вигляді ( $y$  вигляді поліномів). Можливі напрямки наступних досліджень: застосування AI-методу до розв'язування неявних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь.

#### Список використаних джерел

1. Дзядык В.К. Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев, 1984. – 25 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 84.27).
2. Дзядык В.К. Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1986. – 26, № 3. – С. 357–372.
3. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
4. Новиков Е.А., Юматова Л.А. Некоторые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной // Докл. АН СССР. – 1987. – 295, № 4. – С. 809–812.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1970. – 279 с.
6. Зубов В.И. К вопросу существования и приближенного представления неявных функций // Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. – 1956. – № 19, вып.4. – С. 48. – 54.
7. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М: Изд-во иностр. лит., 1957. – 443 с.
8. Dzijadik V.K., Ivanov V.V. On some asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to Chebyshev nodal points // Analysis Math. – 1983. – № 9. – P. 85-97.

**Анотація.** *Василенко Я.П. Застосування апроксимаційно-ітеративного методу до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, заданих неявно.*

В статті розглянуто використання апроксимаційно-ітеративного методу для наближення розв'язку та його похідної задачі Коші для рівняння  $F(x, y, y') = 0$ . При звичайних щодо функції  $F(x, y, y')$  припущеннях за допомогою ітераційного процесу Пікара описується область існування розв'язку поставленої задачі. Наведені оцінки відхилень отриманих за допомогою апроксимаційно-ітеративного алгоритму наближень від точного розв'язку та його похідної в аналітичному випадку і у випадку скінченної гладкості функції  $F(x, y, y')$ .

**Ключові слова:** задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь, нерозв'язних відносно похідної, аппроксимаційно-ітеративний метод, ітераційний процес Пікара, поліноміальне наближення, величина найкращого наближення.

**Аннотация.** Василенко Я.П. Применение аппроксимационно-итеративного метода к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных неявно.

В статье рассмотрено использование аппроксимационно-итеративного метода для приближения решения и его производной задачи Коши для уравнения  $F(x, y, y') = 0$ . При обычных относительно функции  $F(x, y, y')$  предположениях с помощью итерационного процесса Пикара описывается область существования решения поставленной задачи. Приведены оценки отклонений полученных с помощью аппроксимационно-итеративного алгоритма приближений от точного решения и его производной в аналитическом случае и в случае конечной гладкости функции  $F(x, y, y')$ .

**Ключевые слова:** задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, аппроксимационно-итеративный метод, итерационный процесс Пикара, полиномиальное приближение, величина наилучшего приближения.

**Abstract.** Vasilenko Y.P. Application approximal-iterative method to the solution of ordinary differential equations defined implicitly.

The article examines the use approximal-iterative method to approximate the solution and its derivative of the Cauchy problem for the equation  $F(x, y, y') = 0$ . Under normal on the function  $F(x, y, y')$  assumptions through an iterative process by Picard described region of existence of the solution of the problem. The estimates deviations obtained by approximation-iterative algorithm for the approximation of the exact solution and its derivative in the analytic case and in the case of finite smoothness functions  $F(x, y, y')$  presented herein.

**Keywords:** Cauchy problem for ordinary differential equation unsolved relative to derivative approximal-iterative method, iterative process Picard, polynomial approximation, the value of the best approximation.

