

## РЕАЛІЗАЦІЯ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ ДО ЗНО

*Останнім часом, все більше учнів під час здачі зовнішнього незалежного оцінювання, стикаються з проблемою розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами. Це пояснюється відсутністю загальної методики для розв'язування таких типів завдань і як результат низьким рівнем компетентностей учнів. Постає питання реалізації компетентнісного підходу у процесі підготовки учнів до розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами до зовнішнього незалежного оцінювання у 10 та 11 класах. У статті наведені, реалізація компетентнісного підходу у процесі підготовки учнів до розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами до зовнішнього незалежного оцінювання у 10 та 11 класах та методичні рекомендації, щодо успішної підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання. Компетентності учнів, щодо розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами були сформовані за допомогою запропонованих методів розв'язання таких рівнянь та нерівностей. За основу систематизації обрано методи розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами, оскільки чіткі орієнтири щодо використання основних прийомів та методів розв'язання сприяє в учнів формування основних математичних компетентностей і дозволяє їм з легкістю розв'язувати навіть найскладніші ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами.*

**Ключові слова:** компетентнісний підхід, зовнішнє незалежне оцінювання, ірраціональні рівняння з параметрами, ірраціональні нерівності з параметрами, методи розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами.

**Постановка проблеми.** Сучасний етап розвитку освіти в Україні характеризується спрямованістю на побудову компетентнісно-орієнтованої системи навчання, впровадженням компетентнісного підходу до організації математичної підготовки учнів, що цілком відповідає сучасним світовим тенденціям.

Однією з основних змістовно – методичних ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу є лінія рівнянь і нерівностей, яка включає в себе теми “Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами”, яка має розгалужену систему внутрішньо – предметних зв'язків з іншими лініями курсу. Через це ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами традиційно широко представлені в завданнях зовнішнього незалежного тестування, в останні роки результати виконання цих завдань суттєво погіршилися. Отже, актуальною на сьогодні є проблема, визначення і обґрунтування можливості удосконалення методики вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами у курсі алгебри і початків аналізу в умовах впровадження компетентнісного підходу до навчання.

**Аналіз актуальних досліджень.** Питанню навчання учнів розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей і формування відповідних розумових прийомів присвячені роботи З.І. Слєпкань, Г.П. Бєвза, Я.Г. Грудьонова, Є.П. Неліна. Питанням реалізації компетентнісного підходу в освіті присвячені роботи І.Г. Єрмакова, О.В. Овчарук, О.І. Пометун, О.В. Хуторський. Впровадження компетентнісного підходу у математичну освіту присвячені роботи С.А. Ракова. Він ввів поняття математичної компетентності та визначив основні математичні компетентності

вчителя. Проте питання реалізації компетентнісного підходу під час вивчення розділу ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами досі є мало дослідженим.

**Мета статті** – розглянути прийоми реалізації компетентнісного підходу до учнів 10 та 11 класів у процесі розв’язання ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики.

**Виклад основного матеріалу.** Під час підготовки учнів 10-11 класів до ЗНО, яке включає знання з теми “Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами” доцільно організувати додаткові заняття – так звані факультативи, для узагальнення та систематизації знань і вмінь учнів, спрямовані на формування їхніх математичних компетентностей.

За основу систематизації оберемо методи розв’язання ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами, оскільки чіткі орієнтири щодо використання основних прийомів та методів розв’язання сприяє в учнів формування основних математичних компетентностей і дозволяє їм з легкістю розв’язувати навіть найскладніші ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами. Для організації підготовки до розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами доцільно провести 3-4 факультативних заняття.

В першу чергу, учням потрібно запропонувати ознайомитися з класифікацією ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами.

*Ірраціональні рівняння з параметрами:*

1.  $\sqrt[n]{f(x, a)} = g(x, a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, a) = (g(x, a))^{2n} \\ g(x, a) \geq 0 \end{cases}$
2.  $\sqrt[n]{f(x, a)} = \sqrt[m]{g(x, a)}$
3.  $\sqrt[n]{f(x, a)} \pm \sqrt[m]{g(x, a)} = h(x, a)$
4.  $\sqrt[n]{f(x, a)} \pm \sqrt[m]{g(x, a)} = \sqrt[k]{h(x, a)}$ , де  $n, m, k \in \mathbb{N}$ .

*Ірраціональні нерівності з параметрами:*

1.  $\sqrt{f(x, a)} \geq g(x, a) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x, a) \leq 0, \\ f(x, a) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x, a) \geq 0, \\ f(x, a) \geq g^2(x, a) \end{cases} \end{cases}$
2.  $\sqrt{f(x, a)} \leq g(x, a) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x, a) \geq 0, \\ 0 \leq f(x, a) \leq g^2(x, a) \end{cases}$  [3, с.117].

Після цього доцільно згадати орієнтовні основи розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами та розв’язати з учнями ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами з підручника [2, с. 220].

Доцільно звернути увагу учнів на основні методи розв’язання ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами. При розв’язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами зазвичай використовують наступні методи:

1. Перехід до раціонального рівняння, піднесенням до степеня обох частин рівняння в необхідну степінь.
2. Перехід до змішаної системи, яка складається з рівнянь та нерівностей.
3. Метод заміни.
4. Метод введення допоміжних невідомих (спосіб підстановки).
5. Метод геометричної інтерпретації.
6. Окремі методи [1, с.105].

Наведемо приклад розв’язування ірраціонального рівняння  $1 - x = \sqrt{a^2 - x^2}$  графічним методом. При розв’язуванні даного рівняння доцільно використати ППЗ

«GRAN1». Зрозуміло, що під час ЗНО учні не зможуть використати комп'ютер, проте, з метою активізації навчальної діяльності учнів, економії часу та залучення до роботи учнів, які знаходяться на середньому рівні навчальних досягнень під час підготовки до ЗНО доцільно використовувати ППЗ «GRAN1» під час розв'язування окремих завдань.

Розглянемо графіки функцій  $y_1 = l - x$ ,  $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$  (рис. 1).

Графік  $y_1$  – пряма, графіками  $y_2$  є верхні півкола радіуса  $|a|$  з центром в початку координат. Існує два критичних положення графіків  $y_2$ , які відповідають значенням  $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  і  $|a| = 1$ . При значеннях  $a$  таких, що  $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$  графіки функцій  $y_1$  і  $y_2$  не мають спільних точок; при  $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  – одну; при  $\frac{1}{\sqrt{2}} < |a| \leq 1$  – дві спільні точки; при  $|a| > 1$  – одну.

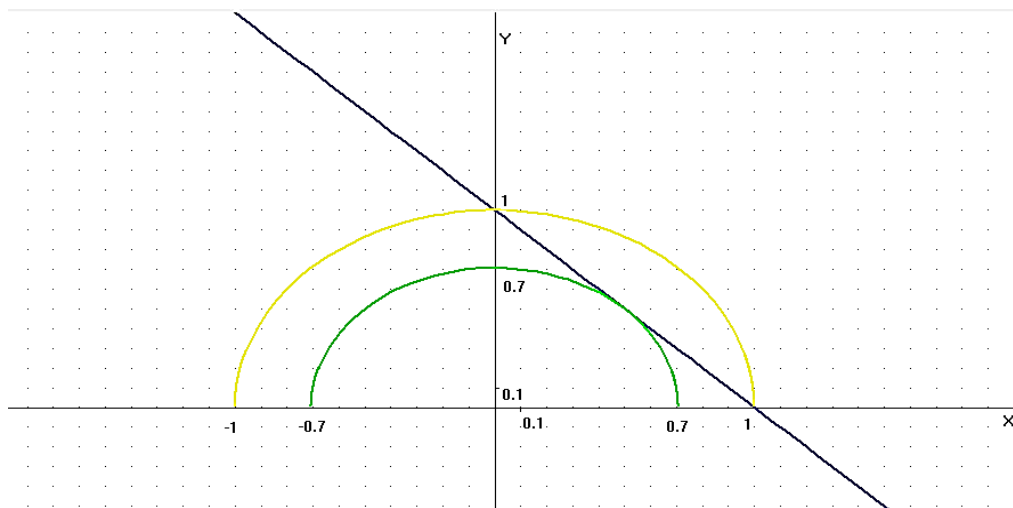


Рис. 1. Графічний розв'язок рівняння у ППЗ «GRAN1»

Абсциси точок перетину графіків визначаються з рівняння  $2x^2 - 2x + 1 - a^2 = 0$  і при  $\frac{1}{\sqrt{2}} < |a| \leq 1$  обчислюють за формулою  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ .

Під час підготовки до ЗНО необхідно звернути увагу учнів на те, що ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами можна умовно поділити на два типи за вимогою задачі. До першого належать ті задачі, у яких ірраціональні рівняння та нерівності треба розв'язати; до другого – ті, у яких треба дослідити кількість можливих розв'язків. Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами в задачах другого типу далеко не завжди можна розв'язати, але можна виконати дослідження (побачити й обґрунтувати певну властивість заданого рівняння (нерівності) та, користуючись нею, дати відповідь на питання задачі). Наведемо приклад такої задачі на прикладі розв'язання ірраціональної нерівності з параметром. При яких значеннях параметра  $a$  множиною розв'язків нерівності  $x\sqrt{x} - a\sqrt{x} \leq ax - a^2$ , буде відрізок завдовжки менше 1? Графічний метод розв'язання було розглянуто для ірраціонального рівняння з параметрами, тому при розв'язуванні ірраціональної нерівності використаємо аналітичний метод.

Представимо дану нерівність у вигляді:  $(\sqrt{x} - a)(x - a) \leq 0$ , а потім потрібно розглянути 3 випадки:

- 1) Якщо  $a < 0$ , то розв'язків немає.
- 2) Якщо  $a = 0$ , то  $x = 0$ .
- 3) Нехай  $a > 0$ .

Позначимо  $\sqrt{x} = t$ , де  $t \geq 0$ . Отримаємо нерівність:

$$(t - a)(t - \sqrt{a})(t + \sqrt{a}) \leq 0, \text{ далі йому рівносильне } (t - a)(t - \sqrt{a}) \leq 0$$

Розв'язуємо методом інтервалів:

$$a) \begin{cases} \sqrt{a} > a, & 0 < a < 1 \text{ (рис. 2);} \\ a > 0 \end{cases}$$

$$a \leq t \leq \sqrt{a}, a \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{a}, a^2 \leq x \leq a.$$

$$0 < a < a - a^2 < 1$$

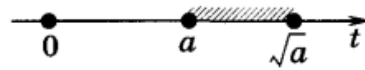


Рис. 2. Розв'язок системи (а)

б)  $\begin{cases} a > \sqrt{a}, \\ a > 0 \end{cases} a > 1$  (рис. 3)

$$\sqrt{a} \leq t \leq a, \sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq a, a \leq x \leq a^2.$$

Розв'яжемо систему  $\begin{cases} a^2 - a < 1, \\ a > 1; \end{cases} \begin{cases} a > 1, \\ a^2 - a - 1 < 0; \end{cases} \begin{cases} a > 1, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \end{cases}$

$$1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Рис. 3. Розв'язок системи (б)

в) Якщо  $a = 1$ , то отримуємо нерівність  $(t - 1)^2 \leq 0$ ;  
 $t = 1, \sqrt{x} = 1, x = 1$ , отже,  $a \in (0; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$  [1, с.187 ].

**Висновки та перспективи подальших наукових розвідок.** Таким чином, під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики доцільно використати систематизуючий метод навчання. Зокрема, провести кілька систематизуючих бесід із використанням узагальнюючих графічних схем, спрямованих на систематизацію та узагальнення знань учнів, пов'язаних із розв'язуванням ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами. Проте основним системоутворюючим фактором, що сприяє закріпленню відповідних математичних компетентностей, є загальні методи розв'язування. Використання систематизуючого методу навчання та розробленої методики, забезпечуть доцільну підготовки до ЗНО. Організація такої підготовки сприяє закріпленню в учнів відповідних математичних компетентностей, правильному, свідомому та чіткому розв'язуванню ними завдань зовнішнього незалежного оцінювання. Нагальною і важливою є розробка методичних рекомендацій щодо організації підготовки учнів до розв'язування завдань зовнішнього незалежного оцінювання з теми "Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами".

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беляева Э. С. Математика. Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие / Э. С. Беляева, А. С. Потапов, С. А. Титоренко. – Москва: Дрофа, 2009. – 444 с.
2. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ.рівень / Євген Петрович Нелін. – Харків: Гімназія, 2010. – 416 с.
3. Прокофьев А. А. Задачи с параметрами / Александр Александрович Прокофьев. – Москва: МИЭТ, 2004. – 258 с.

**Щичко И.Ф. Реализация компетентного подхода в процессе подготовки учеников к решению иррациональных уравнений и неравенств с параметрами к ЗНО.**

*В последнее время, все больше учеников во время сдачи внешнего независимого оценивания, сталкиваются с проблемой решения иррациональных уравнений и*

неравенств с параметрами. Это объясняется отсутствием общей методики для решения таких типов заданий и как результат низким уровнем компетентностей учеников. Появляется вопрос реализации компетентного подхода в процессе подготовки учеников к решению иррациональных уравнений и неравенств с параметрами к внешнему независимому оцениванию в 10 и 11 классах. В статье приведены, реализация компетентного подхода в процессе подготовки учеников к решению иррациональных уравнений и неравенств с параметрами к внешнему независимому оцениванию в 10 и 11 классах и методические рекомендации, относительно успешной подготовки учеников к внешнему независимому оцениванию. Компетентности учеников, относительно решения иррациональных уравнений и неравенств с параметрами были сформированы с помощью предложенных методов решения таких уравнений и неравенств. За основу систематизации подобраны методы решения иррациональных уравнений и неравенств с параметрами, поскольку четкие ориентиры относительно использования основных приемов и методов решения способствует у учеников формирования основных математических компетентностей и позволяет им с легкостью решать даже самые сложные иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.

**Ключевые слова:** компетентный подход, внешнее независимое оценивание, иррациональные уравнения с параметрами, иррациональные неравенства с параметрами, методы решения иррациональных уравнений и неравенств с параметрами.

**Shchichko I.F. Realization of competent approach in preparing pupils for solving irrational equations and inequalities with parameters to the state independent evaluation.**

Recently more and more pupils while passing the state independent evaluation encounter the problem of the irrational equalities solving and inequalities with parameters. It is explained by the nonexistence of the methodology for tasks solving and as a result low competence of the pupils. The question of the competent approach realization arise while the pupils prepare to solve irrational equalities and the inequalities with parameters for the state independent evaluation in the 10<sup>th</sup> and 11<sup>th</sup> forms. The article presents the competent approach realization in the preparation of the pupils of the solving irrational equalities and the inequalities with parameters for the state independent evaluation in the 10<sup>th</sup> and 11<sup>th</sup> forms as well as the methodological recommendations for the successful preparation to the state independent evaluation. The competence of the pupils of the solving irrational equalities and the inequalities with parameters were formed by means of the proposed methods for the solving such tasks. As a basement of the systemizing the methods of the solving such equalities and inequalities were chosen. There for the clear understanding of such basic approaches application and the methods influence to the math competence of the pupils and allow them to solve the most complicated irrational equalities and the inequalities with parameters.

**Key words:** competent approach, state independent evaluation, irrational equalities with parameters, irrational inequalities with parameters, methods of solving irrational equalities and inequalities with parameters.