УДК 517.2/.3

О. В. Мартиненко, Я. О. Чкана
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Встановлення відповідності між типами нерівностей і методами їх розв'язування є досить актуальною методичною проблемою. У статті обґрунтовано доцільність застосування методів математичного аналізу для доведення нерівностей та показано, що в багатьох випадках це дозволяє спростити даний процес. Запропоновано методи, що ґрунтуються на властивостях функцій однієї змінної та теорії диференціального й інтегрального числення. До кожного з них підібрано типові нерівності, для яких відповідний метод доведення є більш ефективним за інші. Розкрито особливості використання деяких теорем математичного аналізу, які за певних умов можна вважати основою загального методу доведення нерівностей.

Ключові слова: *нерівність, метод доведення, математичний аналіз.*

Постановка проблеми та аналіз актуальних досліджень. Різні задачі математично-природничих наук приводять до необхідності складання, розв'язування або доведення нерівностей; при цьому математики завжди намагаються підібрати оптимальний метод, що враховує громіздкість викладок, ресурс затраченого часу та відповідних знань. Найбільш складними є завдання саме на доведення нерівностей, причому при їх розв'язуванні найчастіше застосовуються алгебраїчні або геометричні методи як загальні. У багатьох випадках значно спростити процес доведення дозволяють штучні або спеціальні методи, до яких зокрема відносять і методи математичного аналізу. При цьому дослідник повинен володіти ґрунтовними знаннями з класичного та сучасного аналізу, творчо підходити до підбору відповідного методу для розв'язування задачі, розуміти переваги та особливості його застосування.

Задачі на нерівності становлять досить потужний клас завдань, які пропонуються на різних екзаменаційних випробуваннях з математики, при проведенні олімпіад та конкурсів усіх рівнів. Це зумовлює підвищену увагу до даного питання вчених-математиків, методистів, викладачів та вчителів. Різні методи розв'язування нерівностей розглядаються в роботах Вороного О.М, Ясінського В.А, Лейфури В.М., Гальперіна Г.О., Арбіта О.В., Сєдракяна Н.М., Собкович Р.І., Кульчицької Н.В. [1,4,6,7]; застосовуванню диференціального та інтегрального числення надається перевага Шундою Н.М., Томусяком А.А., Шкілем М.І.; використанню властивостей функцій при доведенні нерівностей присвячені статті Курляндчика Л. Д. [5] та інших.

Отже, встановлення відповідності між типами нерівностей та методами їх розв'язування та доведення взагалі є досить актуальною методичною проблемою. В даній статті показано можливості застосування окремих методів математичного аналізу для доведення нерівностей.

Мета статті: показати можливості трьох методів математичного аналізу для доведення нерівностей, розкрити особливості їх застосування під час розв'язування типових задач.

Виклад основного матеріалу. Вивчення функцій однієї змінної та їх властивостей, диференціального та інтегрального числення значно розширює можливості дослідника під час розв'язування нерівностей. Слід зауважити, що цими знаннями володіють як учні загальноосвітніх закладів, так і студенти вищих навчальних закладів, які вивчають математику. Власний досвід вивчення даного питання дозволив нам запропонувати власний підхід до співставлення названих методів математичного аналізу і певних задач на доведення нерівностей.

1. Існує клас нерівностей, при доведенні яких безпосередньо використовуються властивості функцій: області визначення та значень, монотонність, екстремуми, опуклість (без знаходження похідної) тощо.

Приклад 1. Довести нерівність $\sqrt[3]{x^2-4x-4y}<1+\sqrt[3]{(x-2)^2-4y-3}$.

Немає потреби робити жодних перетворень при доведенні даної нерівності. Достатньо порівняти підкореневі вирази, щоб побачити, що при довільних значеннях змінних x та y справджується нерівність $x^2-4x-4y<(x-2)^2-4y-3$. Очевидно, що ліва частина набуває значень менших, ніж права.

Приклад 2. Довести нерівність

$$5\sqrt{x^2-3x+2}-3\sqrt[4]{-2x^2+5x-3}+x+1\le\left|\ln a+\log_a e\right|.$$

Проаналізуємо область визначення виразу. Для його лівої частини вона визначається системою нерівностей $\begin{cases}x^2-3x+2\ge 0\\ -2x^2+5x-3\ge 0\end{cases}$ з єдиним розв'язком $x=1$ і набуває при цьому значення 2. Залишається зауважити, що в правій частині нерівності за властивістю логарифмів маємо суму двох обернених чисел, яка не менша 2. Знак рівності досягається при $a=e$.

Приклад 3. Довести нерівність $\sqrt{x+2}+9\sqrt[4]{x-7}+2x-15\ge 6y-y^2-7$.

Насамперед зауважимо, що ліва частина нерівності визначена на проміжку $[7;+\infty)$ і, монотонно зростаючи на ньому, набуває свого найменшого значення 2 в точці $x=7$. Запишемо праву частину даної нерівності у вигляді $2-(y-3)^2$. Очевидно, що значення цього виразу не перевищує 2, причому рівність двом досягається в єдиній точці $y=3$. Порівнюючи множини значень обох частин заданої нерівності, робимо висновок, що їх рівність можлива тільки при $x=7, y=3$. Для інших значень змінних нерівність є строгою.

Досить цікавих результатів можна досягти, використовуючи таку теорему, причому при певних умовах її можна вважати основою загального методу доведення деякого класу нерівностей.

Теорема. *Нехай M - деяка числова множина; $f_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – функції, визначені на M; $F(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x),\ x\in M$ і кожна з функцій $f_i(x)$ та $F(x)$ досягає на M свого найменшого чи найбільшого значення тільки в одній точці. Тоді відповідно справедливі нерівності*

$$\min_{x\in M} F(x)\ge\sum_{i=1}^{n}\min_{x\in M} f_i(x), \tag{1}$$

$$\max_{x\in M} F(x)\le\sum_{i=1}^{n}\max_{x\in M} f_i(x). \tag{2}$$

Рівності виконуються тоді і тільки тоді, коли точки екстремумів функцій f_i та F співпадають. [3]

Приклад 4. Довести, що $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|a_i|$.

Нехай $f_i(x)=a_i x,\ x\in[-1;1],\ a_i\in R,\ a_i\neq 0,\ i=\overline{1,n}$. Очевидно, що $\max\limits_{x\in[-1;1]} f_i(x)=|a_i|=\begin{cases} f(1),\ a_i>0,\\ f(-1),\ a_i<0\end{cases}$ і для функції $F(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)x$ отримаємо $\max\limits_{x\in[-1;1]} F(x)=\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right|$. За наведеною теоремою нерівність $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right|\leq\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$ є справедливою.

Приклад 5. Розглянемо функції $f_i(x)=a_i x^2+2b_i x,\ x\in R,\ a_i>0,\ b_i\in R,\ i=\overline{1,n}$, для яких $\min\limits_{x\in R} f_i(x)=f\left(-\frac{b_i}{a_i}\right)=-\frac{b_i^2}{a_i}$ і $\min\limits_{x\in R} F(x)=F\left(-\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}\right)=-\frac{(b_1+...+b_n)^2}{a_1+...+a_n}$. Тоді за співвідношенням (1) отримаємо нерівність $-\frac{(b_1+...+b_n)^2}{a_1+...+a_n}\geq-\frac{b_1^{\ 2}}{a_1}-\frac{b_1^{\ 2}}{a_2}-...-\frac{b_n^{\ 2}}{a_n}$ або

$$\frac{b_1^{\ 2}}{a_1}+\frac{b_1^{\ 2}}{a_2}+...+\frac{b_n^{\ 2}}{a_n}\geq\frac{(b_1+...+b_n)^2}{a_1+...+a_n}. \qquad (3)$$

З цієї нерівності, як наслідки, можна отримати відомі співвідношення між середніми величинами та класичні нерівності:

1) покладемо $a_1=c_1^2,....,\ a_n=c_n^2,\ b_1=c_1 d_1,...,\ b_n=c_n d_n$, будемо мати

$$\frac{c_1^{\ 2}d_1^2}{c_1^2}+\frac{c_2^{\ 2}d_2^2}{c_2^2}+...+\frac{c_n^{\ 2}d_n^2}{c_n^2}\geq\frac{(c_1 d_1+...+c_n d_n)^2}{c_1^2+...+c_n^2}$$

або

$$c_1 d_1+...+c_n d_n\leq\sqrt{\left(c_1^2+...+c_n^2\right)\left(d_1^2+...+d_n^2\right)}\ \ –$$

нерівність Коші-Буняковського;

2) нехай в (3) $b_1=...=b_n=1$, тоді $\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}\geq\frac{n^2}{a_1+...+a_n}$ або

$$\frac{a_1+...+a_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}}.$$

Це є відома нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним $A_n\geq H_n$;

3) покладемо в (3) $a_1=...=a_n=1$, отримаємо $b_1^2+...+b_n^2\geq\frac{(b_1+...+b_n)^2}{n}$, звідси

$$\sqrt{\frac{b_1^2+...+b_n^2}{n}}\geq\frac{b_1+...+b_n}{n}$$

або $K_n\geq A_n$, де K_n, A_n – середні квадратичне і арифметичне відповідно.

4) використовуючи нерівність (3), доведемо нерівність $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$, де a,b,c – додатні дійсні числа.

Для цього подамо ліву частину у вигляді

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}$$

і застосуємо (3):

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)}{2(ab+bc+ac)}\ge$$
$$\ge\frac{ab+bc+ac+2(ab+bc+ac)}{2(ab+bc+ac)}=\frac{3}{2}.$$

Зауважимо, що знаходження мінімуму функції в наступному прикладі значно спростить використання похідної.

Приклад 6. Розглянемо функції $f_i(x)=a_ie^x-b_ix-b_i$, $x\in R,\ a_i>0,\ b_i>0,\ i=\overline{1,n}$.

Маємо, що $\min\limits_{x\in R} f_i(x)=f_i\left(\ln\frac{b_i}{a_i}\right)=-b_i\ln\frac{b_i}{a_i}$ і відповідно $\min\limits_{x\in R}F(x)=-(b_1+...+b_n)\ln\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}$. За (1) справедливим є співвідношення

$$b_1\ln\frac{b_1}{a_1}+...+b_n\ln\frac{b_n}{a_n}\ge(b_1+...+b_n)\ln\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}$$

або

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1}\cdot\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{b_2}\cdot...\cdot\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n}\ge\left(\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}\right)^{b_1+...+b_n}. \tag{4}$$

Зокрема при $a_1=...=a_n=1$ отримаємо нерівність

$$b_1^{b_1}\cdot b_2^{b_2}\cdot...\cdot b_n^{b_n}\ge\left(\frac{b_1+...+b_n}{n}\right)^{b_1+...+b_n},$$

яка є досить цікавою сама по собі.

Якщо в (4) покласти $b_1=...=b_n=1$, то, виконавши відповідні перетворення, прийдемо до відомої нерівності між середнім геометричним та середнім арифметичним $\frac{a_1+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ або $A_n\ge G_n$.

І, нарешті, покладемо в (4) $b_1+...+b_n=1$, $c_1=\frac{a_1}{b_1}$,..., $c_n=\frac{a_n}{b_n}$, тоді

$$\left(\frac{1}{c_1}\right)^{b_1}\left(\frac{1}{c_2}\right)^{b_2}...\left(\frac{1}{c_n}\right)^{b_n}\ge\frac{1}{b_1c_1+...+b_nc_n}$$

або

$$b_1c_1+...+b_nc_n\ge c_1^{\ b_1}c_2^{\ b_2}....c_n^{\ b_n}. \tag{5}$$

При $b_i=\frac{1}{n}$ знову отримаємо нерівність між середнім геометричним та середнім арифметичним.

Цей метод розповсюджується і на функції двох або більшої кількості змінних, а відповідний екстремум можна шукати в довільній зручній замкненій області простору R^n.

Приклад 7. Розглянемо функції $f_i(x,y)=a_ix+b_iy$, $i=\overline{1,n}$ в області $D=\{(x;y):\ x^2+y^2=1\}$. Очевидно, що екстремальних значень ці функції набувають на межі області D, тобто в точках кола $x^2+y^2=1$, і $\min\limits_D f_i(x;y)=\sqrt{a_i^2+b_i^2}$, $i=\overline{1,n}$, $\min\limits_D F(x;y)=\sqrt{(a_1+...+a_n)^2+(b_1+...+b_n)^2}$. Підстановка цих значень в (1) призведе до такої нерівності:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}\ .$$

Приклад 8. Нехай функції $f_i(x,y)=a_ix+b_iy$, $i=\overline{1,n}$ задані в області $D=\left\{(x;y):\ x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}=1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right\}$. Скориставшись нерівністю (5), знайдемо мінімальні значення цих функцій у вказаній області:

$$a_ix+b_iy=\frac{1}{p}\cdot pa_ix+\frac{1}{q}\cdot qb_iy\geq(pa_ix)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb_iy)^{\frac{1}{q}}=(pa_i)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb_i)^{\frac{1}{q}}$$

і

$$\min_D(a_ix+b_iy)=(pa_i)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb_i)^{\frac{1}{q}},\ i=\overline{1,n}\ .$$

Покладемо $a=\dfrac{c^p}{p},\ b=\dfrac{d^q}{q}$, тоді $\min\limits_D f_i(x,y)=c_id_i$, $i=\overline{1,n}$, і

$$\min_D F(x,y)=p^{\frac{1}{p}}(a_1+\ldots+a_n)^{\frac{1}{p}}\cdot q^{\frac{1}{q}}(b_1+\ldots+b_n)^{\frac{1}{q}}=\left(c_1^p+\ldots+c_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+\ldots+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отже, з (1) випливає відома нерівність Гельдера:

$$c_1d_1+\ldots+c_nd_n\leq\left(c_1^p+\ldots+c_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+\ldots+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отримання та доведення низки нерівностей є можливим завдяки використанню відомої теореми Єнсена, яка описує особливості поведінки опуклої функції. При цьому під опуклою вниз (вгору) на деякому проміжку будемо розуміти таку функцію, графік якої лежить вище (нижче) дотичної, проведеної до нього в будь-якій точці цього проміжку.

Теорема Єнсена. [6] *Нехай* $y=f(x)$ *– функція, опукла вниз (вгору) на деякому інтервалі* $(a;b)$, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a;b)$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in R^+$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$. *Тоді справедлива нерівність*

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\ldots+\alpha_nf(x_n),$$
$$\left(f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)\geq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\ldots+\alpha_nf(x_n)\right). \quad (6)$$

Зокрема з (6) можна отримати вже знайомі нерівності між середніми. Нехай функція $f(x)=\ln x$, вона є опуклою вгору при $x>0$, а отже

$$\ln(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)\geq\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2+\ldots+\alpha_n\ln x_n\ .$$

Покладемо в останній нерівності $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ і прийдемо до нерівності між середніми арифметичним і геометричним значеннями $\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$. Якщо в цій нерівності замість $x_1,x_2,\ldots,x_n$ розглянути обернені величини $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\ldots.,\dfrac{1}{x_n}$, то одержимо нерівність між середнім геометричним і середнім гармонічним.

Для опуклої вниз функції $f(x)=x^2$ і $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ використання нерівності (6) приведе до нерівності між середнім квадратичним і середнім арифметичним:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}\geq\frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{n^2}\Rightarrow\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}\geq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_2}{n}.$$

Приклад 9. Довести, що для додатних дійсних чисел a, b, c, d, які задовольняють умову $a+b+c+d=4$, справедлива нерівність $\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}$.

Очевидно, що функція $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$ опукла вгору при $x \in (0;4)$. Покладемо в нерівності Єнсена $\alpha_i = \frac{1}{4},\ i=\overline{1:4},\ x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c,\ x_4=d$, отримаємо, що

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\right) \le \frac{\frac{1}{4}(a+b+c+d)}{\left(\frac{1}{4}\right)^3 (a+b+c+d)^3+8} = \frac{1}{9},$$

звідки і слідує ця нерівність.

Іноді зручним є метод дотичної для доведення нерівностей, який полягає у використанні властивостей опуклих функцій: графік опуклої вгору (вниз) функції лежить не вище (не нижче), ніж графік будь-якої дотичної на проміжку опуклості.

Покажемо справедливість попередньої нерівності, використовуючи метод дотичної. Помітимо, що при $a=b=c=d=1$ маємо знак рівності. Розглядаючи функцію $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$ на $x \in (0;4)$, складемо рівняння її дотичної в точці $x_0=1$. Маємо $y=\frac{2x+1}{27}$. Оскільки функція $f(x)$ є опуклою вгору, то справедлива нерівність $\frac{x}{x^3+8} \le \frac{2x+1}{27}$. Тоді

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \le \frac{2(a+b+c+d)+4}{27} = \frac{4}{9}.$$

2. Теорія диференціального числення є потужним математичним апаратом для розв'язування різних класів задач. Зокрема, застосування основних теорем диференціального числення і похідної для дослідження властивостей функцій значно полегшує доведення нерівностей.

Нехай потрібно довести нерівність $f(x) \ge g(x)$ для всіх x з відрізка $[a;b]$ області визначення функцій $f(x)$ та $g(x)$. Розглянемо різницю цих функцій $h(x)=f(x)-g(x)$ і знайдемо її похідну. Нехай похідна $h'(x)$ задовольняє умови:

1) має на цьому відрізку єдиний корінь x_0;

2) значення x_0 є точкою мінімуму функції $h(x)$;

3) виконується нерівність $h(x_0)=f(x_0)-g(x_0) \ge 0$.

Тоді можна стверджувати, що на відрізку $[a;b]$ виконується нерівність $f(x) \ge g(x)$. [7]

Приклад 10. Довести, що для всіх $x>-1$ і для всіх натуральних n виконується нерівність $(1+x)^n \ge 1+nx$ (нерівність Бернуллі).

При $n=1$ нерівність є очевидною. Нехай $n>1$. Розглянемо функцію $h(x)=(1+x)^n-1-nx$. Її похідна $h'(x)=n(1+x)^{n-1}-n$ дорівнює нулю в єдиній точці $x=0$, яка є точкою мінімуму цієї функції. Тому для всіх $x>-1$ виконується нерівність $h(x) \ge h(0)$ або $(1+x)^n-1-nx \ge 0$. З одержаного співвідношення випливає нерівність Бернуллі.

Приклад 11. Довести, що для $x>0$ справедлива нерівність $x-\frac{x^3}{3}<arctgx$.

Покладемо $h(x)=arctgx-x+\frac{x^3}{3}$, тоді $h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2=\frac{x^4}{1+x^2}\geq 0$ для довільного *x*. Очевидно, що похідна $h'(x)$ дорівнює нулю в єдиній точці $x=0$, яка є точкою мінімуму цієї функції. Оскільки $h(0)=0$, то $h(x)\geq 0$ для всіх $x\in R$, а отже і для $x>0$, що і потрібно було довести.

Покажемо застосування відомої теореми Лагранжа про середнє значення [8] при доведенні нерівностей.

Приклад 12. Довести нерівність $|arctgb-arctga|\leq|b-a|$ для $\forall a,b\in R$.

Очевидно, що при $a=b$ маємо рівність. Розглянемо функцію $f(x)=arctgx$, яка на довільному відрізку $[a;b]$ задовольняє умовам теореми Лагранжа. Тому всередині відрізка $[a;b]$ існує така точка c, для якої справедлива рівність $arctgb-arctga=\frac{b-a}{1+c^2}$ або $|arctgb-arctga|=\frac{|b-a|}{1+c^2}$. Оскільки $0<\frac{1}{1+c^2}\leq 1$ для $\forall c\in[a;b]$, то маємо, що $|arctgb-arctga|\leq|b-a|$ для $\forall a,b\in R$.

Приклад 13. Довести нерівність $f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}$, де $f(x)$ – опукла вгору і диференційовна на проміжку $(a;b)$ функція.

Доведення цієї нерівності засновано на твердженні: якщо функція опукла вгору і диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то в цьому інтервалі її похідна є спадною функцією [6].

За означенням опуклої вгору функції справедливою є нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для довільних $x_1,x_2\in(a;b)$, при цьому рівність виконується за умови $x_1=x_2$.

Нехай нерівність є вірною при $n>2$, і знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $x_1=...=x_n$. Доведемо, що тоді справедлива нерівність $f\left(\frac{x_1+...+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)\geq\frac{f(x_1)+...+f(x_n)+f(x_{n+1})}{n+1}$ для $x_{n+1}\in(a;b)$.

Розглянемо функцію $h(x)=f\left(\frac{x_1+...+x_n+x}{n+1}\right)-\frac{f(x_1)+...+f(x_n)+f(x)}{n+1}$ і дослідимо її на екстремум. Маємо $h'(x)=\frac{1}{n+1}f'\left(\frac{x_1+...+x_n+x}{n+1}\right)-\frac{f'(x)}{n+1}$. Похідна цієї функції дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $f'\left(\frac{x_1+...+x_n+x}{n+1}\right)=f'(x)$. Оскільки за наведеною вище твердженням похідна $f'(x)$ – строго монотонна функція, то $\frac{x_1+...+x_n+x}{n+1}=x$. Звідси єдиним коренем похідної $h'(x)$ є точка $x_0=\frac{x_1+...+x_n}{n}$.

Не порушуючи загальності, можна вважати, що $x_1<x_2<...<x_n$, тоді $x_1<x_0<x_n$ і знак похідної $h'(x)$ в інтервалах $(a;x_0)$ і $(x_0;b)$ співпадатиме зі знаками $h'(x_1)$ і $h'(x_n)$

відповідно. Оскільки $\frac{x_1+...+x_n+x}{n+1} > \frac{x_1+...+x_1+x_1}{n+1} = x_1$ і $f'(x)$ – монотонно спадна, то $f'\left(\frac{x_1+...+x_n+x}{n+1}\right) < f'(x_1)$ і $h'(x_1) = \frac{1}{n+1}\left(f'\left(\frac{x_1+...+x_n+x_1}{n+1}\right) - f'(x_1)\right) < 0$. Аналогічно встановлюємо, що $h'(x_n) > 0$. Отже, x_0 – точка мінімуму і $h(x) \geq h(x_0)$.

Для доведення нерівності залишилось встановити знак $h(x_0)$. Маємо

$$h(x_0) = f\left(\frac{x_1+...+x_n+x_0}{n+1}\right) - \frac{f(x_1)+...+f(x_n)+f(x_0)}{n+1} =$$

$$= f\left(\frac{x_1+...+x_n+\frac{x_1+...+x_n}{n}}{n+1}\right) - \frac{f(x_1)+...+f(x_n)+f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left((n+1)f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right) - \left(f(x_1)+...+f(x_n) - f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right) - \frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}\right) \geq 0$$

або $h(x_{n+1}) \geq 0$, що і доводить задану нерівність.

Очевидно, що нерівність перетворюється на рівність, якщо $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Ця нерівність є частинним випадком нерівності Єнсена при $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$, тому і саму нерівність Єнсена можна було б довести за наведеною схемою.

Доведення деяких нерівностей значно спрощується при застосуванні інтегрального числення, зокрема й такої властивості визначеного інтеграла: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на деякому відрізку $[a;b]$ і для всіх x з цього відрізка справджується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ [7].

Приклад 14. Довести, що при довільному $x \in [1;+\infty)$ виконується нерівність $2017\, x^{2018} + 1 \geq 2018\, x^{2017}$.

Оскільки при $x \in [1;+\infty)$ справедлива нерівність $x^{2016} < x^{2017}$, то маємо $\int_1^x t^{2016}dt \leq \int_1^x t^{2017}dt$ або $\frac{x^{2017}-1}{2017} \leq \frac{x^{2018}-1}{2018}$. Виконавши елементарні перетворення, приходимо до нерівності $2017\, x^{2018} + 1 \geq 2018\, x^{2017}$.

З геометричної точки зору описана вище властивість визначеного інтеграла зводиться до порівняння площ криволінійних трапецій, обмежених зверху графіками невід'ємних на відрізку $[a;b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$, а знизу – віссю Ox.

Приклад 15. Довести нерівність $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n} < \ln 3 \quad \forall n \in N$.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$. Оскільки вона є монотонно спадною для $x > 0$, то на кожному з відрізків $[n+k-1; n+k]$, де $k = \overline{1,2n}$, виконується нерівність $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{x}$, а отже $\int\limits_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{n+k} < \int\limits_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}$, $k = \overline{1,2n}$. Звідси маємо, що

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} < \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} + \int\limits_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} + \ldots + \int\limits_{3n-1}^{3n} \frac{dx}{x} = \int\limits_{n}^{3n} \frac{dx}{x} = \ln 3.$$

Приклад 16. Довести, що $\forall n \in N$ має місце нерівність $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

Для доведення цієї нерівності досить показати справедливість рівносильної їй нерівності $n \ln n - n < \ln 2 + \ldots + \ln n$, яку отримали логарифмуванням заданої.

Якщо порівняти площі прямокутника з основою $[k; k+1]$ і висотою $\ln(k+1)$ та криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \ln x$ з тією ж основою, то отримаємо, що $\ln k > \int\limits_{k}^{k+1} \ln x dx$, $k \in N$ Тоді для $k = \overline{1, n-1}$

$$\ln 2 + \ldots + \ln n > \int\limits_{1}^{2} \ln x dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^{n} \ln x dx = \int\limits_{1}^{n} \ln x dx = n \ln n - n + 1 > n \ln n - n.$$

Іноді для доведення нерівностей є доречним використання відомої нерівності Юнга [6].

Теорема (нерівність Юнга). *Нехай $f(x)$ – неперервна строго зростаюча функція, для якої $x \in [0;+\infty)$ і $f(0) = 0$. Тоді справедливою є нерівність*

$$\int\limits_{0}^{a} f(x) dx + \int\limits_{0}^{b} f^{-1}(y) dy \geq ab,$$

де $f^{-1}(y)$ – функція, обернена до заданої $f(x)$. Рівність виконується, якщо $b = f(a)$.

Очевидність даної нерівності випливає з геометричних міркувань, якщо порівняти площі відповідних фігур (рис. 1).

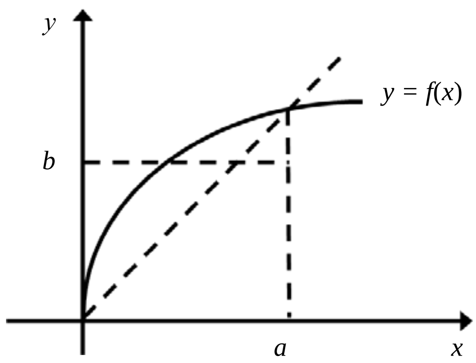

Рис. 1. Геометрична інтерпретація нерівності Юнга

Приклад 17. Складемо нерівність Юнга для функції $y = x^{p-1}$, $p > 1$, оберненою для якої є $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Маємо

$$\int\limits_{0}^{a} x^{p-1} dx + \int\limits_{0}^{b} y^{\frac{1}{p-1}} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

де $q = \frac{p}{p-1}$ або $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Таким чином, справедливою є нерівність $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$ при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Приклад 18. Розглянемо функцію $y=\ln(x+1)$, оберненою для якої на всій області її визначення є $x=e^y-1$. За нерівністю Юнга отримаємо, що

$$\int_0^a \ln(x+1)\,dx+\int_0^b (e^y-1)\,dy=(a+1)\big(\ln(a+1)-1\big)+e^b-b\ge ab.$$

Якщо в останній нерівності замінити a на $a-1$, то справедливою є нерівність $a\ln a-a+e^b\ge ab$.

Приклад 12. Нерівність Юнга для функції $y=\sin x$, оберненою для якої є $x=\arcsin y$, $0\le y\le 1$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$, приведе до такого співвідношення:

$$\int_0^x \sin t\,dt+\int_0^y \arcsin t\,dt=y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}-\cos x\ge xy.$$

Зокрема, при $x=\frac{\pi}{2}$ нерівність має вигляд

$$y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}\ge \frac{\pi}{2}y,\ \ 0\le y\le 1.$$

Висновки. Вивчення математичного аналізу та його застосувань дозволяє значно розширити коло завдань з математики та інших дисциплін. Ми визначили, що безпосереднє використання властивостей функцій основних теорем диференціального та інтегрального числення є значно ефективнішим за інші методи для доведення запропонованих нерівностей. Можливо, що розглянуті нами методи математичного аналізу не вичерпують всіх підходів до розв’язування саме таких задач; залишається відкритим і питання пошуку інших методів доведення нерівностей, а також завдань на застосування цих методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики / О.М. Вороний. – Х.: Основа, 2018. – 255 с.
2. Шунда Н.М. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення / Н.М. Шунда, А.А. Томусяк – К.: Вища школа, 1993. – 375 с.
3. Ушаков Р.П. О едином подходе к доказательству классических неравенств / Р.П. Ушаков // Математика сегодня. – 1995. – Вып.10. – С. 61-66.
4. Ясінський В. Про один аналог нерівності Коші-Буняковського / В. Ясінський, В. Лейфура // Математика в школі. 2005. – №1 – С. 47-51.
5. Алексеев Р. Сумма минимумов и минимум суммы / Р. Алексеев, Л. Курляндчик // Квант. – 1991. – №3. – С. 49-51, с. 55.
6. Собкович Р.І. Основні методи доведення нерівностей / Р.І. Собкович, Н.В. Кульчицька. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2014. – 116 с.
7. Седракян Н.М. Неравенства. Методы доказательства / Н.М.Седракян, А.М. Авоян. – М., Физматлит, 2002. – 256 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / Г.М. Фихтенгольц.– М.: изд-во технико-теорет. лит-ры, 1951. – 690 с.

Мартыненко Е.В., Чкана Я.О. Использование методов математического анализа для доказательства неравенств.

Установление соответствия между типами неравенств и методами их решения является достаточно актуальной методической проблемой. В статье обоснована целесообразность использования методов математического анализа при *доказательстве неравенств и показано, что во многих случаях это значительно упрощает данный процесс. Предложены методы, основанные на свойствах функций одной переменной и теории дифференциального и интегрального исчисления. Для каждого из них подобраны типичные неравенства и показано, что применение данного метода является наиболее эффективным. Раскрыты особенности использования некоторых теорем математического анализа, которые при определенных условиях можно считать общим методом доказательства неравенств.*

Ключевые слова: *неравенство, методы доказательства, математический анализ.*

Martynenko E.V., Chkana Ya.O. Use of methods of mathematical analysis for proving inequalities.

The establishment of a correspondence between the types of inequalities and the methods for solving them is a rather urgent methodological problem. The article substantiates the expediency of using mathematical analysis methods in proving inequalities and shows that in many cases this greatly simplifies the given process. Methods based on the properties of functions of one variable and the theory of differential and integral calculus are proposed. For each of them, typical inequalities are selected and it is shown that the application of this method is the most effective. The features of the use of certain theorems of mathematical analysis, which under certain conditions can be considered a general method of proving inequalities, are disclosed.

Keywords: *inequality, methods of proof, mathematical analysis.*

УДК 37.016

М. П. Москаленко, А. П. Вакал, Л. П. Міронець
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка

МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ ВІРТУАЛЬНОЇ ЕКСКУРСІЇ З БІОЛОГІЇ НА ТЕМУ «ВИВЧЕННЯ БІОРІЗНОМАНІТТЯ (НА ПРИКЛАДІ СВОЄЇ МІСЦЕВОСТІ)» (9 кл)

У статті проаналізовано вимоги до успішного проведення екскурсії на тему «Вивчення біорізноманіття (на прикладі своєї місцевості)». Проведення таких екскурсій передбачає наявність природних угрупувань, що зазнали мінімальних антропогенних змін. Це об'єкти природно-заповідного фонду, у своїй більшості недоступні для реальної екскурсії. Тому єдиним способом успішного виконання шкільної програми з біології є віртуальна екскурсія. Створення такої віртуальної екскурсії може відбуватися у два способи. Перший з них передбачає використання вже викладених в Інтернет відео та фото потрібних об'єктів. Але в мережі розміщені здебільшого матеріали про найбільші заповідники та національні парки загальнодержавного значення, які мають суто популярний характер і не відповідають вимогам шкільної екскурсії на дану тему. Інший шлях створення віртуальної навчальної подорожі - це екскурсії, які розробляє сам вчитель. У цьому випадку вчитель біології обирає маршрут, який повинен пройти через різні природні біотопи. Саме там існує чисельний набір видів, адаптованих до різноманітних факторів середовища. Головна вимога до фото та відео матеріалів віртуальної екскурсії на дану тематику: в кадрі повинна бути не просто найбільша кількість видів, а представники різних систематичних груп під час їх взаємодії. Учнів можна залучити до монтажу відібраного матеріалу.Такі матеріали з коментарями вчителя, супутніми запитаннями та завданнями стимулюють не лише зорову пам'ять учнів, а й потребу