Кушнерьов Олександр
Студент 6 курсу, спеціальність «Математика»*
k-a-s2008@ukr.net
Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

РОЗФАРБОВУВАННЯ ГРАФІВ

Останнім часом графи і пов'язані з ними методи досліджень органічно пронизують на різних рівнях чи не всю сучасну математику. Теорія графів входить як окремий розділ у дискретну математику, розглядається як одна з гілок сучасної топології та має безпосереднє відношення до алгебри і теорії чисел.

Родоначальником теорії графів вважається Леонард Ейлер. У 1736 році в одному зі своїх листів він сформулював і запропонував розв'язок задачі про сім Кенігсберзьких мостів, що стала згодом однією з класичних задач теорії графів.

Поштовх до розвитку теорія графів отримала на рубежі XIX і XX століть, коли різко зросла кількість робіт в сфері топології та комбінаторики, з якими її пов'язують тісні узи спорідненості. Графи стали використовуватися при побудові схем електричних кіл і молекулярних схем. Як окрема математична дисципліна теорія графів була вперше представлена в роботі угорського математика Кеніга в 30-тих роках XX століття.

Без теоретико-графових алгоритмів важко уявити сучасне програмування. У цьому контексті слід відмітити задачі, пов'язані з представленням програм у вигляді теоретико-графових моделей, найважливішою з яких є графова. Особливо важливе місце вони займають при моделюванні процесів та явищ [1].

Окрім того, сферами застосування граф-моделей є використання обчислювальних ресурсів системи, організація великих масивів інформації, збільшення степеня паралелізму програми, підвищення ефективності роботи багатопроцесорних і багатомашинних систем. Розв'язання цих та інших задач привело до появи великої кількості граф-моделей, пов'язаних як з параметрами та структурами даних, так і з обчислювальними системами.

Окрім того, графи знайшли своє застосування в теорії планування та управління, теорії розкладів, соціології, математичній лінгвістиці, економіці, біології, медицині, географії. Широке застосування знаходять графи в таких областях, теорія скінченних автоматів, електроніка, у розв'язанні ймовірнісних і комбінаторних задач, знаходженні максимального потоку в мережах, найкоротшої відстані між вершинами графа, максимального паросполучення, перевірки планарності графа тощо.

Як особливий клас можна виділити задачі оптимізації на графах. Математичні розваги і головоломки також є частиною теорії графів. Зокрема, однією із важливих задач на графах є задача розбиття або розфарбування множини його вершин чи ребер [2], а також знаменита проблема чотирьох фарб [3].

Зазвичай, коли мова заходить про розфарбування графів, майже завжди мають на увазі фарбування їх вершин. Оскільки графи, в яких є петлі, неможливо правильно розфарбувати, то вони не є предметом обговорення. Термінологія, в якій мітки називаються кольорами (фарбами), походить від розфарбовування політичних карт. Розфарбування з використанням k кольорів називається k-розфарбуванням. Найменше число кольорів, необхідне для розфарбування вершин графа G називається його *хроматичним числом* і часто позначається $X(G)$. Основною проблемою при відшуканні хроматичного числа графа є те, що компоненти розбиттів або декомпозицій в існуючих напрямках теорії графів мають бути зв'язними, в той час як компоненти оптимальних розбиттів, як правило, виявляються незв'язними. Це значно ускладнює застосування традиційних методів теорії графів для розв'язання задач на розбиття [4].

Вершинне розфарбування називається *власним (правильним),* якщо жодні дві суміжні вершини не пофарбовані в один колір. Підмножина вершин, виділених одним кольором, називається *кольоровим класом,* кожен такий клас формує незалежний набір. Таким чином, *k*-розфарбування – це те ж саме, що і розбиття вершин на *k* підмножин, що не перетинаються [5].

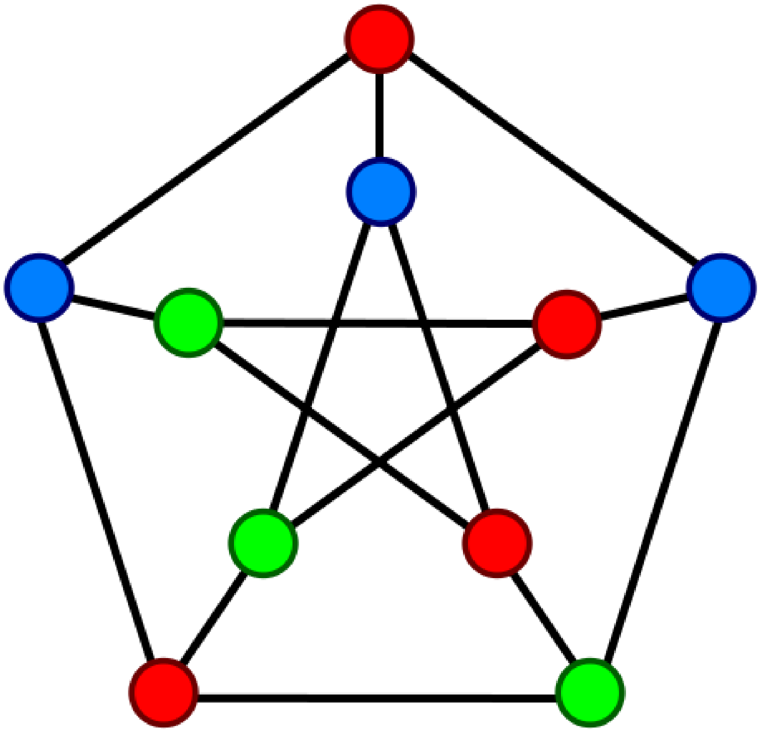

Рис. 1. 3-розфарбування графа Петерсена.

Аналогічно, *власним (правильним) реберним розфарбуванням* графа називається присвоювання ребрам графа певних «кольорів» таким чином, що ніякі два суміжних ребра не фарбуються в один і той же колір. Наприклад, на рисунку 2 подано реберне розфарбування графа в червоний, синій і зелений кольори. *Реберно-хроматичним числом (або хроматичним індексом)* графа називають найменше число кольорів, необхідне для правильного розфарбування ребер графа. При знаходженні правильних вершинних чи реберних розфарбувань графів виникає питання: чи можна правильно розфарбувати вершини (ребра) заданого графа максимум в *k* різних кольорів для заданого значення *k* або ж навпаки – знайти мінімальне можливе число кольорів [5].

Наприклад, ребра графа на рисунку 2 можна правильно розфарбувати в три кольори, але не можна розфарбувати в два, отже, граф має хроматичний індекс три.

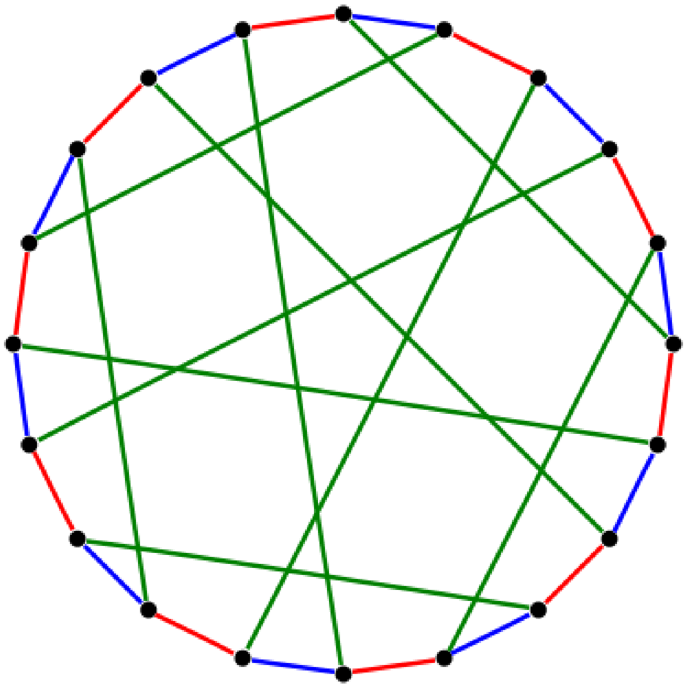

Рис. 2. Правильне реберне розфарбування кубічного графа

Окрім задачі відшукання найменшого числа кольорів, у які можна правильно розфарбувати вершини (ребра) графа, виникає задача пошуку усіх можливих правильних розфарбувань у задане число кольорів. Число можливих варіантів правильного розфарбування вершин графа з використанням не більше ніж заданого числа кольорів розв’язується із використанням хроматичного многочлена [5]. Наприклад, граф на рисунку 3 може бути розфарбований 12 способами з використанням 3 кольорів.

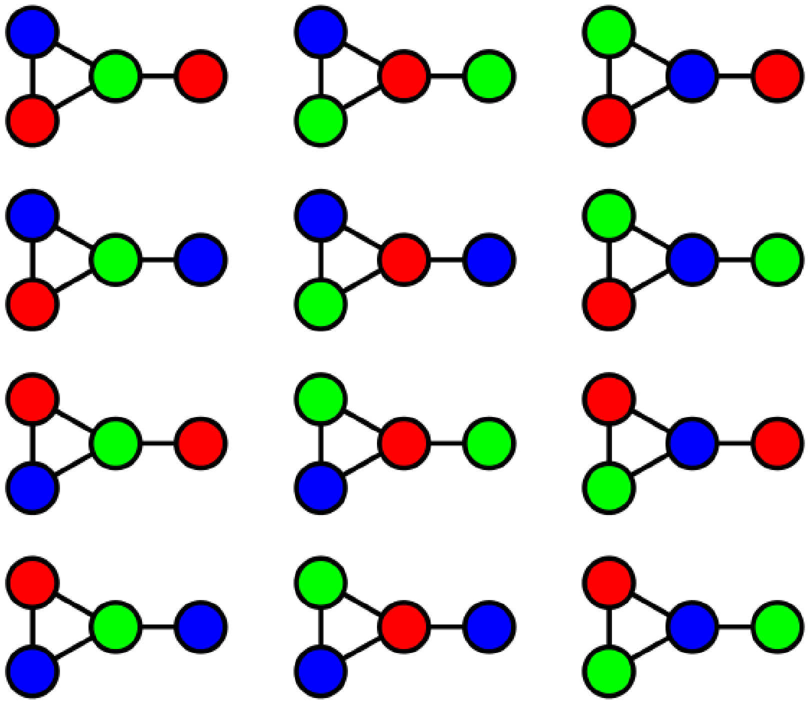

Рис. 3. Правильні розфарбування графа у 3 кольори

Історично поняття хроматичного числа виникло з проблемою чотирьох фарб. Проблема виникла в математиці в середині 19 століття. Спочатку питання формулювалося наступним чином: знайти найменше число кольорів для розфарбування географічної карти, якщо сусідні країни розфарбовані в різні кольори? Під географічною картою розуміють розбиття площини на скінченне число зв'язних областей (країн), межі яких складаються із замкнутих неперервних ліній без самоперетинів, а сусідніми вважаються країни, що мають спільну границю.

Досить очевидно, що трьох фарб недостатньо, тому питання формулювалося зазвичай у більш конкретному виді: чи достатньо чотирьох фарб для розфарбування будь-якої географічної карти? Це і є проблема чотирьох фарб [6].

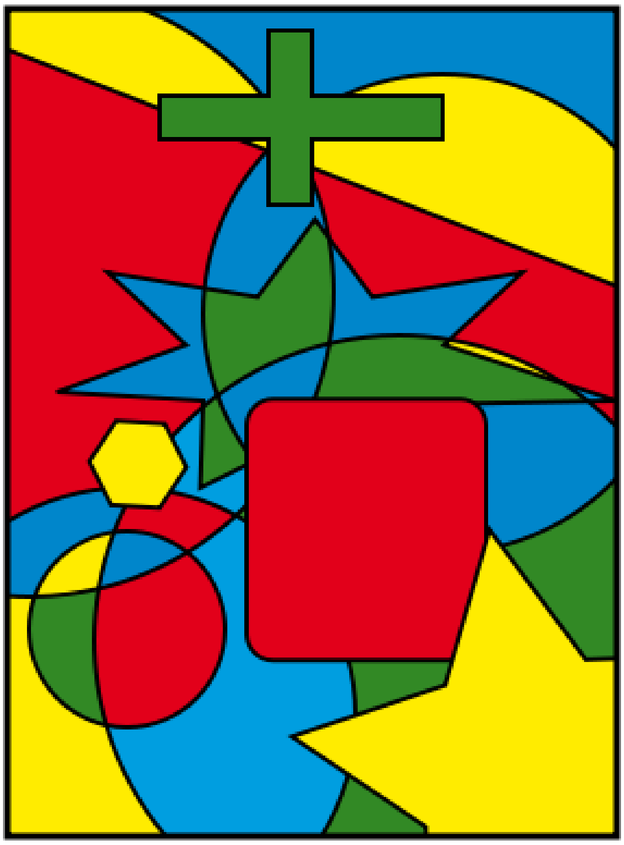

Рис. 4. Розфарбування плоского графа у чотири кольори

Задача розфарбування географічних карт зводиться до пошуку правильного розфарбування вершин плоских графів, що є двоїстими до заданої плоскої карти. Проілюструємо це зведення картою, зображеної на рисунку 5.

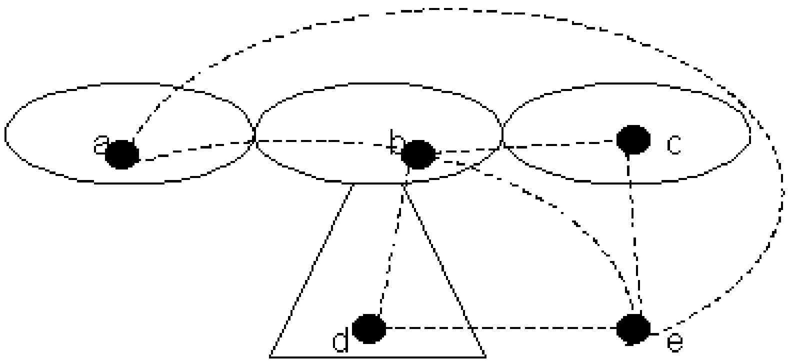

Рис. 5. Побудова двоїстого графа

На рисунку 5 зображено карту, що має п'ять країн (зовнішня область – теж країни). Усередині кожної області зафіксуємо точку (вершину двоїстого графа), та з'єднуємо точки дугами, якщо відповідні країни мають спільний кордон (на рис. 5 ребра проведено пунктирними лініями). При цьому ребра можна зобразити так, щоб вони не перетиналися, тобто щоб отриманий граф також був плоским. Зрозуміло, що розфарбування карти визначає правильне розфарбування вершин графа і навпаки. Тому проблему чотирьох фарб можна сформулювати наступним чином: чи достатньо чотирьох фарб для правильного розфарбування вершин плоского графа [6].

Ця проблема виникла вона при створені географічних карт. У 1852 році Френсіс Гетрі, складаючи карту графств Англії, звернув увагу, що для того, щоб розфарбувати карту так, щоб два графства, що мають спільну границю, були забарвлені по-різному, цілком вистачає чотирьох фарб. Його брат, Фредерік, повідомив про це спостереження відомого математика Августуа де Моргана, а той – математичну громадськість. Широку популярність проблема чотирьох фарб набула після того, як в 1878 році видатний математик Артур Келі повідомив, що він розмірковував над цією задачею, але так і не зумів її розв’язати[7].

Задача розфарбовування карти на площині еквівалентна аналогічній задачі на сфері. Для простих карт як правило, достатньо і трьох кольорів, четвертий колір потрібен, наприклад, тоді, коли є одна область, оточена непарним числом інших, які дотикаються одна одної, утворюючи цикл. Теорема про п'ять фарб, що стверджує, що для правильного розфарбування плоскої карти досить п'яти кольорів, мала коротке і нескладне доведення і була доведена наприкінці XIX століття. Проте обгрунтування аналогічного результату у випадку чотирьох кольорів наштовхнулося на значні труднощі.

Теорема про чотири фарби була доведена в 1976 році Кеннетом Аппелем і Вольфгангом Хакеном з університету Ілінойса. Це була перша велика математична теорема, доведена за допомогою комп'ютера. Першим кроком у доведенні було обґрунтування факту, що існує певний набір з 1936 карт, жодна з яких не може містити карту меншого розміру, яка спростовувала б теорему. К.Аппель і В. Хакен використали спеціальну комп'ютерну програму, щоб довести цю властивість для кожної з 1936 карт. Доведення цього факту зайняло сотні сторінок. Після цього К.Аппель і В.Хакен дійшли висновку, що не існує контрприкладу до теореми, тому що інакше він мав би містити якусь із цих 1936 карт. Це протиріччя говорить те, що взагалі не існує контрприкладу до відповідної теореми.

Спочатку нетрадиційне «комп'ютерне» доведення не було прийняте математичною спільнотою, оскільки його неможливо було перевірити вручну. Проте згодом воно отримало визнання, хоча у декого з прихильників традиційних доведень ще довгий час залишалися сумніви. Щоб розвіяти їх, у 1997 році Робертсон, Сандерс, Сеймур і Томас опублікували простіше доведення, в якому використовуються аналогічні ідеї, але як і раніше виконане за допомогою комп'ютера. Крім того, в 2005 році доведення було проведене Дж. Гонтиром з використанням спеціалізованого програмного забезпечення, проте комп'ютерна частина все ще залишалася швидше предметом віри. Адже навіть перевірка роздруківок усіх програм і усіх вхідних даних не може виключити випадкові збої або приховані вади електроніки [7].

Проблема чотирьох фарб, яка на перший погляд здавалася ізольованим завданням, навіть грою, мало пов'язаною з іншими розділами математики та практичними застосуваннями, знаходить у наш час найнесподіваніші застосування. Відомо понад двадцять формулювань цієї проблеми, які пов'язують її з конкретними задачами алгебри, статистичної механіки і задачами планування. І це ще раз підкреслює всюдисущий характер математики: розв'язок задачі, що вивчається з чистої цікавості, виявляється корисним в описі реальних і абсолютно різних за своєю природою об'єктів і процесів [7].

Список використаних джерел

1. Касьянов В.Н., Евстигнеев В. А. Графе в программировании: обработка, визуализация и применение.- С.Пб.:БХВ-Петербург, 2003.-1104с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. - С.Пб. и др.: Питер, 2003.- 301с.

3. Теорія графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_графів

4. Протасов І.В., Протасова К.Д. Розкладність графів: Навчальний посібник. - Видавничо - поліграфічний центр «Київський університет», 2003. - 73с.

5. Графы. Красиво, наглядно, интересно [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.tofmal.ru/projects/graphs/kraski.html

6. Дискретная математика [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://pgap.chat.ru/zap/zap253.htm

7. Проблема чотирьох фарб [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/16985/1/371.pdf

Анотація. Кушнерьов О. Розфарбовування графів. *У статті розглянуто розфарбовування графів, поняття хроматичного числа та проблему чотирьох фарб. Наведено приклади розфарбування графів в вигляді малюнків.*

Ключові слова: *графи, хроматичне число, розфарбування графу, проблема чотирьох фарб.*

Abstract. Kushnerov O. Coloring of graphs. *The article considers coloring of graphs, the concept of chromatic number and the problem of four colors. Examples of coloring graphs in the form of drawings.*

Keywords: *graphs, chromatic number, coloring graph, problem four colors.*