

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Графи – це унікальні математичні об'єкти, за допомогою яких можна розв'язувати математичні, економічні та логічні задачі, спрощувати та моделювати фізичні та хімічні процеси і явища, хімії, складати схеми і графіки. Окрім того, мовою теорії графів зручно ілюструвати цілу низку математичних фактів.

Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася у 1736 році та була присвячена розв'язуванню задачі про Кенігсберзькі мости. Питання полягало в тому, чи можна здійснити прогулянку містом так, щоб виходячи з дому, повернутися назад, пройшовши в точності по одному разу кожен із семи мостів.

Цю задачу можна представити у вигляді геометричної схеми, на якій точки зображують частини суші, а лінії, їх з'єднують – мости. (рис. 1)

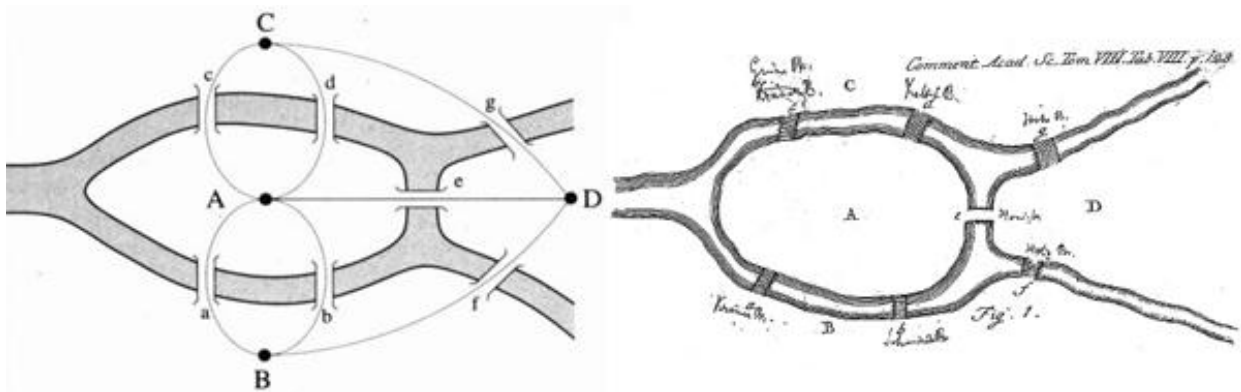


Рис. 1. Схема Кенігсберзьких мостів

Спочатку теорія графів відігравала незначну роль у математиці, оскільки займалася, в основному, математичними розвагами і головоломками. Проте, подальший розвиток математики та її застосувань дав сильний поштовх до розвитку теорії графів. Вже у XIX сторіччі графи стали використовуватися при побудові схем електричних ланцюгів і молекулярних схем. Окрім того, вони дозволяють наочно і просто розв'язати цілу низку практичних завдань, зокрема:

на встановлення різного виду відповідностей, аналізі транспортних задач, задач про потоки в мережах нафтопроводів тощо [1].

Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ. Великою мірою це пов'язано з виникненням, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру. Математичні методи, які значною мірою використовувались лише у фізиці, стали успішно застосовуватись у інших сферах людської діяльності. І одним із потужних інструментів такого використання є графи.[2]

Із суто формальної точки зору граф можна розглядати як один з різновидів алгебраїчної системи (а саме, як модель), а отже, і всю теорію графів – як розділ сучасної алгебри. У наш час теорія графів застосовується в багатьох розділах математики, фізики, біології, хімії, медицині, історії, лінгвістиці, соціальних науках, техніці тощо.

Найширші застосування теорія графів знайшла у математиці при розв'язуванні логічних завдань і головоломок. Основою застосування графів для розв'язування логічних задач є виявлення і послідовне виключення можливостей, заданих в умові. Це виявлення логічних можливостей часто може бути витлумачено за допомогою побудови та розгляду відповідних графів. Наприклад, нехай є кілька різних вакантних посад і група людей, які бажають їх зайняти, причому кожен із претендентів достатньо кваліфікований для кількох, але не для всіх наявних посад. Чи можна кожного з цих людей призначити на одну з тих посад, які йому підходять?

Ми можемо знову проілюструвати цю задачу за допомогою деякого графа. Як уже сказано, є певна група (множина) людей, яку ми позначимо як M , і деяка множина посад P . Будуємо граф, проводячи ребра (m_i, p_j) , що з'єднують кожну людину m_i з тими посадами p_j , які вона може зайняти. На цьому графі не

буде ребер, що з'єднують між собою дві вершини з множин M чи P , тому такий граф є двочастковим (див. рис. 2).

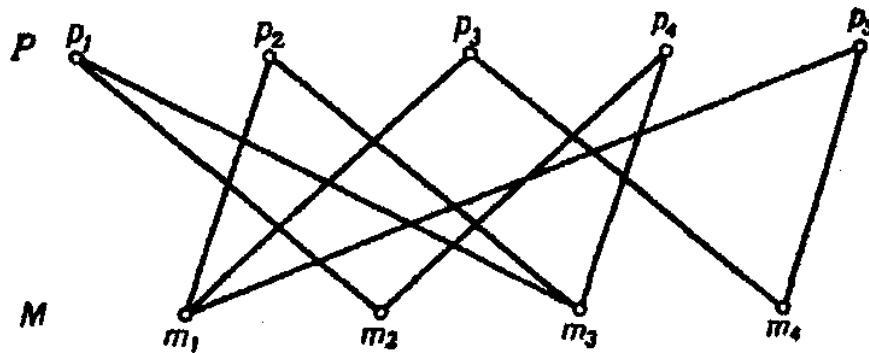


Рис. 2. Зображення зв'язків між людьми та посадами

Знайти підходяще місце для кожного з претендентів можна лише за умови, що посад буде не менше, ніж претендентів. Але ця умова не є недостатньою. Нехай, наприклад, група претендентів складається із двох столярів і особи, яка може працювати і столяром і сантехніком, і для них є чотири посади: одне місце столяра і три місця сантехніка. Тоді, очевидно, один столяр залишиться без роботи, хоча в даному випадку місць більше, ніж претендентів, і хоча серед претендентів є люди що можуть працювати на двох посадах.

Припустимо, що загальна кількість претендентів - N . Для виконання задачі повинна виконуватись наступна умова: яку б групу із k чоловік, $k=1,2,\dots,N$, ми не взяли, повинно бути принаймні k посад, кожному з яких може займати хоча б один із претендентів. Наприклад, якщо один з претендентів є столяром, а другий – одночасно і столяром і сантехніком, і є два місця сантехніка, то наша умова виконується при $k=2$, але не виконується при $k=1$, тому вказані люди не можуть одночасно влаштуватися на роботу.

Виділену умову ми коротко назовемо *умовою різноманітності*. Вищенаведена задача може використовуватись працівниками служби зайнятості для правильного розподілу працівників на посади.

Розглянемо тепер деякі застосування теорії графів у деяких галузях людської діяльності.

Графи й інформація. У теорії інформації значну роль відіграють так звані двійкові дерева. Нехай потрібно закодувати певну кількість повідомлень у

вигляді скінченних послідовностей з нулів і одиниць. Якщо ймовірності кодових слів задано, то найкращим вважається код, у якому середня довжина слів мінімальна у порівнянні з іншими розподілами ймовірності. Завдання про побудову такого оптимального коду дозволяє розв'язати алгоритм Хаффмана [3].

Двійкові кодові дерева допускають інтерпретацію в рамках теорії пошуку. Кожній вершині при цьому зіставляється питання, відповісти на яке можна або «так», або «ні». Позитивним і негативним відповідям відповідають два ребра, що виходять з вершини. «Опитування» звершується, коли вдається вставити те, що було потрібно. Таким чином, якщо комусь знадобиться взяти інтерв'ю у різних людей, і відповідь на чергове запитання залежатиме від заздалегідь невідомої відповіді на попереднє запитання, то план такого інтерв'ю можна представити у вигляді двійкового дерева [3].

Графи в хімії використовуються для складання формул. «Хімічні» граfi дають можливість прогнозувати хімічні перетворення, пояснювати сутність і систематизувати деякі основні поняття хімії: структуру, конфігурацію, конфірмації, кванта-механічні та статистико-механічні взаємодії молекул та ін. До хімічних графам відносяться молекулярні, дводольні та сигнальні граfi кінетичних рівнянь реакцій .

Молекулярні граfi, що використовуються в стереохімії та структурній топології, хімії кластерів, полімерів являють собою неорієнтовані граfi, що відображають будову молекул (рис. 3) [4].

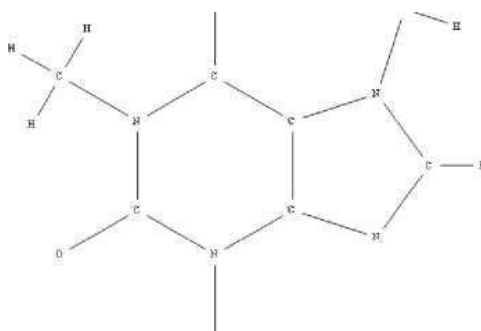


Рис. 3. Приклад молекулярного графа

Ще наприкінці XIX століття А. Келі розглянув задачу про можливі структури насичених (або граничних) вуглеводнів, молекули яких задаються формулою

$$C_nH_{2n+2}$$

Молекула кожного граничного вуглеводню являє собою дерево. Якщо видалити всі атоми водню, то решта атоми вуглеводню також будуть утворювати дерево, кожна вершина якого має степінь не вище 4. Отже, число можливих структур граничних вуглеводнів, тобто число гомологів даної речовини, дорівнює числу дерев з вершинами степеня не більше чотирьох.

Таким чином, підрахунок числа гомологів граничних вуглеводнів також призводить до задачі про перерахування дерев певного типу. Це завдання і її узагальнення розглянув Д. Пойа. [3]

Графи відіграють велику роль у *біологічній теорії* розгалужених процесів. Для простоти розглянемо тільки один різновид розгалужених процесів – розмноження бактерій. Припустимо, що за певний проміжок часу кожна бактерія або ділиться на дві нові, або гине. Тоді для потомства однієї бактерії ми матимемо двійкове дерево.

Нас цікавитиме лише запитання: в скількох випадках n -е покоління однієї бактерії налічує рівно k нащадків? Рекурентне співвідношення, що означає число необхідних випадків, відоме в біології під назвою процесу Гальтона-Ватсона. Його можна розглядати як окремий випадок багатьох загальних формул (рис. 4)[4].

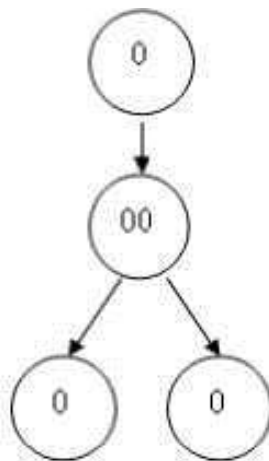


Рис. 4. Бінарний граф розмноження бактерії

У *медицині* у вигляді графа можна подати схему переливання крові (рис. 5)[4].

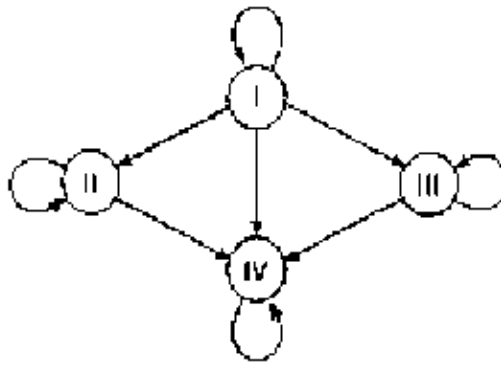


Рис. 5. Схема переливання крові

На цій схемі види груп крові людини відповідають вершинам графа, а стрілками показано, яку кров можна переливати людині з даною групою крові.

Графи у фізиці є топологічними моделями схем електричних ланцюгів.

Ще донедавна одним з найбільш складних завдань для радіоаматорів було конструювання друкованих схем. *Друкованою схемою* називають платівку з якогось діелектрика (ізолюючого матеріалу), на якій у вигляді металевих смужок витравлені доріжки. Перетинатися доріжки можуть тільки в певних точках, куди встановлюються необхідні елементи (діоди, тріоди, резистори та інші), їх перетин в інших місцях викличе замикання електричного ланцюга.

Для розв'язання цього завдання необхідно побудувати плоский граф, вершини якого відповідають вузлам з'єднань, а ребрам – металеві доріжки, на яких при необхідності вказується напрямок струму або потоку потужності. (рис. 6).

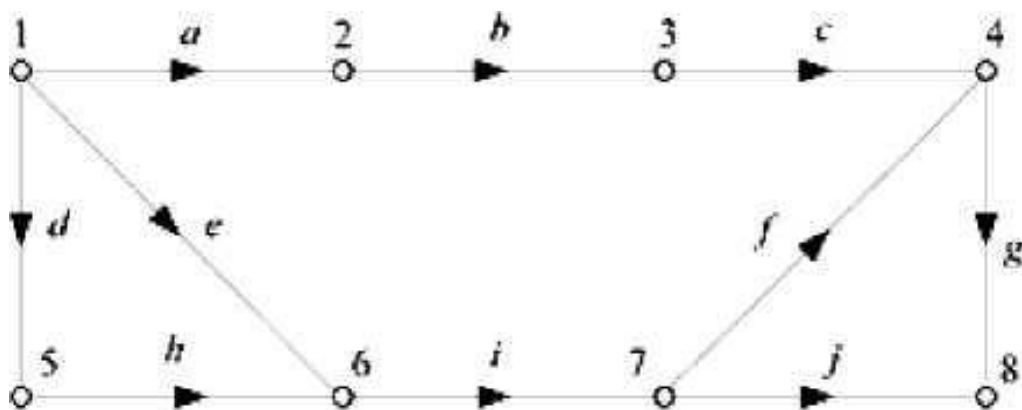


Рис. 6. Граф електромережі

Широке застосування знаходять графи у **психології** та **соціології**. Багато соціологічних і соціально-психологічних завдань розв'язуються із використанням теорії графів. Зокрема, це задачі, пов'язані з формалізацією та

Найулюбленіша

Тетяна

Світлана

«Аутсайдер»

Марина

Найстаранніша

Олена

Катерина

Людмила

Ксенія

Керівник філії

Неофіційний лідер

Найнепродуктивніша

odfir. RUSKOPROJEKTI 05. i. 0

При аналізі біологічних співтовариств, прийнято будувати харчові або трофічні мережі, тобто графи, вершини яких відповідають видам, що входять до спільноти, а ребра вказують трофічні зв'язки між ними. Зазвичай такі графи орієнтовані: напрямок дуги між двома вершинами вказує на той з видів, який є споживачем іншого, тобто напрямок дуги збігається з напрямком потоку речовини або біомас в системі. (рис. 8) [4].

При аналізі біологічних співтовариств, прийнято будувати харчові або трофічні мережі, тобто граfi, вершини яких відповідають видам, що входять до спільноти, а ребра вказують трофічні зв'язки між ними. Зазвичай такі граfi орієнтовані: напрямок дуги між двома вершинами вказує на той з видів, який є споживачем іншого, тобто напрямок дуги збігається з напрямком потоку речовини або біомас в системі. (рис. 8) [4].

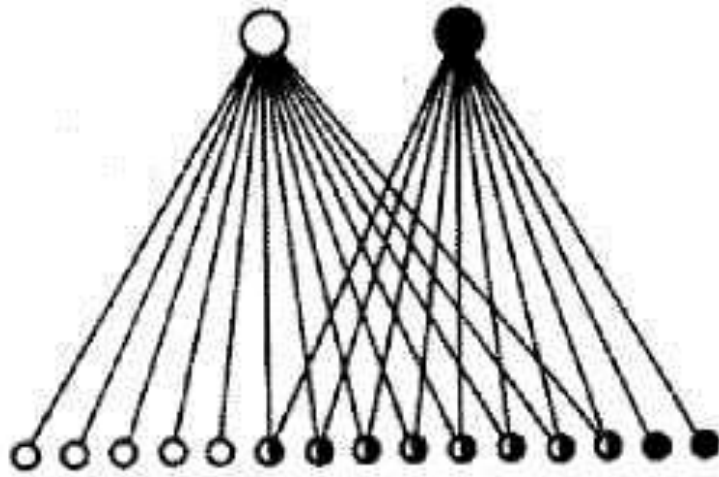


Рис. 8. Приклад двох вікової трофічної пірамід

Теорія графів знайшла своє застосування і в **архітектурі та будівництві**. При складанні великих проектів, що містять різні види робіт часто виникає ситуація, коли ту чи іншу роботу можна почати лише після закінчення інших. Так при будівництві будинку не можна приступити до оздоблювальних робіт, поки не зведені стіни, і не можна зводити стіни до укладання фундаменту. Послідовність робіт зображується у вигляді мережевих графіків. (рис. 9). Вони застосовуються при плануванні діяльності підприємства, де визначаються критичні шляхи, резерви часу тощо [6].

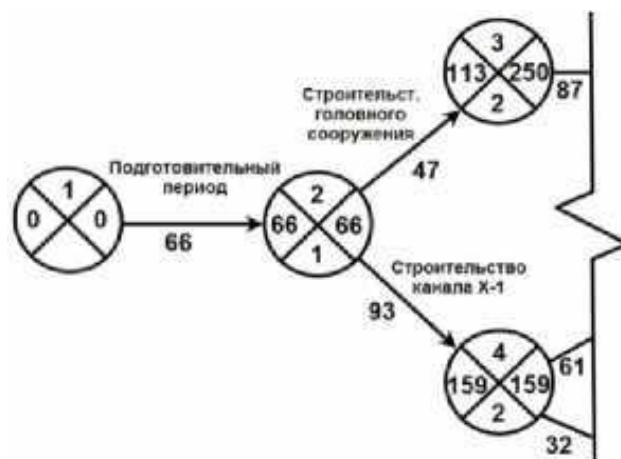


Рис. 9. Застосування графа в будівництві

Крім наведених прикладів, графи широко використовуються в економіці, електротехніці, менеджменті, логістиці, географії, машинобудуванні, програмуванні, автоматизації технологічних процесів і виробництв, психології, рекламі тощо.

Список використаних джерел

1. Розв'язування задач за допомогою графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://ua-referat.com/Розв'язування_задач_за_допомогою_графів
2. Березина Л.Ю. Графи и их применение: Пособие для учителей // М.:Просвещение, 1979, 144 с.
3. Теорія графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://bukvar.su/matematika/page,2,133637-Teoriya-grafov.html>
4. Применение элементов теории графов в различных сферах научной деятельности [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.kspi.kz/files/articles/matem_2012_1-112-116.pdf
5. Применение теории графов [Електронний ресурс] / Режим доступу: <https://sites.google.com/a/labore.ru/teoria-grafov-i-ee-primenenie/integracionnaa-svaz>
6. Фридман И. Научные методы в архитектуре./ И.Фридман. пер. с англ. А.А. Воронина - М.: Стройиздат, 1983. - 160 с.
7. Методичні основи вибору напрямів екологічно спрямованого інноваційного розвитку на різних рівнях [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream/123456789/24477/1/1.3_prokopenko_kasyanenko.pdf

Анотація. Кушнерьов О. Про деякі застосування теорії графів. У статті розглянуто деякі застосування теорії графів в науці та техніці, а саме як графи застосовуються в інформації, хімії, біології, медицині, фізиці, екології, психології та соціології, архітектурі та будівництві.

Ключові слова: графи, графи й інформація, графи в хімії, біологія, медицині, фізиці, екології, психології та соціології, архітектурі та будівництві.

Abstract. Kushnerov O. On some applications of graph theory. The paper considers some applications of graph theory in science and technology, in particular

as graphs used in information science, chemistry, biology, medicine, physics, ecology, psychology, sociology, architecture and construction.

Keywords: *graphs, graphs and information graphs in chemistry, biology, medicine, physics, ecology, psychology, sociology, architecture and construction.*