

того, чтобы школьники увидели мировоззренческие аспекты математики, осознали генезис математических идей и пути к некоторым математическим открытиям, оценили роль математики в решении прикладных проблем. Рассмотрена необходимость исследования и реализованы в практике обучения возможностей исторических сведений. Центральным понятием всего курса математики в начальной школе является натуральное число. В качестве примера приведен материал из истории математики по теме «Нумерация чисел», который, по мнению автора, будет интересен учащимся.

Ключевые слова: учащиеся начальной школы, элементы истории математики, нумерация чисел.

SUMMARY

Lohmatova A. Use of elements of history on the lessons of mathematics at initial school.

In the article, the author has attempted to highlight a number of issues concerning the use of elements of history of mathematics in elementary school classroom. Elementary school math course can create the conditions for students to see the philosophical aspects of mathematics, to realize the genesis of mathematical ideas and ways to some mathematical discoveries, evaluate the role of mathematics in solving practical problems. The need to explore and apply in practice learning opportunities of historical information is considered. The central concept of mathematics in primary school is a positive integer. As an example, educational material from history of mathematics on the «Numeration of Numbers», which, in author's opinion, will be of interest to students.

Keywords: students initial school, elements of history of mathematics, numeration of numbers.

УДК 372.851

В. Б. Мілушев, Д. В. Бойкіна

Пловдивський університет ім. Паїсія Хілендарського,
Болгарія

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ РОЗВИТОК УЧНІВ

Представлена структура методичної розробки математичної задачі. Акцент поставлений на тезу: щоб навчання розв'язуванню завдань було успішним і щоб забезпечити умови для інтелектуального розвитку учнів, слід цілеспрямовано ознайомлювати їх з методами розв'язування завдань. Пропонований підхід є передумовою більш активного і самостійної участі учнів у вирішенні інших завдань системи, мета яких – удосконалення вмінь застосування засвоєних методів (синтезу, недосконалого і висхідного аналізу та їх комбінацій), а також більш ефективного інтелектуального розвитку учня.

Ключові слова: методична розробка задачі, методи розв'язування задач.

Постановка проблемы. Анализ актуальных исследований. Проблеме обучения решению задач посвящены многие статьи и книги [1-3; 5; 12; 13; 16-19; 22], но исследования по этой проблематике продолжаются.

Известно, что целенаправленное формирование и развитие знаний и обобщенных умений учащегося (школьника или студента) для осуществления первообразной деятельности – решения задачи, на основе активного включения и элементов из «производных» деятельности – составления и преобразования задач, бесспорно имеет огромную роль для интеллектуального развития и усовершенствования его личности [15].

Обучение учащихся овладению разнообразными методами и эвристиками для работы над задачами различных математических областей, а также их комплексное использование способствует усвоению и углублению не только знаний о структуре и теории математических задач, но и об обобщенных математических знаниях и умениях на рефлексивно-синергетическом уровне. Поэтому проблема методов решения математических задач всегда актуальна. Методы решения задач разделяют на общелогические и частно-математические. Последние связаны с определенной математической теорией (например, метод математической индукции [7], метод геометрических преобразований, векторный метод, координатный метод и т.д.). К общелогическим методам относим, например, синтез, анализ (несовершенный – по схеме Евклида и восходящий – по схеме Паппа), метод эквивалентности, метод отрицания, индуктивные методы [6].

Учебная практика и наш опыт [11; 14] показывают, что для того чтобы обучение решению задач было успешным и чтобы обеспечить условия для интеллектуального развития учащихся – школьников или студентов, уместно целенаправленно ознакомлять их с методами решения задач (как общелогическими, так и частно-математическими методами [23]). Причем сознательно можно использовать одну и ту же задачу для иллюстрирования применения различных методов решения (директное применение синтеза; последовательное применение сначала несовершенного анализа, а потом синтеза; восходящего анализа; метода эквивалентности и др.), с целью более четкого выявления особенностей и различий между ними, а также – чтобы оценить в конкретном рассматриваемом случае какой из методов является более рациональным. Опыт показывает, что это имеет сильный рефлексивно-обучающий эффект [4; 21] и его реализация вполне соответствует схеме-модели приобретения и применения знаний на основе взаимосвязи между интеллектуальной и праксиологической рефлексией (схема 1 в [9]).

Под методической разработкой математической задачи мы понимаем осуществление следующих деятельностей:

- а) определить структуру данной задачи;
- б) сделать анализ для осуществления поиска решения задачи;
- в) оформить решение синтетически;
- г) указать методы, которые использованы при решении задачи;
- д) анализировать способ решения задачи («взгляд назад»).

В ходе данной деятельности осуществляется и интеллектуальная, и праксиологическая рефлексия над открытым и реализованным решением. Для учебной практики очень полезно составлять новые задачи посредством аналогии, обобщения, конкретизации, «обращения» и так далее. [8]. Все это способствует повышению эффективности профессиональной подготовки студентов – будущих учителей математики, и формирует их интеллектуальное развитие.

Цель статьи – представить подробную реализацию указанной методической разработки задач, демонстрируя ее на конкретных примерах.

Основное содержание статьи. С целью развития умений учащихся (студентов) применять метод анализа (по схеме Евклида или по схеме Паппа), уместно рассматривать как алгебраические, так и геометрические задачи, особенно такие, которые допускают решения различными способами. Отметим, что система таких задач предназначена, не только для усвоения общелогических методов (ОЛМ), но и для введения в зону ближайшего развития [3] учащихся их умения совершать более сложную деятельность – параллельное применение анализа и синтеза [10].

Задача 1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC=BC$). Если $\tan \gamma = \frac{3}{4}$, где $\gamma = \angle ACB$ (рис. 1), доказать, что медианы AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) взаимно перпендикулярны.

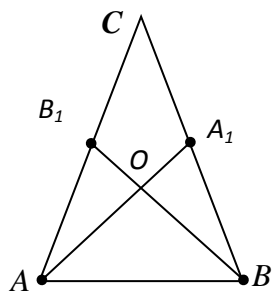


Рис.1

Задача имеет структуру $p \rightarrow q$, а фигура в ней определена до реляции подобия.

Так как эта задача первая, при решении которой (в нашей практической работе со студентами) используем параллельное применение анализа и синтеза, то уместно проводить методическую деятельность поиска ее решения по

следующему **плану**:

1. Актуалізація знань о ключевых элементах теоретического базиса задачи – о формуле медианы треугольника, теореме косинусов, характеристических свойствах понятия прямоугольного треугольника. Полезной оказывается и актуализация знаний о методе параметризации.

2. Ориентация на подходящий вариант применения аналитико-синтетических рассуждений при поиске решения. Для этой цели конструируем следующую схему 1 (рис. 1). Таким образом обособляются и объекты мыслительной деятельности. Из схемы видно, что только синтезом трудно осуществить путь от данного до искомого в задаче, а также только анализом – от искомого до данного, то есть в этом случае не является эффективным использованием только одного из методов – анализа или синтеза. Поэтому целесообразно использовать другой вариант для поиска решения, например, параллельное применение анализа и синтеза.

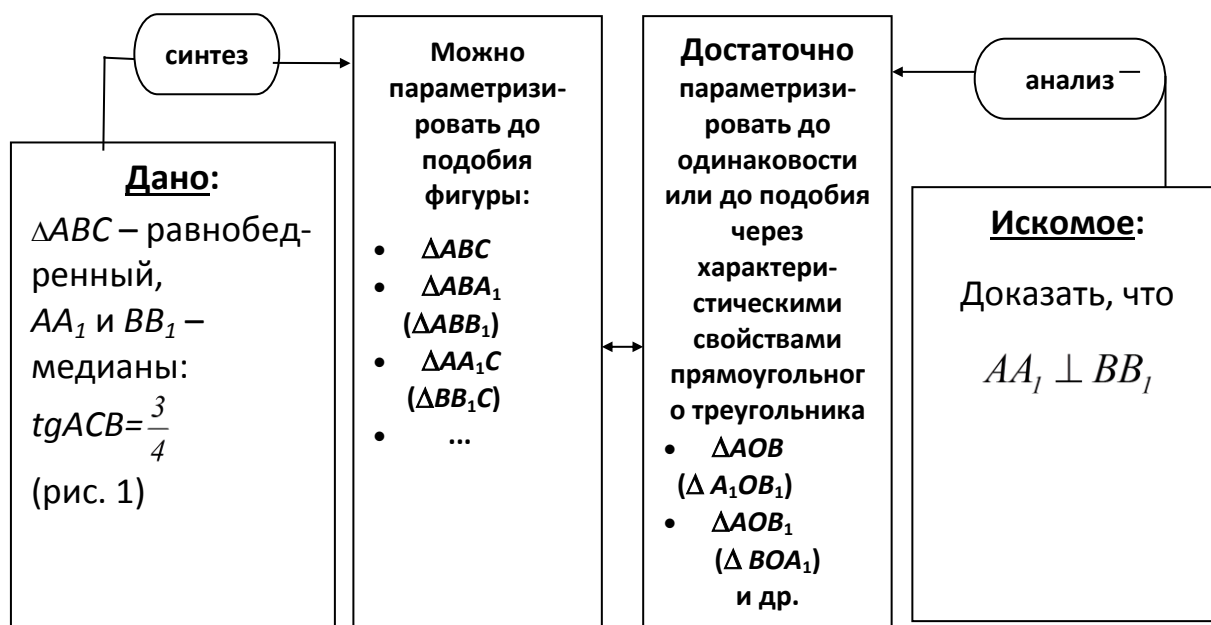


Рис. 2. Схема рассуждения, при которой параллельно применяются синтез и анализ

3. Детализация этапов и шагов процесса поиска решения с точки зрения варианта применения основных общелогических методов, найденного на предыдущем этапе.

Отметим, что для этой задачи характерно, что в ходе применения этих методов продуцируется дополнительная информация, на основе которой возникают в «движении» новые идеи для поиска решения.

Для доказательства того, что медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны, можно воспользоваться двумя различными способами. При первом способе достаточно параметризовать до одинаковости

$\triangle AOB$, а при другом – $\triangle AOB_1$ (или $\triangle BOA_1$). Здесь представим, причем схематично, «открытие» решения задачи только по первому способу при параллельном применении анализа и синтеза.

Решение (первый способ). Для краткости, представим схематично только результат проведенной (с нашей помощью) аналитико-синтетической деятельности студентов.

Восходящий анализ – I шаг: $AA_1 \perp BB_1 \Leftarrow \angle AOB = 90^\circ \Leftarrow AB^2 = AO^2 + BO^2$ (где O – точка пересечения медиан).

Синтез – I шаг: Так как AA_1 и BB_1 – медианы $\Rightarrow AO = \frac{2}{3} AA_1$, $BO = \frac{2}{3} BB_1$, $AA_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}$ (где a – бедро, а c – основание $\triangle ABC$) $\Rightarrow AO = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BO = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + a^2}$.

Восходящий анализ – II шаг: $AB^2 = AO^2 + BO^2 \Leftarrow c^2 = \frac{1}{2}(2c^2 + a^2) + \frac{1}{9}(2c^2 + a^2) \Leftarrow 9c^2 = 4c^2 + 2a^2 \Leftarrow 5c^2 = 2a^2$.

Синтез – II шаг: Из условия $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{4}{5}$, а по теореме косинусов: $c^2 = 2a^2 - 2a \times a \times \frac{4}{5} \Rightarrow 5c^2 = 2a^2$.

С целью создания условий для развития интеллектуальной и праксиологической рефлексии, предлагаем студентам сравнить выполненные до сих пор рассуждения с рассуждениями при решении других задачах, где они применяли или только синтез, или только анализ, или последовательно сначала анализ, а потом синтез, и выявить существующие сходства и различия между ними. Так, например, они отмечают, что теперь для «открытия» решения трудно применить только анализ или только синтез. Иными словами, применяется то анализ, то синтез. Поэтому, прослеживая соответствующие символы для более короткой записи (\Leftarrow и \Rightarrow), вероятно осуществится «встреча» аналитических и синтетических рассуждений. Так как эта «встреча» уже была осуществлена нами на предыдущем этапе, то можем приступить к следующему этапу.

4. Синтетическое оформление решения.

Из $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$ и $\sin^2 + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos \gamma = \frac{4}{5} \Rightarrow c^2 = a^2 + a^2 - 2a \times a \times \frac{4}{5} \Rightarrow 5c^2 = 2a^2 \Rightarrow 9c^2 = 4c^2 + 2a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2) + \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$ (1)

С другой стороны, так как AA_1 и BB_1 медианы, следуют равенства:

$AO = \frac{2}{3} AA_1$, $BO = \frac{2}{3} BB_1$, $AA_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}$, а из них следуют $AO = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BO = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + a^2} \Rightarrow AO^2 = \frac{1}{9} (2c^2 + a^2)$ и $BO^2 = \frac{1}{9} (2c^2 + a^2)$.

Используя последние два равенства и доказанное выше равенство (1) $c^2 = \frac{1}{9} (2c^2 + a^2) + \frac{1}{9} (2c^2 + a^2)$, получаем, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 \Rightarrow \triangle ABO$ прямоугольный с прямым углом при вершине O , то есть $AA_1 \perp BB_1$.

Задача решена.

В контексте идеи «укрупненных дидактических единиц» (по Эрдниевым) тоже с целью развития умений самоосознания (интеллектуальных рефлексивных умений) и самоорганизации [5], на этапе «Взгляд назад» предлагаем студентам проводить дополнительную работу над задачей [20], в частности, рассмотреть вопрос, является ли верным обратное утверждение. С их активным участием формулируем и аналогично решаем задачу, обратную данной. После чего ставим требование сформулировать и задачу, которая «объединяет» прямую и обратную.

Представим одну из составленных студентами обратных задач и ее решение, основывающееся на общей информации в задаче.

Задача 2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC=BC$). Если медианы AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) взаимно перпендикулярны, найти $\cos \gamma$ ($\gamma = \angle ACB$).

Решение. Так как $AA_1 \perp BB_1$, то $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AO^2 + BO^2$ (где O – точка пересечения медиан). Ибо AA_1 и BB_1 медианы, то $AO = \frac{2}{3} AA_1$, $BO = \frac{2}{3} BB_1$, $AA_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}$ (где a – боковая сторона, а c – основание $\triangle ABC$). Следовательно, можно записать $AO = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BO = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + a^2}$, откуда $AO^2 = \frac{1}{9} (2c^2 + a^2)$ и $BO^2 = \frac{1}{9} (2c^2 + a^2)$. Тогда, имея в виду равенство $AB^2 = AO^2 + BO^2$, получаем $5c^2 = 2a^2$. Используя этот результат и теорему косинусов для $\triangle ABC$, можно найти $\cos \gamma = \frac{4}{5}$.

Уместно разработать и второй способ решения задачи 2, используя специфическую информацию в ней, а именно, что $\triangle ABC$ равнобедренный. Тогда медиана CC_1 является одновременно и высотой, и биссектрисой.

Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{AC_1}{CC_1}$. Но $AC_1 = OC_1$, поэтому $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{1}{3}$.

Применяя формулу $\cos \gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}$, получаем $\cos \gamma = \frac{4}{5}$.

Большинство учащихся обычно отмечают, что этот способ более рациональный.

На этапе «Взгляд назад» полезно рассмотреть и третий метод решения – векторный. Здесь удобен векторный базис, составленный из векторов \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} , так как их скалярное произведение содержит $\cos \gamma$. Без ограничения общности, можно принять, что базисные векторы единичны. С их помощью выражаются векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ и используется факт, что скалярное произведение последних равно нулю, так как они перпендикулярны. Из полученного равенства можно найти $\cos \gamma = \frac{4}{5}$.

Следует отметить, что векторный метод можно применить и для решения задачи 1.

Со студентами обсуждаем и вопрос, какой из рассмотренных способов решения задачи более рациональный, что содействует развитию их рефлексивных умений и способностей.

С целью создания условий для усовершенствования умений студентов относительно применения анализа по схеме Евклида при решении геометрических задач, полезно рассматривать задачи, предназначение которых – введение соответствующих знаний и умений в их зону актуального развития [3]. Имея в виду это, а также и обстоятельство, что синтетические рассуждения часто проводятся в комбинации с аналитическими, ниже рассмотрим пример методики работы над задачей. Работа над другими задачами, имеющими такой же характер, проводится аналогично.

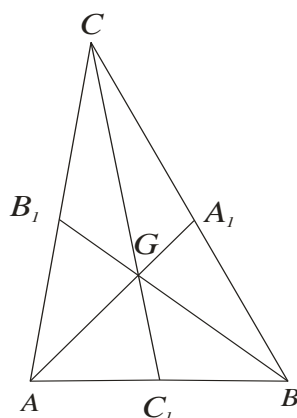


Рис. 3

Задача 3. Если a , b и c – стороны треугольника ABC , которые удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 = 5c^2$, докажите, что его медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

Обычно на начальном этапе поиска решения этой задачи проблемой для студентов оказывается выбор подходящего общелогического метода. При первичной обработке информации этой задачи

можно заметить, что очень трудно решить задачу директным применением синтеза, так как не понятно, каким образом можно использовать данное равенство $a^2+b^2=5c^2$. С другой стороны, существуют сравнительно много признаков перпендикулярности двух прямых, а также и много следствий из утверждения, что две прямые перпендикулярны. Поэтому при выборе аналитического метода уместно предпочитать «идти вперед», используя схему Евклида, «бросая» непрерывно взгляд на условие задачи. Отметим, конечно, что возможны рассуждения и по схеме Паппа, но здесь, с целью усовершенствования умений использования схемы Евклида, мы направляем учащихся на применение несовершенного анализа. С их активным участием и уместными предложениями со стороны некоторых из них, был реализован следующий анализ.

Несовершенный анализ. Предположим, что медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны и G – точка их пересечения, то есть G является центром масс треугольника ABC (рис. 3). Тогда треугольник ABG – прямоугольный. Следовательно, если CC_1 третья медиана $\triangle ABC$, то GC_1 является медианой к гипотенузе в прямоугольном $\triangle ABG$ и значит $GC_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$. Но, согласно свойству центра масс, $CC_1 = 3 \cdot GC_1 = \frac{3c}{2}$. Таким образом, стороны $\triangle BCC_1$ выражены параметрами a и c и следовательно целесообразно применить теорему косинусов:

$$\cos \beta = \frac{BC^2 + BC_1^2 - CC_1^2}{2 \cdot BC \cdot BC_1} = \frac{a^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{9c^2}{4}}{2 \cdot a \cdot \frac{c}{2}} = \frac{4a^2 - 8c^2}{4 \cdot ac} = \frac{a^2 - 2c^2}{ac}, \text{ т.е. } \cos \beta = \frac{a^2 - 2c^2}{ac} \quad (1)$$

Аналогично, по теореме косинусов для $\triangle ABC$, следует, что

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot ac} \quad (2)$$

Тогда из равенств (1) и (2) получается

$$\frac{a^2 - 2c^2}{ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow 2a^2 - 4c^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$$

Но это равенство дано в условии задачи. Следовательно, анализ закончен.

Решение (синтез). Исходим из данного равенства $a^2+b^2=5c^2$ (которое является последним шагом проведенного анализа) и **выполняем в обратном порядке обратные операции**, в результате чего последовательно получаем:

$$a^2 + b^2 = 5c^2 / +a^2 - b^2 - 4c^2 \Rightarrow 2a^2 - 4c^2 = a^2 + c^2 - b^2 / : 2ac > 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 2c^2}{ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Но $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \cos \beta$ для $\triangle ABC$.

Тогда из последних двух равенств следует, что $\frac{a^2-2c^2}{ac} = \cos \beta$ (3)

С другой стороны, согласно теореме косинусов, для $\triangle BCC_1$ выполнено $\cos \beta = \frac{a^2+\frac{c^2}{4}-CC_1^2}{2 \cdot a \cdot \frac{c}{2}} = \frac{4a^2+c^2-4 \cdot CC_1^2}{ac}$ (4)

Из (3) и (4) следует равенство $\frac{a^2-2c^2}{ac} = \frac{4a^2+c^2-4 \cdot CC_1^2}{4ac}$.

После освобождения от знаменателей, получаем последовательно $4a^2 - 8c^2 = 4a^2 + c^2 - 4CC_1^2 \Rightarrow 4CC_1^2 = 9c^2 \Rightarrow CC_1 = \frac{3c}{2}$, потому что $CC_1 > 0$.

Так как G – центр масс $\triangle ABC$, то $GC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3c}{2} = \frac{c}{2}$, то есть $GC_1 = \frac{1}{2}AB$. Но GC_1 – медиана в $\triangle ABG$, а последнее равенство является характеристичным для прямоугольного треугольника. Следовательно, $\angle AGB = 90^\circ$, то есть медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

На этапе «Взгляд назад» обсуждаем несколько вопросов.

Во-первых, вопрос о нахождении других решений на основе других теоретических базисов. Некоторые студенты ориентировались на использование формулы медианы:

$$AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Развивая свою идею, они реализовали анализ следующим образом.

Пусть медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны и G – точка их пересечения, то есть G является центром масс треугольника ABC (рис. 3). Следовательно $\triangle ABG$ – прямоугольный. Тогда выполнено равенство

Пифагора $AG^2 + BG^2 = AB^2$. Но $AG = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ и

$$BG = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Подставим AG и BG в равенство Пифагора, получаем последовательно

$$\frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2) = c^2 \Rightarrow$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 9c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 4c^2 = 9c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$$

Последнее равенство дано в условии задачи.

В соответствии с проведенным таким образом анализом оформляется и новое решение.

Решение (синтез). Исходя вновь из равенства $a^2 + b^2 = 5c^2$, к обеим его частям прибавляем выражение $4c^2$, которое в левой части записываем как сумму: $2c^2 + 2c^2$. Получается $b^2 + 2c^2 + a^2 + 2c^2 = 9c^2$. Потом в левой части этого равенства прибавляем и вычитаем a^2 и b^2 , чтобы получить выражения, которые участвуют в формулах медиан AA_1 и BB_1 , а именно $(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2c^2 - b^2) = 9c^2$. (5)

Так как формулы медиан можно записать и так:

$$(2AA_1)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \text{ и } (2BB_1)^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2,$$

то равенство (5) принимает вид $(2AA_1)^2 + (2BB_1)^2 = 9c^2$.

Учитывая, что $\frac{2}{3}AA_1 = AG$ и $\frac{2}{3}BB_1 = BG$, последнее равенство можно представить и в следующем виде $(\frac{2}{3}AA_1)^2 + (\frac{2}{3}BB_1)^2 = c^2$, то есть $AG^2 + BG^2 = AB^2$. Отсюда, согласно теореме, обратной теореме Пифагора, следует, что ABG – прямоугольный треугольник, причем $\angle AGB = 90^\circ$. Следовательно, $AG \perp BG$, то есть AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

Задача решена и вторым способом.

Во-вторых, на этапе «Взгляд назад» рассматривается вопрос, верно ли обратное утверждение. С активным участием обучаемых формулируется и аналогично решается задача, обратная данной, а потом возникает вопрос и о формулировке задачи, которая объединяет эти две задачи.

С дидактической точки зрения уместно поставить и методическое задание: последнюю задачу решить посредством восходящего анализа. Таким образом, обучаемым предоставляется возможность самоосознать еще раз сходства и различия между двумя видами анализа. Так осуществляется богатая комплексная деятельность, включающая: решение одной задачи несколькими способами с использованием различных теоретических базисов, конструирование обратных задач и применение к их решению использованного метода, и, наконец, объединение в синергетическом аспекте двух задач в одну, решение которой по схеме Паппа уже естественно для студента. Реализация такой комплексной деятельности с многократным применением схемы Евклида, при одной и той же геометрической ситуации, существенно способствует дальнейшему

самоусовершенствованию умений обучаемых рассуждать по этой схеме и введению этих умений в их зону актуального развития.

Выводы. Предлагаемый подход есть предпосылкой более активного и самостоятельного участия учащихся в решении других задач системы, цель которых – усовершенствование умений применения усвоенных методов (синтеза, несовершенного и восходящего анализа и их комбинаций), а также более эффективного интеллектуального развития учащегося.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г. Как учить поиску решения задач / В. Г. Болтянский, Я. И. Груденов // Математика в школе. – 1988. – № 1. – С. 8-14.
2. Василевский А. Б. Методы решения задач / Василевский А. Б. – Минск: «Вышэйшая школа», 1974. – 240 с.
3. Ганчев И. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания) / Ганчев И. – София: Модул-96», 1999. – 198 с.
4. Георгиева М. Рефлексията в обучението по математика (V-VI клас) / Георгиева М. – Варна: Търново, 2001. – 199 с.
5. Гроздев С. Организация и самоорганизация при решаване на задачи / С. Гроздев // Математика и информатика. – 2002. – Кн. 6. – С. 51-58.
6. Методи за решаване на задачи (от училищния курс по математика). – Част I. – [Под научната редакция на В. Милушев]. – Пловдив: «Макрос», 2001. – 227 с.
7. Методи за решаване на задачи (от училищния курс по алгебра и анализ). – Част II. – [Под научната редакция на В. Милушев]. – Пловдив: Изд-во на ПУ «Паисий Хилендарски», 2002. – 180 с.
8. Милушева-Бойкина Д.В. Дейността съставяне на задачи и обучаване студентите на някои методи за съставяне на задачи от училищния курс по математика / Милушева-Бойкина Д.В. – Автореферат. – София, 2000.
9. Милушев В.Б. За един рефлексивен модел на обучение и негово приложение / В.Б. Милушев, Д. Г. Френкев // Математика и математическо образование. – София: Изд. на БАН, 2008. – С. 61-72.
10. Милушев В.Б. Система деятельностей для овладения общелогическими методами решения математических задач в соответствии с принципом рефлексивности / В. Б. Милушев, Д. Г. Френкев // Didactics of mathematics: Problems and Investigations (International Collection of Scientific Works). – Issue # 28. – Donetsk: DonNU, 2007. – P.178-184.
11. Милушев В.Б. Триада дейности решаване, съставяне и преобразуване на математически задачи в контекста на рефлексивно-синергетичния подход / В.Б. Милушев. – Автореферат на дисертация за получаване на научната степен «доктор на педагогическите науки» по научната специалност 05.07.03 (методика на обучението по математика). – София, 2008. – 61 с.
12. Петров П.Д. Место и роля на прогнозирането при решаване на математически задачи. Прогностични функции на методите за решаване / П.Д. Петров, В.Б. Милушев // Научни трудове на ПУ «Паисий Хилендарски». – 1990. – Том 27. – Кн. 2. – Методика на обучението. – С. 13-26.
13. Петров П.Д. Дидактически аспекти на прогнозирането при търсене на решения на математически задачи / Петров П.Д. – Автореферат. – София, 1996.
14. Портев Л. Ръководство по учителски практикум за студенти от специалност математика при ПУ «Паисий Хилендарски» / Л. Портев, Р. Маврова, В. Милушев. –

3-то изд. – Пловдив, 1996. – 118 с.

15. Скафа Е. Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи / Е. Скафа, В. Милушев. – Пловдив: УИ «Паисий Хилендарски», 2009. – 332 с.

16. Туманов С.И. Поиски решения задач / С.И. Туманов – М.: «Просвещение», 1979. – 279 с.

17. Френкев Д.Г. Комплексен модел на процеса решаване на математически задачи от определен вид / Д.Г. Френкев, В.Б. Милушев, Д.В. Бойкина // Математика и математическо образование. – София: Изд. на БАН, 2007. – С. 429-435.

18. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике / Фридман Л.М. – М.: Флинта, 1998. – 220 с.

19. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: «Просвещение», 1984. – 175 с.

20. Цукаръ А.Я. Дополнительная работа над задачей / А.Я. Цукаръ // Математика в школе. – 1982. – №1. – С. 42-44.

21. Georgieva M. Reflection and Creative Achievements of High Ability Mathematics Students in Solving Geometric Problems / M. Georgieva, I. Ganchev // Isfahan University of Technology, Geometry and Mathematics Competitions. – Melbourne, 2002.

22. Grozdev S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice) / Grozdev S. – Sofia, 2007. – 295 p.

23. Milloushev V.B. Model for Teaching in Rediscovery of Particular Methods for Mathematical Problem Solving / V.B. Milloushev, D.V. Millousheva-Boikina // Proceedings of III Congress of Mathematicians of Macedonia. – Struga, 29.IX-2.X.2005. – P. 123-130.

РЕЗЮМЕ

Милушев В. Б., Бойкина Д. В. Методическая разработка математических задач и интеллектуальное развитие учащихся.

Представлена структура методической разработки математической задачи. Акцент поставлен на идею: чтобы обучение решению задач было успешным и чтобы обеспечить условия для интеллектуального развития учащихся, целесообразно целенаправленно ознакомливать их с методами решения задач. Предлагаемый подход есть предпосылкой более активного и самостоятельного участия учащихся в решении других задач системы, цель которых – усовершенствование умений применения усвоенных методов (синтеза, несовершенного и восходящего анализа и их комбинаций), а также более эффективного интеллектуального развития учащегося.

Ключевые слова: методическая разработка задачи, методы решения задач.

SUMMARY

Milloushev V., Boykina D. A methodical elaboration of mathematical problems and the intellectual development of the students

The authors present the structure of the methodical elaboration of mathematical problem and share their experience in the organization of this activity. The accent is put on the following thesis: in order the education of solving problems to be successful and to provide conditions for intellectual development of students, it is appropriate the students to be acquainted with methods for solving problems. The proposed approach is a prerequisite for a more active and independent participation of students in solving other problems of the system, whose purpose – to improve the application of skills learned techniques (synthesis, imperfect and bottom-up analysis, and combinations thereof), as well as better intellectual development of the student.

Key words: methodical elaboration of a problem; methods for solving problems.

