

Ключевые слова: рекуррентные соотношения второго порядка, операции над последовательностями, абелева группа, коммутативная полугруппа, медиантная последовательность Фибоначчи.

Abstract. Khvorostina Y. V., Vambenkova J.A. Sets generated by two-parametric sequences. In this paper we consider numerical sequences that are specified by two parameters and algebraic structures generated by such sequences. We introduced for each sequence its special operations and proved that the set generated by the arithmetic and geometric progressions are abelian groups and the set generated by harmonic progression is an abelian semigroup. Also we got analogue Binet's formula for the sequence of rational numbers, which each successive term, since the third is median previous two.

Keywords: recurrence relation of the second order, operations over sequences, abelian group, commutative semigroup, median Fibonacci sequence.

УДК 519.21

Ю.В. Хворостіна, А.І. Скляр

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

МОДУЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОЇ НЕПОВНОЇ СУМИ ЗНАКОЗМІННОГО РЯДУ ЛЮРОТА

Вступ

Означення 1. Знакозмінний ряд вигляду

$$\frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \dots, \quad (1)$$

де $a_n \in N$, називається знакозмінним рядом Люрота, а число a_n – n -тим елементом.[1]

Для спрощення запису введемо наступні позначення для будь-якого натурального n .

$$A_1 = a_1, \quad A_n = a_1(a_1+1)a_2(a_2+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n.$$

$$\text{Звідси } A_n = A_{n-1} \cdot (a_{n-1}+1)a_n.$$

Тоді знакозмінний ряд Люрота матиме наступний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}.$$

Зафіксуємо знакозмінний ряд Люрота з сумою r .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n} = r. \quad (2)$$

Число r можна подати у вигляді

$$r = d - b, \text{ де } d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i-1}}, \quad b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i}}.$$

Оскільки знакозмінний ряд Лյорота збігається абсолютно, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} = d + b.$$

Означення 2. Якщо ряд (2) – заданий знакозмінний ряд Лյорота, M –фіксована підмножина натуральних чисел, то число

$$x = x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon_n}{A_n}, \quad \text{де} \quad (3)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

називається неповною сумою знакозмінного ряду Лյорота.

Вираз (3) і його суму x формально зображатимемо у вигляді $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}$.

Зрозуміло, що всі часткові суми і залишки ряду Лյорота є неповними сумами. Також неповними сумами є d і $(-b)$. Очевидно, що d є найбільшою неповною сумою, а $(-b)$ – найменшою.

Означення 3. Множина

$$C_r = \left\{ x : x = \sum_{n \in M \subset N} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}, M \in \sigma(N) \right\},$$

де $\sigma(N)$ – множина всіх підмножин множини N , називається множиною неповних сум ряду Лյорота.

Нехай c_1, c_2, \dots, c_m – фіксований набір нулів та одиниць.

Означення 4. Циліндром рангу t з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина $\Delta'_{c_1 \dots c_m}$ всіх неповних сум, які мають зображення

$$\Delta_{c_1 \dots c_m \varepsilon_{m+1} \dots \varepsilon_{m+j} \dots}, \quad \varepsilon_{m+j} \in \{0, 1\}, \quad j \in N.$$

Означення 5. Циліндричним відрізком рангу t з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається відрізок $\Delta_{c_1 \dots c_m}$, кінці якого співпадають з нижньою і верхньою гранями циліндра $\Delta'_{c_1 \dots c_m}$.

Теорема 1. [3] Циліндричні відрізки мають властивості:

1. $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} \subset \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$;
2. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c_{m+1}} \subset \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$;
3. $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{A_n} \leq \frac{1}{2^{m-1}} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$;

4. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}} 0 \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}} 1 = \emptyset$, крім випадку коли всі $a_n = 1$, починаючи з t місця. Причому

$$k_m = |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}} \setminus (\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}} 0 \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}} 1)| \geq 0;$$

$$5. \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots};$$

$$6. C_r = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1, \overline{m}} \Delta_{c_1 \in \{0, 1\}, c_2 \dots c_m}.$$

Теорема 2. [2] Множина неповних сум ряду Лյорота C_r є:

1. відрізком $\left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, якщо $a_n = 1 \quad \forall n \in N$;
2. об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо $a_n = 1$ для всіх n , більших деякого n_0 ;
3. ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n .

1. Випадкова неповна сума знакозмінного ряду Люрота з незалежними доданками

Розглянемо випадкову величину

$$X = \frac{\tau_1}{A_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \tau_k}{A_k}, \tag{4}$$

де $\{\tau_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно, причому $p_{0k} + p_{1k} = 1$. Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера випадкова величина X має або чисто дискретний, або чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний розподіл.

Теорема 3. [2] Для того, щоб випадкова величина X мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб

$$P_{max} = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Наслідок 1. Для того, щоб випадкова величина X мала неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $P_{max} = 0$.

Теорема 4. В точці $\Delta_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} = x$ функція розподілу F_X випадкової величини X виражається

$$F_X(x) = \beta_{\varepsilon_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\varepsilon_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} P_{\varepsilon_j, j} \right], \tag{5}$$

де $\beta_{\varepsilon_k, k} = \begin{cases} \varepsilon_k p_{0k}, & \text{при непарному } k, \\ (1 - \varepsilon_k) p_{1k}, & \text{при парному } k. \end{cases}$

Доведення. Подія $\{X < x\}$ має вираз

$$\{X < x\} = \{\tau_1 < \varepsilon_1\} \cup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 > \varepsilon_2\} \cup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \tau_3 < \varepsilon_3\} \cup \dots \cup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \dots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} \cup \dots,$$

де знак \vee має такий зміст:

$$\vee = \begin{cases} >, & \text{якщо } k = 2n, n \in N, \\ <, & \text{якщо } k = 2n - 1, n \in N. \end{cases}$$

Тоді

$$\mathbb{P}\{X < x\} = \mathbb{P}\{\tau_1 < \varepsilon_1\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 > \varepsilon_2\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \tau_3 < \varepsilon_3\} + \dots + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \dots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} + \dots$$

Оскільки події $\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_j = \varepsilon_j$ і $\tau_k \vee \varepsilon_k$ є незалежними, то

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \dots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\{\tau_i = \varepsilon_i\} \right) \cdot \mathbb{P}\{\tau_k \vee \varepsilon_k\} =$$

$$= \beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\varepsilon_j j}.$$

Отже, функція розподілу $F_X(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$ виражається у формі (5). ■

2. Характеристична функція випадкової величини X .

Означення 6. Характеристичною функцією $f_X(t)$ випадкової величини X називається математичне сподівання випадкової величини e^{itX} , тобто

$$f_X(t) = M(e^{itX}).$$

Апарат характеристичних функцій зручний для дослідження структури і властивостей розподілів дійснозначних випадкових величин. Зокрема, відомо, що величина

$$L_X = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_X(t)|$$

дорівнює:

- 1) 1 для дискретно розподіленої випадкової величини X ;
- 2) 0 для абсолютно неперервно розподіленої випадкової величини X .

Для сингулярних розподілів L_X може набувати всіх значень з $[0; 1]$. Сингулярні розподіли з $L_X = 1$ близькі до дискретних, а з $L_X = 0$ – до абсолютно неперервних. Тому величина L_X характеризує близькість за властивостями сингулярного розподілу до дискретного чи абсолютно неперервного.

Теорема 5. Математичне сподівання випадкової величини X виражається

$$M(X) = \frac{p_{01}}{A_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} p_{1k}}{A_k}.$$

Доведення. Відомо, що математичне сподівання суми незалежних подій дорівнює сумі математичних сподівань цих подій. Тому

$$\begin{aligned} M(X) &= M\left(\frac{\tau_1}{A_1} + \frac{-\tau_2}{A_2} + \dots + \frac{(-1)^k \tau_k}{A_k}\right) = \\ &= M\left(\frac{\tau_1}{A_1}\right) + M\left(\frac{-\tau_2}{A_2}\right) + \dots + M\left(\frac{(-1)^k \tau_k}{A_k}\right) + \dots = \\ &= \frac{0 \cdot p_{01} + 1 \cdot p_{11}}{A_1} - \frac{0 \cdot p_{02} + 1 \cdot p_{12}}{A_2} + \dots + \frac{(-1)^k (0 \cdot p_{0k} + 1 \cdot p_{1k})}{A_k} + \dots = \\ &= \frac{p_{01}}{A_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} p_{1k}}{A_k} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 6. Характеристична функція випадкової величини X має вигляд

$$f_X(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{(-1)^{k-1} it}{A_k} \right),$$

а її модуль виражається

$$|f_X(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|, \quad \text{де } |f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2A_k}}.$$

Доведення. Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичних сподівань, отримуємо

$$\begin{aligned} f_X(t) &= M(e^{itX}) = M\left(\exp\left(it \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \tau_k}{A_k}\right)\right) = \\ &= M\left(\exp \frac{it\tau_1}{A_1} \cdot \exp \frac{-it\tau_2}{A_2} \cdot \dots \cdot \exp \frac{(-1)^{k-1} it\tau_k}{A_k} \cdot \dots\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} M\left(\exp \frac{(-1)^{k-1} it\tau_k}{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{(-1)^{k-1} it}{A_k}\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(p_{0k} + p_{1k} \cos \frac{(-1)^{k-1} t}{A_k}\right) + i \left(p_{1k} \sin \frac{(-1)^{k-1} t}{A_k}\right)\right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t), \end{aligned}$$

i

$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k} \cos \frac{t}{A_k} + p_{1k}^2} = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2A_k}}. \blacksquare$$

Література

1. Kalpazidou S. Lüröth-type alternating series representations for real numbers./ S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, J. Knopfmacher // ActaArith. 55(1990), 311-322.
2. Працьовитий М.В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній / М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2009.– №7. – С. 14-27
3. Працьовитий М.В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування. / М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2009.– №7. – С. 22-28.

Анотація. Хворостіна Ю.В., Скляр А.І. Модуль характеристичної функції випадкової неповної суми знакозмінного ряду Люрота. Дана робота присвячена дослідженню випадкової неповної суми знакозмінного ряду Люрота з незалежними доданками. Ми отримали вигляд функції розподілу і знайшли математичне сподівання цієї випадкової величини. Також ми отримали вигляд характеристичної функції і обчислили її модуль.

Ключові слова: знакозмінний ряд Люрота, характеристична функція, випадкова неповна сума.

Аннотация. Хворостина Ю.В., Скляр А.И. Модуль характеристической функции случайной неполной суммы знакопеременного ряда Люрота. Данная работа посвящена исследованию случайной неполной суммы знакопеременного ряда Люрота с независимыми слагаемыми. Мы получили вид функции распределения и нашли математическое ожидание этой случайной величины. Также мы получили вид характеристической функции и вычислили ее модуль.

Ключевые слова: знакопеременный ряд Люрота, характеристическая функция, случайная неполная сумма.

Abstract. *Khvorostina Yu., Sklyar A. The modulus of the characteristic function of the random incomplete sum of the alternating series Luroth. In this paper we study the random incomplete sum of the alternating series Luroth with independent summands. We got the kind of distribution functions and found the mathematical expectation of this random variable. We found the characteristic function and calculated the it module.*

Keywords: *alternating row Luroth, the characteristic function, random incomplete sum.*

С.В. Шамрай

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

ТЕОРЕМИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ: АНАЛІЗ ТИПІВ ТА СПОСОБІВ ДОВЕДЕНЬ

Сучасний курс геометрії основної школи забезпечує базову геометричну підготовку, достатню для продовження освіти в старшій або професійній школі. Виділяються три ступені вивчення планіметрії: 1-4 класи, 5-6 класи, 7-9 класи. У 1-4 класах здійснюється пропедевтична підготовка учнів до вивчення цього курсу.

Основна мета вивчення геометрії в 5-6 класах ввести на наочно-інтуїтивному рівні поняття про основні фігури на площині і простіші геометричні тіла, їх побудову і вимірювання, розширити уявлення учнів, здобуті в попередніх класах, про істотні ознаки геометричних фігур, уміння обчислювати геометричні величини (довжини, площі, об'єми деяких фігур) за формулами. Геометричні поняття, операції і відношення дістають математичне спрямування.

Мета курсу геометрії в 7-9 класах – систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині; засвоєння елементів стереометрії на наочно-інтуїтивному рівні; вироблення вмінь будувати геометричні фігури і застосовувати їх властивості при вивченні суміжних дисциплін; подальше вивчення величин; ознайомлення учнів із застосуванням аналітичного апарату (елементи тригонометрії і алгебри, вектори і координати) до розв'язування задач. Курс геометрії стає базовим курсом, який забезпечує систему фундаментальних знань з геометрії для всіх учнів.

О.В.Погорєлов найціннішим у геометрії вважав доведення: «Головне завдання викладання геометрії в школі – навчити учня логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити ... навряд чи знайдеться хоча б один, кому б не довелося міркувати, аналізувати, доводити» [3, с. 14].

Вивчення теорем і їх доведень в курсі геометрії починається з 7 класу і посідає значне місце в навчальному процесі. Теореми і їх доведення розвивають логіку мислення учнів, вчать методам доведення, сприяють усвідомленню аксіоматичної побудови математики. Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема обґрунтованість суджень, стислість, чіткість висловлення думки.

Саме тому завжди актуальними будуть дослідження пов'язані з навчанням доводити твердження ще у шкільному віці. Такі дослідження можуть серед іншого ґрунтуватися і на аналізі теорем, які пропонуються авторами різних діючих підручників