

material of natural Science and Mathematics. The main types of symmetry on the plane and in space, the classification of motions of the first and second types are given.

Key words: symmetry, motion, plane, space.

УДК 517.521

Ю.В. Хворостіна, Ю.О. Бамбенкова

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

МНОЖИНИ, ПОРОДЖЕНІ ДВОПАРАМЕТРИЧНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ

Вступ. У сучасному підході до побудови більшості математичних теорій широко застосовуються алгебраїчні структури (групи, кільця, поля). Об'єктом нашого дослідження виступають множини, породжені числовими послідовностями, які задаються двома параметрами. Найпростішим випадком таких послідовностей є арифметична, геометрична та гармонійна прогресії [2].

Означення 1. Арифметична прогресія – це послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d (різниця арифметичної прогресії).

Означення 2. Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.

Означення 3. Гармонічною прогресією називається послідовність виду

$$\left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \frac{1}{a+d(n-1)}, \frac{1}{a+nd}, \dots \right\}.$$

До двопараметричних числових послідовностей також належить послідовність Фібоначчі, яка є рекурентним співвідношенням другого порядку.

Рекурентнеспіввідношення виду $a_{n+1} = Aa_n + Ba_{n-1}$, $n \geq 2$ (1)

Називають лінійним рекурентним співвідношенням другого порядку.

Теорема 1. Нехай задано співвідношення (1) та вказано початкові умови a_1 і a_2 .

Тоді, якщо α і β – різні корені рівняння

$$x^2 - Ax - B = 0$$

то будь-який розв'язок рекурентного співвідношення (1) має вигляд

$$a_{n+1} = C_1 \alpha^{n+1} + C_2 \beta^{n+1}, n \geq 2,$$

якщо ж рівняння має два однакові корені, то довільний розв'язок рекурентного співвідношення (1) має вигляд

$$a_{n+1} = \alpha^{n+1}(C_1 + nC_2), n \geq 2,$$

де C_1, C_2 – деякі коефіцієнти, що залежать від початкових умов і коренів рівняння.

Означення 4. Числова послідовність з початковими членами U_1, U_2 , кожен член якої, починаючи з третього, задовольняє співвідношення

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, n \geq 2$$
 (2)

називають послідовністю Фібоначчі [1].

Теорема 2. Загальний розв'язок співвідношення (2) має вигляд

$$U_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

1. Множини, породжені прогресіями. Розглянемо множину A , елементами якої виступають всі арифметичні прогресії, породжені дійсними числами. Нехай α та β довільні елементи множини A , тобто

$$\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, a_{n+1} = a_n + d_1 \forall n \in N;$$

$$\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}, b_{n+1} = b_n + d_2 \forall n \in N.$$

Сумою елементів α та β називатимемо послідовність, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів арифметичних прогресій α та β , тобто

$$\alpha + \beta = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots\}.$$

Теорема 3. Алгебраїчна структура $(A; +)$ є абелевою групою.

Доведення. Перевіримо виконання п'яти аксіом означення абелевої групи.

1) Нехай α і β довільні елементи множини A . Знайдемо суму $\alpha + \beta$

$$\alpha + \beta = \{a_1 + b_1, a_1 + d_1 + b_1 + d_2, \dots, a_{n-1} + d_1 + b_{n-1} + d_2, \dots\}$$

Нехай $d_1 + d_2 = d$. Тоді $a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + d$.

Отже, сума α і β також є арифметичною прогресією, тобто $(\alpha + \beta) \in A$.

2) Перевіримо виконання асоціативного закону.

Нехай α, β, γ довільні арифметичні прогресії з різницями d_1, d_2, d_3 відповідно. Тоді

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \{(a_1 + b_1) + c_1, \dots, (a_n + b_n) + c_n, \dots\} = \\ &= \{a_1 + (b_1 + c_1), \dots, a_n + (b_n + c_n), \dots\} = \alpha + (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

3) Знайдемо нульовий елемент у множині A . Нехай θ – послідовність, кожен член якої дорівнює 0. За означенням θ є арифметичною прогресією з різницею $d = 0$. Причому для $\forall \alpha \in A$ виконується рівності:

$$\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha.$$

4) Перевіримо існування симетричного елемента в множині A .

Нехай X елемент симетричний елементу α з різницею d . Тоді

$$\alpha + X = X + \alpha = \theta.$$

$$\alpha + X = \{a_1 + x_1, a_2 + x_2, \dots, a_n + x_n, \dots\} = \{0, 0, \dots, 0, \dots\}.$$

Значить, $a_i + x_i = 0$, звідси $x_i = -a_i$ для $\forall i \in N$.

Отже, $\alpha^{-1} = X = \{-a_1, -a_2, \dots, -a_n, \dots\}$ і α^{-1} є арифметичною прогресією з різницею $(-d)$.

Виконання 4-х аксіом доводить, що $(A; +)$ – група.

5) Покажемо, що група є абелевою, тобто виконується комутативна властивість.

$$\alpha + \beta = \{(a_1 + b_1), \dots, (a_n + b_n), \dots\} = \{(b_1 + a_1), \dots, (b_n + a_n)\} = \beta + \alpha.$$

Отже, $(A; +)$ – абелева група. ■

Розглянемо множину B , елементами якої є всі геометричні прогресії. Нехай γ та ρ довільні елементи множини A , тобто

$$\gamma = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\} = \frac{c_{n+1}}{c_n} = q_1 \forall n \in N;$$

$$\rho = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\} = \frac{r_{n+1}}{r_n} = q_2 \forall n \in N.$$

Добутком елементів γ та ρ називатимемо послідовність, кожний елемент якої є добутком відповідних елементів геометричних прогресій γ та ρ , тобто

$$\gamma \times \rho = \{c_1 \cdot r_1, c_2 \cdot r_2, \dots, c_n \cdot r_n\}.$$

Теорема 4. Алгебраїчна структура $(B; \times)$ є абелевою групою.

Доведення. Перевіримо виконання п'яти аксіом означення абелевої групи

1) Нехай γ і ρ довільні елементи множини B . Знайдемо добуток $\gamma \cdot \rho$

$$\gamma \cdot \rho = \{c_1 \cdot r_1, c_1 \cdot q_1 \cdot r_1 \cdot q_2, \dots, c_{n-1} \cdot q_1 \cdot r_{n-1} \cdot q_2, \dots\}.$$

Нехай $q_1 \cdot q_2 = q$. Тоді $c_n \cdot r_n = c_{n-1} \cdot r_{n-1} \cdot q$.

Отже, добуток γ і ρ також є геометричною прогресією, тобто $(\gamma \cdot \rho) \in B$.

2) Перевіримо виконання асоціативного закону.

Нехай γ, ρ, σ довільні геометричні прогресії зі знаменником q_1, q_2, q_3 відповідно.

Тоді

$$(\gamma \times \rho) \times \sigma = \{(c_1 \cdot r_1) \cdot s_1, \dots, (c_n \cdot r_n) \cdot s_n, \dots\} = \{c_1 \cdot (r_1 \cdot s_n), \dots, c_n \cdot (r_n \cdot s_n), \dots\} \\ = \gamma \times (\rho \times \sigma).$$

3) Знайдемо одиничний елемент у множині B . Нехай елемент ε – послідовність, кожен елемент якої дорівнює 1. За означенням ε є геометричною прогресією зі знаменником $q = 1$. Причому для $\forall \gamma \in B$ виконуються рівності

$$\gamma \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \gamma = \gamma.$$

4) Перевіримо існування симетричного елемента в множині B . Нехай Y елемент симетричний елементу γ зі знаменником q . Тоді

$$\gamma \cdot Y = Y \cdot \gamma = \varepsilon.$$

$$\gamma \cdot Y = \{c_1 \cdot y_1, c_2 \cdot y_2, \dots, c_n \cdot y_n, \dots\} = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}.$$

Значить $c_i \cdot y_i = 1$, звідси $y_i = \frac{1}{c_i}$ для $\forall i \in N$.

Отже, $\gamma^{-1} = Y = \{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_n}, \dots\}$ і γ^{-1} є геометричною прогресією зі знаменником $\frac{1}{q}$.

Виконання 4-х аксіом свідчить про те, що $(B; \times)$ – група.

5) Доведемо, що $(B; \times)$ є абелевою групою.

$$\gamma \times \rho = \{(c_1 \cdot r_1), \dots, (c_n \cdot r_n), \dots\} = \{(r_1 \cdot c_1), \dots, (r_n \cdot c_n), \dots\} = \rho \times \gamma$$

Отже, $(B; \times)$ – абелева група. ■

Медіантою двох дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in N$, називається дріб, що дорівнює $\frac{a+b}{c+d}$ [3].

Символічно це записується так

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Розглянемо множину G , елементами якої є всі гармонічні прогресії. Нехай μ та φ довільні елементи множини G , тобто

$$\mu = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{1}{m+d_1}, \frac{1}{m+2d_1}, \dots, \frac{1}{m+nd_1}, \dots \right\}, \quad m_n = \frac{m_1 m_2}{m_1(n-1) - m_2(n-2)} \quad \forall n \in N;$$

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{f}, \frac{1}{f+d_2}, \frac{1}{f+2d_2}, \dots, \frac{1}{f+nd_2}, \dots \right\}, \quad f_n = \frac{f_1 f_2}{f_1(n-1) - f_2(n-2)} \quad \forall n \in N.$$

Медіантою елементів μ та φ називатимемо послідовність, кожний елемент якої є медіантою відповідних елементів гармонічних прогресій μ та φ , тобто

$$\mu \oplus \varphi = \left\{ \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{f}, \frac{1}{m+d_1} \oplus \frac{1}{f+d_2}, \dots, \frac{1}{m+nd_1} \oplus \frac{1}{f+nd_2}, \dots \right\}.$$

Теорема 5. Алгебраїчна структура $(G; \oplus)$ є комутативною напівгрупою.

Доведення. Перевіримо виконання п'яти аксіом означення абелевої групи.

1) Нехай μ і φ довільні елементи множини B . Знайдемо медіантну суму.

$$\begin{aligned} \mu \oplus \varphi &= \left\{ \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{f}, \frac{1}{m+d_1} \oplus \frac{1}{f+d_2}, \dots, \frac{1}{m+nd_1} \oplus \frac{1}{f+nd_2}, \dots \right\} = \\ &= \left\{ \frac{2}{m+f}, \frac{2}{m+d_1+f+d_2}, \dots, \frac{2}{m+nd_1+f+nd_2} \right\}. \end{aligned}$$

Нехай $d_1 + d_2 = d$. Тоді

$$\frac{2}{m+f+nd} = \frac{1}{m+(n-1)d_1} \oplus \frac{1}{f+(n-1)d_2} = \frac{2}{m+f+(n-1)d}.$$

Отже, медіантна сума μ і φ є гармонічною прогресією, тобто $(\mu \oplus \varphi) \in G$.

2) Перевіримо виконання асоціативного закону

Нехай μ, φ, τ довільні гармонічні прогресії.

$$\begin{aligned} (\mu \oplus \varphi) \oplus \tau &= \left\{ \left(\frac{1}{m} \oplus \frac{1}{f} \right) \oplus \frac{1}{t}, \dots, \left(\frac{1}{m+nd_1} \oplus \frac{1}{f+nd_2} \right) \oplus \frac{1}{t+nd_3}, \dots \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{m} \oplus \left(\frac{1}{f} \oplus \frac{1}{t} \right), \dots, \frac{1}{m+nd_1} \oplus \left(\frac{1}{f+nd_2} \oplus \frac{1}{t+nd_3} \right), \dots \right\} = \\ &= \mu \oplus (\varphi \oplus \tau). \end{aligned}$$

Отже, $(G; \oplus)$ є напівгрупою.

3) Перевіримо виконання комутативної властивості.

$$\begin{aligned} \mu \oplus \varphi &= \left\{ \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{f}, \frac{1}{m+d_1} \oplus \frac{1}{f+d_2}, \dots, \frac{1}{m+nd_1} \oplus \frac{1}{f+nd_2}, \dots \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{f} \oplus \frac{1}{m}, \frac{1}{f+d_2} \oplus \frac{1}{m+d_1}, \dots, \frac{1}{f+nd_2} \oplus \frac{1}{m+nd_1}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Отже, $(G; \oplus)$ є абелевою напівгрупою. ■

2. Медіантна послідовність Фібоначчі. Розглянемо послідовність раціональних чисел, кожен наступний член якої, починаючи з третього, є медіантою двох попередніх, тобто задовольняє співвідношення $F_n = F_{n-1} \oplus F_{n-2}, n \geq 2$. Таку послідовність називатимемо медіантною послідовністю Фібоначчі. Постає проблема отримання вигляду n -го члена цієї послідовності. Наступна теорема дозволяє вирішити поставлену проблему.

Теорема 6. Загальний член медіанної послідовності Фібоначчі можна виразити у вигляді

$$F_n = \frac{C_1(1+\sqrt{5})^n + C_2(1-\sqrt{5})^n}{C_3(1+\sqrt{5})^n + C_4(1-\sqrt{5})^n},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – деякі коефіцієнти, що залежать від початкових умов.

Доведення. Нехай $F_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, F_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}$. Тоді

$$F_n = F_{n-1} \oplus F_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \oplus \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{b_{n-1} + b_{n-2}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Чисельник і знаменник F_n є послідовностями Фібоначчі. Тому за теоремою 2 маємо

$$\begin{aligned} a_n &= C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \\ b_n &= C_3 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_4 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Отже,

$$F_n = \frac{C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{C_3 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_4 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n} = \frac{C_1 (1 + \sqrt{5})^n + C_2 (1 - \sqrt{5})^n}{C_3 (1 + \sqrt{5})^n + C_4 (1 - \sqrt{5})^n}. \blacksquare$$

Література

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
2. Попов. Є. Прогресії та середні / Є. Попов // У світі математики. – 1977. – №18. – С. 112-129.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби. / А. Я. Хинчин – М.: Физматлит, 1961. – 112 с.

Анотація. Хворостіна Ю.В., Бамбенкова Ю.О. Множини, породжені двопараметричними послідовностями. У даній роботі ми розглядаємо числові послідовності, які задаються двома параметрами, а також алгебраїчні структури, породжені такими послідовностями. Ми ввели для кожної послідовності свою спеціальну операцію і довели, що множини, породжені арифметичною та геометричною прогресіями є абелевими групами, а множина, породжена гармонічною прогресією є абелевою напівгрупою. Також ми отримали аналог формули Біне для послідовності раціональних чисел, кожен наступний член якої, починаючи з третього, є медіантою двох попередніх.

Ключові слова: рекурентні співвідношення другого порядку, операції над послідовностями, абелева група, комутативна напівгрупа, медіантна послідовність Фібоначчі.

Аннотация. Хворостина Ю.В., Бамбенкова Ю.А. Множества, порожденные двухпараметрическими последовательностями. В данной работе мы рассматриваем числовые последовательности, которые задаются двумя параметрами, а также алгебраические структуры, порожденные такими последовательностями. Мы ввели для каждой последовательности свою специальную операцию и доказали, что множества, порожденные арифметической и геометрической прогрессиями являются абелевыми группами, а множество, порожденная гармонической прогрессией является абелевой полугруппой. Также мы получили аналог формулы Бине для последовательности рациональных чисел, каждый следующий член которой, начиная с третьего, является медиантой двух предыдущих.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения второго порядка, операции над последовательностями, абелева группа, коммутативная полугруппа, медиантная последовательность Фибоначчи.

Abstract. Khvorostina Y. V., Vambenkova J.A. Sets generated by two-parametric sequences. In this paper we consider numerical sequences that are specified by two parameters and algebraic structures generated by such sequences. We introduced for each sequence its special operations and proved that the set generated by the arithmetic and geometric progressions are abelian groups and the set generated by harmonic progression is an abelian semigroup. Also we got analogue Binet's formula for the sequence of rational numbers, which each successive term, since the third is median previous two.

Keywords: recurrence relation of the second order, operations over sequences, abelian group, commutative semigroup, median Fibonacci sequence.

УДК 519.21

Ю.В. Хворостіна, А.І. Скляр

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

МОДУЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОЇ НЕПОВНОЇ СУМИ ЗНАКОЗМІННОГО РЯДУ ЛЮРОТА

Вступ

Означення 1. Знакозмінний ряд вигляду

$$\frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \dots, \quad (1)$$

де $a_n \in N$, називається знакозмінним рядом Люрота, а число a_n – n -тим елементом.[1]

Для спрощення запису введемо наступні позначення для будь-якого натурального n .

$$A_1 = a_1, \quad A_n = a_1(a_1+1)a_2(a_2+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n.$$

$$\text{Звідси } A_n = A_{n-1} \cdot (a_{n-1}+1)a_n.$$

Тоді знакозмінний ряд Люрота матиме наступний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}.$$

Зафіксуємо знакозмінний ряд Люрота з сумою r .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n} = r. \quad (2)$$

Число r можна подати у вигляді

$$r = d - b, \text{ де } d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i-1}}, \quad b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i}}.$$