

реальних процесів, а й надає можливість глибокого проникнення до самої суті цих явищ, виявлення схованих закономірностей, передбачення нових ефектів.

Література

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: В 3 т / М. О. Давидов. – К.: Вища школа, 1994. – Т.3. – 390 с.
2. Мясников Б.М. Навчальні допоміжні матеріали з фізики / Б. М. Мясников. – К.: Знання, 1985. – 347 с.
3. Олійник О. А. Роль теорії диференціальних рівнянь в сучасній математиці і її додатках / О. А. Олійник. – М.: МГУ, 1996. – 432 с.
4. Половинкина Ю. С. Додатки диференціальних рівнянь / Ю. С. Половинкина. – М. Наука, 2007 – 128 с.

***Анотація.** Лазуткіна Ю.С. Прикладне застосування методу диференціальних рівнянь У статті показано застосування математичного апарату диференціальних рівнянь у сучасних технологіях, зокрема в біологічних моделях і задачі про поглинання світла. Розглянуто приклад розв'язання задачі про поглинання світла за конкретними даними*

***Ключові слова:** диференціальні рівняння, моделювання*

***Аннотация.** Лазуткина Ю.С. Прикладное использование метода дифференциальных уравнений. В статье показано применение математического аппарата дифференциальных уравнений в современных технологиях, в частности в биологических моделях и задачи о поглощении света. Рассмотрен пример решения задачи о поглощении света при конкретных данных*

***Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, моделирование.*

***Summary.** Lazutkina Julia. Applications of the method differential equations. This paper demonstrates the use of mathematical tools of differential equations in modern technologies, particularly in biological models and the problem of light absorption. An example of solving the problem of light absorption by specific data*

***Keywords:** differential equations, modeling.*

УДК 37:013

Ю.М. Новак

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

БАНАХОВІ ПРОСТОРИ

Постановка проблеми. Однією з найважливіших операцій аналізу є граничний перехід. В основі даної операції лежить той факт, що на числовій прямій визначена відстань від однієї точки до іншої. Більшість фундаментальних понять математичного аналізу не пов'язані з природою дійсних чисел, а спираються лише на означення відстані. Узагальнюючи уявлення про дійсні числа як про множину, на якій введено відстань між елементами, вводять поняття метричного простору – одного з найважливіших понять сучасної математики.

Якщо в лінійному просторі ввести норму елемента, то даний лінійний простір буде мати структуру метричного простору. А наявність метрики дозволяє перенести в нормований простір всі властивості метричних просторів.

Постає питання чи будь-який метричний простір є нормованим. Виникають проблеми розв'язання класів задач для яких важлива банаховість, а для яких метричність.

Аналіз актуальних досліджень. Наука про банахові простори створювалася від першої половини минулого століття, зокрема зусиллями потужної групи львівських математиків, для яких входили С. Банах, С. Мазур, В. Орич, Ю. Шаудер, а також у другій половині – багатьма математиками з усього світу. Надзвичайно важливу роль у розвитку цієї науки зіграли дві книги. Перша з них – «Теорія лінійних операцій», яка вийшла у 1931 році польською мовою і у 1932 році - французькою. Друга книга, вплив якої на розвиток цієї науки важко переоцінити, – так звана, «Шкоцька книга». Це була рукописна книга, до якої потрапляли ті задачі, які ніхто не міг розв'язати.

Стосовно теорії банахових просторів, розв'язання двох задач із зазначених книг мало неабиякий резонанс. Перша з них була розв'язана нашим співвітчизником М. Й. Кадецем у 1966 році.

Є ще дві книги, які займають особливе місце в історії цієї науки, це – двотомник ізраїльських математиків Й. Лінденштрауса і Л. Цаффірі «Класичні банахові простори», видані у 1977 і 1979 роках відповідно.

Сучасний стан теорії викладений у двотомному довіднику, який було видано під редакцією В. Джонсона і Й. Лінденштрауса. Також вийшов з друку результат багаторічної праці німецького спеціаліста з теорії операторів А. Піча про історію розвитку теорії просторів Банаха і теорії операторів.

Мета статті. З'ясувати особливості і властивості метричного та банахового просторів; окреслити класи задач, що розв'язуються у цих просторах.

Виклад основного матеріалу. Дійсний (комплексний) лінійний простір L називають нормованим простором, якщо в ньому задано норму, тобто функцію, яка кожному елементу $x \in L$ ставить у відповідність дійсне число $\|x\|$ і для якої виконуються аксіоми норми:

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in L;$
- 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \lambda \in R (\lambda \in C);$
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - нерівність трикутника.

Наслідок з нерівності трикутника:

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in L.$$

Іноді в одному лінійному просторі можна ввести декілька норм, і отримати декілька нормованих просторів $(\|x\|_L)$ [5].

Введемо в нормованому просторі L функцію $\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in L.$

Перевіримо чи задовольняє дана функція аксіомам метрики:

- 1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \quad \forall x, y \in L;$
- 2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y;$

- 3) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = \rho(x, y) \quad \forall x, y \in L;$
 4) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in L.$

Отже, кожен нормований простір L є метричним простором з метрикою $\rho(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in L.$

Виникає питання, чи будь-який метричний простір є нормованим простором. Якщо метрика ρ індукує нормою $\|x\|$, то $\|x\| = \rho(x, 0)$. Але функція $f(x) = \rho(x, 0)$ може не задовольняти аксіоми норми. Наприклад, розглянемо дійсний лінійний простір R з метрикою:

$$\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

В цьому просторі метриці $\rho(x, y)$ відповідає функція:

$$\rho(x, 0) = \frac{|x|}{1 + |x|}.$$

Перевіримо виконання аксіоми 2 норми:

$$\forall \lambda \in R \quad \rho(\lambda x, 0) = \frac{|\lambda x|}{\lambda + |\lambda x|} = \frac{|\lambda| |x|}{\lambda + |\lambda| |x|} \neq |\lambda| \rho(x, 0).$$

Ця аксіома не виконується, отже ця функція не індукує норму.

Тобто, можна зробити висновок про те, що не будь-який метричний простір є нормованим простором, але всякий нормований є метричним простором.

Розглянемо приклади нормованих просторів.

1. Евклідовий простір E можна розглядати як нормований простір, якщо в ньому задати евклідову норму

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in E.$$

2. Нормованим простором є арифметичний евклідов простір R^n з евклідовою нормою

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

3. C^n – простір різних впорядкованих систем $z = (z_1, \dots, z_n)$ комплексних чисел, який є унітарним простором із скалярним добутком

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Норма в цьому просторі вводиться як

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{z_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2}$$

і називається унітарною.

4. Множина обмежених числових послідовностей з заданою нормою:

$$\|x\| = \sup_{k \in N} |x_k|, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

5. Нормованим є простір l_p з нормою:

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6. $C[a, b]$ – лінійний простір неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Введемо в нього норму наступним чином:

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, x \in C[a, b].$$

Дане задання норми є коректним тому, що за другою теоремою Вайєрштрасса будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція досягає свого найбільшого значення на $[a, b]$.

Перші дві аксіоми норми виконуються, перевіримо третю:

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t)|,$$

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t) + y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t)|$$

або

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Розглянемо поняття збіжності у просторі $C[a, b]$ за нормою. Нехай маємо послідовність $(x_n(t)) \in C[a, b]$ і нехай вона збіжна за нормою до функції $x(t) \in C[a, b]$. Тоді

$$\|x_n - x\| = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Оскільки

$$\sup_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)|,$$

то за теоремою (для послідовності функцій $(U_n(x))$ і функції $(U(x))$, визначених на множині X , має місце наступне твердження:

$$U_n(x) \rightrightarrows U(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |U_n(x) - U(x)| = 0.$$

ми маємо рівномірну збіжність $(x_n(t))$ до $x(t)$ на відрізку $[a, b]$.

Якщо розглядати числові простори, то за критерієм Коші поняття збіжності числової послідовності і поняття її фундаментальності еквівалентні, тобто числова послідовність є збіжною тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна. З усіх нормованих просторів ми виділяємо клас нормованих просторів, у яких буде виконуватися критерій Коші.

Поняття фундаментальності переноситься на нормовані простори [4]:

Означення. Послідовність (x_n) елементів нормованого простору L називається фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in N, \forall n > n_0(\varepsilon) \text{ і } \forall k \in N$:

$$\|x_n - x_{n+k}\| < \varepsilon.$$

Нас буде цікавити клас нормованих просторів у яких будь-яка фундаментальна послідовність є збіжною. Такі простори називаються повними або банаховими.

Розглянемо приклад нормованого простору у якому фундаментальна послідовність не збігається до жодного елемента цього простору [2].

$C_0[0, 1]$ – простір многочленів з нормою

$$\|p\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|, \quad p \in C_0[0, 1]. \quad (*)$$

$C_0[0, 1]$ є підпростором $C[0, 1]$, їх норми співпадають, отже збіжність послідовностей многочленів за нормою (*) еквівалентна рівномірній збіжності цих послідовностей на $[0, 1]$.

Розглянемо послідовність $(P_n(t))$ многочленів

$$P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ця послідовність є фундаментальною у $C[0, 1]$, а отже і у $C_0[0, 1]$.

$(P_n(t))$ є послідовність частинних сум ряду Тейлора функції e^t , вона збігається рівномірно на $[0, 1]$ до неперервної функції e^t , а отже і за нормою (*) у нормованому просторі $C[0, 1]$. Отже, $(P_n(t))$ є фундаментальною у $C[0, 1]$ і тим паче у $C_0[0, 1]$. Але границя цієї послідовності e^t не належить $C_0[0, 1]$.

З наведеного прикладу можна зробити висновок, що всяка збіжна за нормою послідовність в нормованому просторі є фундаментальною, але не кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Висновки. Поняття лінійного та евклідового просторів відомі нам з курсу лінійної алгебри. Задання в лінійному просторі норми дає можливість наділити даний лінійний простір структурою метричного простору. А наявність метрики дозволяє розглядати в нормованих просторах основні метричні поняття: збіжність послідовностей, неперервність і диференційованість функцій. Тобто, будь-який нормований простір можна розглядати як метричний, але не всякий метричний простір може бути нормованим.

Література

1. Банах С. С. Курс функціонального аналізу / С. С. Банах. – К.: «Радянська школа», 1948. – 192 с.
2. Бохан К. А. Курс математического анализа: учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. Том I / К. А. Бохан, И. А. Егорова, К. В. Лашенов. – М.: «Просвещение», 1972. – 507 с.
3. Виленкин Н. Я. Математический анализ: учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов / Н.Я. Виленкин, М. Б. Балк, В. В. Петров. – М.: «Просвещение», 1980. – 144 с.
4. Власова А. Е. Ряды : Учеб. для вузов/ А. Е. Власова. – М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2006. – 616 с.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 685 с.
6. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
7. Кондаков В. П. Функциональный анализ: теория, примеры, задачи. Банаховы пространства. Часть 1 / В. П. Кондаков, М. А. Шабурин, В. М. Каплицкий. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет, 2010. – 46 с.

8. Натансон І. П. Основи теорії функцій дійсної змінної / І. П. Натансон. – Х.: «Радянська школа», 1950. – 391 с.
9. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Под ред. М. Ф. Бокштейна. – М.: «Просвещение», 1981. – 271 с.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ: специальный курс / Г. Е. Шилов. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 433 с.

***Анотація.** Новак Ю. М. Банахові простори. У статті розкрито теоретичні основи банахових просторів, зв'язок метричного та нормованого просторів, встановлений зв'язок між фундаментальністю послідовності та її збіжністю в банахових просторах.*

***Ключові слова:** простір, метрика, норма, збіжність*

***Аннотация.** Новак Ю. М. Пространства Банаха. В статье раскрыты теоретические основы банаховых пространств, связь метрического и нормированного пространств, установлена связь между фундаментальностью последовательности и ее сходимостью в банаховых пространствах.*

***Ключевые слова:** пространство, метрика, норма, сходимость*

***Summary.** Novak M. Banach spaces. The article deals with the theoretical foundations of Banach spaces, communications and normalized metric spaces, to communicate with a fundamental sequence and its convergence in Banach spaces.*

***Keywords:** space, metric, norm, convergence.*

УДК 37:013

В.І. Оленчук

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Поняття вектора з'явилося в роботах німецького математика 19 ст. Г. Грасмана та ірландського математика У. Гамільтона ; потім воно було охоче прийняте багатьма математиками і фізиками. У сучасній математиці і її додатках це поняття відіграє дуже важливу роль. Вектори застосовуються в класичній механіці Галілея - Ньютона (в її сучасному викладі), в теорії відносності, квантовій фізиці, в математичній економіці та багатьох інших розділах природознавства, не кажучи вже про застосування векторів в різних областях математики.

У сучасній математиці і тепер не мало уваги приділяється векторам. За допомогою векторного методу вирішуються складні завдання. Побачити використання векторів ми можемо у фізиці, астрономії, біології та інших сучасних науках.

Питання про те, чи повинні вивчатися вектори в шкільному курсі, в даний час практично необговорюється. По-перше ця тема важлива тому, що дозволяє, використовуючи вектори, спростити рішення багатьох задач, які іншими методами вирішуються набагато важче, а в деяких випадках, особливо, коли багато змінних, лише такий підхід і приводить до успіху.