

УДК 371.3:51

А.Ю. Ярова

Сумський державний педагогічний університет ім. А.С.Макаренка

**ЗАДАЧІ НА ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ В ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ**

**Постановка проблеми.** Завдання з геометричними нерівностями викликають у широкого кола учнів досить значні проблеми і труднощі через їх нестандартність та поверховість їх розгляду в середній школі.

**Аналіз актуальних досліджень.** Проблемі навчання учнів розв'язуванню та доведенню нерівностей присвячені дослідження Г.П. Бєвза, Е.Г. Готмана, Є.Ф. Савич, В.В. Прасолова, А.І. Фетісова, І.Ф. Шаригіна та інших.

**Мета статті.** Запропонувати задачі на доведення нерівностей, які доцільно розглядати як на уроках геометрії при вивченні відповідних тем для глибокого засвоєння і закріплення матеріалу так і в позакласній роботі.

**Виклад основного матеріалу.**

Теорія нерівностей відіграє в математиці велику роль, а деякі її сучасні галузі, зокрема лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор, дослідження операцій, тощо, повністю ґрунтуються на цій теорії.

Розглянемо нерівності, доведення яких пов'язане з геометричними міркуваннями і які на цій підставі називаються геометричними.

Навчання учнів доведенню геометричних нерівностей вимагає від вчителя математики проведення кропіткої попередньої підготовчої роботи, спрямованої на систематизацію методів доведення числових нерівностей на основі виділення типових завдань, що дозволяє учням набути практичних навичок і сформувані певні стереотипи та алгоритми розв'язування подібних задач.

Проілюструємо на прикладах способи розв'язування вказаних вправ. Вважаємо за необхідне ознайомити з такими прийомами розв'язування задач:

- безпосереднього застосування відомих теорем про нерівності;
- введення параметра;
- введення допоміжної фігури;
- оцінка площі через добуток довжин відрізків;
- використання площі в оцінках відстаней;
- принцип Діріхле;
- екстремальна властивість центру ваги;
- метод диференціального та інтегрального числення.

**Задача 1.** Довести, що кожна медіана тетраедра менша середнього арифметичного трьох його ребер, які виходять із тієї ж вершини, що і медіана.

**Розв'язання.** Нагадаємо, що медіана тетраедра є відрізок  $SM$ , що з'єднує вершину  $S$  з центром  $M$  протилежної грані. Значить, на нашому малюнку  $AD$  - медіана грані  $ABC$ ,  $SD$  - медіана грані  $SCB$ . Відкладемо на продовженні  $SD$

відрізок  $DK=SD$ . В трикутнику  $SAK$  точка  $M$  є центроїдом, тому  $SM$  перетне  $AK$  в точці  $N$  такій, що  $AN=NK$ .

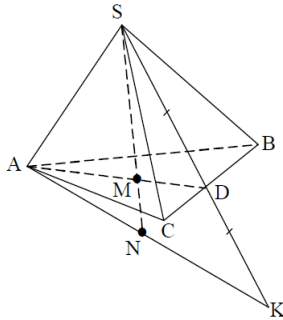


Рис. 1.

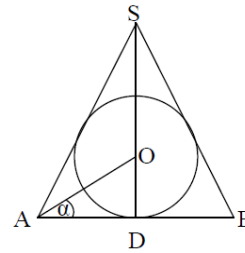


Рис. 2.

Тепер маємо  $SN < \frac{AS+SK}{2}$ ,  $SK = 2SD < 2 \frac{SB+SC}{2} = SB+SC$ ,  
 $SN < \frac{SA+SB+SC}{2}$ , а оскільки  $SM = \frac{2}{3}SN$ , то отримуємо  $SM < \frac{SA+SB+SC}{3}$ .

З метою реалізації принципу аналогії (планіметричний аналог використовується при розв'язуванні стереометричної задачі) дану задачу доцільно розв'язати в класі у парі з такою: довести, що кожна медіана трикутника менша середнього арифметичного двох його сторін, які виходять з тієї ж вершини, що і медіана.

Такий паралельний розгляд пари аналогічних фактів бажаний при розв'язуванні багатьох стереометричних задач на доведення нерівностей. У методичному плані задача 1 демонструє спосіб розв'язування задачі на доведення, що полягає в прямому використанні відомої нерівності (чи відомої геометричної теореми про нерівність).

**Задача 2.** Довести, що якщо навколо сфери радіусу  $r$  описаний конус об'єму  $V$ , то має місце нерівність  $V \geq \frac{8\pi r^3}{3}$  (1).

**Розв'язання.** Використається така схема міркувань, що часто застосовується при доведенні геометричних нерівностей. Вводиться деякий допоміжний параметр, потім відшукується точне значення об'єму  $V$ . Необхідне співвідношення виникає тепер в результаті оцінки  $V$  за введеним параметром.

В даному випадку таким параметром є кут  $\alpha$  (рис. 2).

$$\text{Маємо: } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

Із прямокутного трикутника маємо  $ADO$  ( $\angle D = 90^\circ$ ,  $\angle OAD = \alpha$ ,  $OD = r$ ),  
 $AD = r \operatorname{ctg} \alpha$ .

Із прямокутного трикутника  $ADS$  ( $\angle D = 90^\circ$ ,  $\angle SAD = 2\alpha$ ) маємо  
 $SD = AD \operatorname{tg} 2\alpha = r \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha$ .

$$V = \frac{1}{3} AD^2 SD = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\pi r^3}{3} \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2\pi r^3}{3} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

Для оцінки отриманого співвідношення знизу врахуємо, що

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \leq \left[ \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2} \right] = \frac{1}{4}.$$

Тому  $V \geq \frac{\pi r^3}{3}$ .

Задача розв'язана. Рівність отримується у випадку  $\operatorname{tg} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

З методичних міркувань варто наголосити: якщо позначити об'єм кулі  $V_1$ , то  $V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3$ , тому нерівність (1) запишеться так:  $V > 2 V_1$  (2).

Це дозволяє дати нове формулювання задачі: довести, що об'єм конуса не менше подвоєного об'єму вписаної в нього кулі.

Виходячи з нерівностей (1) і (2), можна поставити перед класом також декілька цікавих екстремальних задач, наприклад:

а) довести, що найбільший з радіусів куль, які можна вписати в конус заданого об'єму  $V_1$  дорівнює:  $\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$ .

б) довести, що найменший об'єм конуса, який можна описати навколо даної кулі, дорівнює подвоєному об'єму цієї кулі [5, 123].

**Задача 3.** Довести, що об'єм правильної піраміди менше куба її бічного ребра.

**Розв'язання.** На прикладі даної задачі демонструється прийом доведення геометричних нерівностей, що називається способом введення допоміжної фігури.

Опишемо навколо даної піраміди конус. Оскільки об'єм конуса більше об'єму піраміди, то якщо ми доведемо, що об'єм конуса менше куба твірної, задача буде тим більше розв'язана у вихідному формулюванні (оскільки твірна конуса дорівнює бічному ребру піраміди).

Для конуса знаходимо (рис. 3):

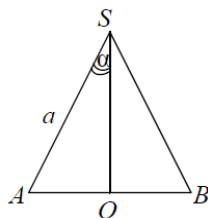


Рис. 3.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi OA^2 SO = \frac{1}{3} \pi (\arcsin \alpha)^2 a \cos \alpha = \frac{1}{3} \pi a^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} a^3 \sin \alpha (\sin \alpha \cos \alpha) \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \pi a^3 \sin \alpha \left( \frac{\sin 2\alpha + \cos^2 \alpha}{2} \right) = \frac{1}{3} \pi a^3 \sin \alpha < \frac{\pi}{6} a^3 < a^3. \end{aligned}$$

При підготовці учнів до розв'язування задач на екстремум доцільно попередньо розглянути задачу на знаходження довжин сторін прямокутника із заданим периметром максимальної площі або на знаходження мінімального периметра прямокутника з заданою площею. Це дозволить проілюструвати учням: різні способи розв'язування (використання властивостей квадратичної функції; використання похідної; використання нерівності Коші та її наслідків); показати можливість узагальнення та конкретизації задач; проілюструвати цілісність математики.

**Задача 4.** Який найбільший об'єм може мати прямокутний паралелепіпед, діагональ якого рівна  $a$ ?

**Розв'язання.** Для відповіді на питання введемо нерівність, що пов'язує об'єм паралелепіпеда з довжиною його діагоналі. Хай  $x$ ,  $y$ ,  $z$  виміри паралелепіпеда, тоді  $a^2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} = 3\sqrt[3]{V^2}$ .

Таким чином,  $V \leq \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3$ , причому рівність справедлива лише у випадку

$x = y = z$ . Значить, найбільший об'єм має куб з ребром  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$  [6,261].

У методичному плані задача 4 демонструє спосіб розв'язування задачі на доведення, що полягає у зведенні до відомої алгебраїчної нерівності.

Цей прийом може бути використаний при розв'язуванні багатьох геометричних задач на відшукування екстремальних значень.

#### **Оцінка площі через добуток довжин відрізків**

Добре відомо, що площа трикутника не перевищує половини добутку його двох сторін, площа опуклого чотирикутника не більша за половину добутку його діагоналей.

**Задача 5.** Нехай  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – довжини послідовних сторін опуклого чотирикутника. Довести, що його площа не перевищує  $(ac + bd)/2$ .

**Розв'язання.** Проведемо діагональ чотирикутника, по один бік від якої будуть сторони довжини  $a$  і  $b$ , по інший –  $c$  і  $d$ . Утворений трикутник зі сторонами довжини  $a$  і  $b$  відобразимо симетрично відносно серединного перпендикуляра проведеної діагоналі. Отримаємо чотирикутник тієї ж площі з довжинами послідовних сторін  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $b$ . Друга діагональ чотирикутника розділяє трикутні частини, площа однієї з яких не перевищує  $ac/2$ , а другої –  $bd/2$ .

#### **Використання площі в оцінках відстаней**

**Задача 6.** Довести, що в колі радіуса 10 не можна відмітити 450 точок так, щоб відстань між будь-якими двома з них була більшою за 1.

**Розв'язання.** Припустимо, що такі 450 точок відмітити можна. Проведемо кола радіуса  $1/2$  з центрами у всіх відмічених точках. Оскільки відстані між відміченими точками більші за 1, кола перетинатися не будуть. Всі 450 проведених "маленьких" кіл будуть міститися у "великому" колі з радіусом  $21/2$  та центром, що співпадає з центром даного в умові кола. Тому сума площ

"маленьких" кіл не повинна перевищувати площі "великого". Але нерівність

$$450\left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi \leq \left(\frac{21}{2}\right)^2 \pi$$

не виконується. Отримано суперечність.

**Принцип Діріхле**

Якщо в об'єднанні  $n$  фігур відмічено  $n + 1$  точку, то знайдеться фігура, в якій відмічено не менше 2 точок. При використанні цієї простої ідеї головною складністю розв'язання може бути пошук вдалого вибору цих фігур.

**Задача 7.** В прямокутнику  $3 \times 4$  дано 6 точок. Довести, що серед них знайдуться дві, відстань між якими не перевищує  $\sqrt{5}$ .

**Розв'язання.** Припустимо, що даний прямокутник розташовано на координатній площині, і його вершини мають координати  $(0; 0)$ ,  $(4; 0)$ ,  $(4; 3)$ ,  $(0; 3)$ . Відмітимо точки  $(0; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(3; 2)$ ,  $(3; 3)$ ,  $(4; 1)$  і проведемо всі можливі відрізки довжини 1 та між ними. Так ми отримаємо розбиття прямокутника на 5 опуклих багатокутників. Деякі дві з даних точок будуть належати одному багатокутнику, а відстань між будь-якими точками кожного з цих багатокутників не перевищує  $\sqrt{5}$ .

В попередньому прикладі ми неявно скористалися наступним фактом. Відстань між будь-якими точками опуклого багатокутника не перевищує найбільшої з відстаней між його вершинами. Тому, щоб обґрунтувати, що відстань між будь-якими точками багатокутника не більша за, досить було перебрати відстані між його вершинами [4, 46].

**Екстремальна властивість центру ваги**

**Задача 8.** Для точок  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на площині їх центром ваги будемо називати таку точку  $M$ , що  $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$ . Така  $M$  існує і єдина. Адже для довільно обраної точки  $B$  ми отримуємо, що

$$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + \dots + \overrightarrow{BA_n} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{BM}.$$

Записана рівність однозначно визначає  $M$ . Відмітимо, що центром ваги трьох вершин трикутника буде точка перетину медіан цього трикутника.

Вказане математичне поняття узгоджується з фізичним, якщо розмістити в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  маси однакової величини.

Центр ваги має наступну екстремальну властивість. Для будь-якої точки  $B$  площини буде

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 \leq BA_1^2 + BA_2^2 + \dots + BA_n^2$$

Обґрунтуємо цю нерівність, використовуючи скалярний добуток векторів.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n BA_k^2 &= \sum_{k=1}^n (\overrightarrow{BA_k}, \overrightarrow{BA_k}) = \sum_{k=1}^n (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA_k}, \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM}) + 2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA_k}) + (\overrightarrow{MA_k}, \overrightarrow{MA_k}) \right) = \\ &= nBM^2 + 2\left(\overrightarrow{BM}, \sum_{k=1}^n \overrightarrow{MA_k}\right) + \sum_{k=1}^n MA_k^2 \geq \sum_{k=1}^n MA_k^2 \end{aligned}$$

В останній нерівності ми використали, що  $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{MA_k} = \vec{0}$ .

### Метод диференціального та інтегрального числення

**Задача 9.** Нехай опуклий многокутник  $F_1$  лежить всередині опуклого многокутника  $F_2$ . Довести, що периметр  $F_1$  не перевищує периметр  $F_2$ .

**Розв'язання.** Позначимо через  $f_1(\alpha)$  та  $f_2(\alpha)$  довжини проєкцій на пряму, що проходить під кутом  $\alpha$ , многокутників  $F_1$  та  $F_2$  відповідно. Оскільки  $F_1$  лежить всередині  $F_2$ , для всіх  $\alpha$  буде  $f_1(\alpha) \leq f_2(\alpha)$ . Тому

$$\int_0^{\pi} f_1(\alpha) d\alpha \leq \int_0^{\pi} f_2(\alpha) d\alpha \quad (2)$$

Многокутник  $F_1$  опуклий, тому будь-яка його проєкція складається з проєкцій сторін, розташованих в два шари, і тому  $f_1(\alpha)$  дорівнює половині суми довжин проєкцій сторін цього многокутника на пряму в напрямку  $\alpha$ . Враховуючи (1), отримуємо, що  $\int_0^{\pi} f_1(\alpha) d\alpha$  дорівнює периметру  $F_1$ . Аналогічно  $\int_0^{\pi} f_2(\alpha) d\alpha$  рівний периметру  $F_2$ . Залишається використати (2). (Заради математичної строгості відмітимо, що  $f_1(\alpha)$  та  $f_2(\alpha)$  є лінійними комбінаціями косинусів із зсувом аргументу, є неперервними функціями, і тому відповідні інтеграли існують) [4, 120].

### 1. Многогранники

1. Яку найбільшу бічну (повну) поверхню може мати прямокутний паралелепіпед, діагональ якого дорівнює  $a$ ?

2. Довести, що в трикутній призмі проти більшої за площею бічної грані лежить більший двогранний кут і навпаки.

3. Довести, що сума відстаней від точки, розташованої всередині тетраедра, до його вершин більше третини суми ребер тетраедра.

4. Показати, що сума відстаней від довільної точки, взятої всередині тетраедра (або на його грані), до граней тетраедра розміщена між найменшою і найбільшою висотами тетраедра.

5. Сонце на екваторі знаходиться в зеніті. Як треба розташувати сірникову коробку, щоб його тінь на столі закривала найбільшу площу?

6. Довести, що існує трикутна піраміда, п'ять ребер якої дорівнюють даному відрізку  $a$ . У яких межах змінюється її шосте ребро?

7. Довести, що двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди завжди тупий.

8. Показати, що, якщо всі 6 двогранних кутів тетраедра гострі, то і всі 12 його плоских кутів - гострі.

9. Одна із двох трикутних пірамід із спільною основою розміщена в середині іншої. Довести, що сума плоских кутів при вершині внутрішньої піраміди більше, ніж сума плоских кутів при вершині зовнішньої.

10. На поверхні куба знайти всі точки, із яких дану діагональ куба видно під найменшим кутом (кінці діагоналі не розглядати). Чому дорівнює цей кут?[8, 253]

## 2. Круглі тіла

11. Довести, що кут між будь-якими твірними конуса не більше кута при вершині його осевого перетину.

12. Із всіх плоских перетинів конуса, проведених через його вершину, знайти перетин, що має найбільшу площу.

13. Якщо циліндр і конус мають рівні основи і рівні висоти, то бічна поверхня конуса більше половини бічної поверхні циліндра (довести).

14. Різносторонній трикутник послідовно обертається довкола кожної із сторін. Об'єм якого з отриманих тіл найбільший? найменший?

## 3. Комбінації тіл

15. Показати, що якщо сфера вписана в зрізаний конус, то поверхня цієї сфери менше бічної поверхні конуса.

16. Довести, що якщо в зрізаний конус можна вписати кулю, то об'єм цієї кулі менше об'єму конуса.

17. Показати, що якщо в сферу вписаний циліндр, то його бічна поверхня не перебільшує половини поверхні сфери.

18. Довести, що радіус кулі, вписаної в зрізаний конус, менше півсуми радіусів основ конуса [7, 256].

## Висновки.

Геометричні нерівності є важливою частиною геометрії. Тема "Геометричні нерівності" є "класичною темою", тобто темою, яка давно і міцно увійшла в геометрію. Задачі на доведення геометричних нерівностей трапляються у геометрії досить часто. Їх розв'язання викликає в учнів іноді труднощі, пов'язані зі специфікою. Загальні ідеї, які часто застосовують при розв'язанні, базуються на відомих властивостях алгебраїчних нерівностей.

Розв'язання задач на геометричні нерівності не потребує будь-яких складних математичних знань або складної техніки, але вимагає творчого і логічного мислення. Задачі на геометричні нерівності необхідно включати в шкільну програму, а також обов'язково розглядати на гурткових і олімпіадних заняттях.

Підсумовуючи, пригадаємо слова Д.Пойа: «Що означає володіння математикою? Це вміння розв'язувати задачі, причому не тільки стандартні, але й ті, які вимагають певної незалежності мислення, здорового глузду, оригінальності, винахідливості. Тому перше і головне завдання курсу математики в школі - акцентувати на методичному аспекті процесу розв'язування задач». Геометричні задачі на доведення нерівностей повною мірою дозволяють реалізувати ці слова великого педагога і математика.



### Література

1. Геометрія: Підруч. для учнів 10-11 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. загальноосвіт. закладах / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова. – К.: Освіта, 2000. – 239 с.
2. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
3. Семенов В. О. Доведення нерівностей. Числові послідовності. Скінченні суми і добутки. Х.: Вид. група «Основа», 2009. – 127 с.
4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. Посібн., – К.: Видавництво А. С. К., 2004.
5. Тадєєв В.О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайловського. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 384 с.
6. Тадєєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. М.И. Ядренка. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 480 с.
7. Фетисов А.И. Геометрия в задачах: Пособие для учащихся школ и классов с углубл. теоретическим и практическим изучением математики. – М.: Просвещение, 1977. – 192 с.
8. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

***Анотація.** В даній статті розглянуті основні способи доведення геометричних нерівностей. Поданий матеріал, який може бути використаний при вивченні математики як на уроці, так і в позакласній роботі з предмету.*

***Ключові слова:** принцип доведення, геометричні нерівності, геометрична задача.*

***Аннотация.** В данной статье рассмотрены основные способы доказательства геометрических неравенств. Подан материал, который может быть использован при изучении математики как на уроке, так и во внеклассной работе по предмету.*

***Ключевые слова:** принцип доказательства, геометрические неравенства, геометрическая задача.*

***Annotation.** In this article the basic methods of proving to of geometrical inequalities are considered. Material which can be used for the study of mathematic both on a lesson is given and to extracurricular work from an object.*

***Key words:** principle of leading to, geometrical inequalities, geometrical tasks.*