УДК 517.6

В.Д. Погребний

Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

ТРАНСФІНІТНІ ЗАМИКАННЯ

Відомо, що адекватний опис топологічної структури в термінах збіжності послідовностей можливий далеко не завжди (див. наприклад, [8, с. 93], [2, с. 91]). Для цього потрібні значно більш непрості конструкції збіжності – напрямленості, розроблені українським математиком С.О. Шатуновським та американцями Е.Муром та Г.Смітом або фільтри, які вперше з'явились у М. Фреше і детально розроблені А.Картаном. Оскільки напрямленості та фільтри значно складніші, ніж звичайні послідовності, то виникає питання: в яких топологічних просторах можливий адекватний опис топологічної структури в термінах послідовностей? Це питання детально висвітлене у нашій попередній статті [7].

Теорія фільтрів є незвичною для починаючих вивчати сучасний аналіз, а труднощі з напрямленостями пов'язані з частковою упорядкованістю області задання – частковий порядок теж значно складніший і незвичніший, ніж лінійний. Тому виникає бажання все ж обійтися послідовностями за рахунок деякого ускладнення області задання. Послідовність – це відображення $f\colon N \to X$. Множина N лінійно упорядкована і навіть цілком упорядкована. Натуральні числа грають подвійну роль: кардинальних (кількісних) та ординальних (порядкових) чисел. Оскільки у понятті границі послідовності важливий саме порядок $\left(n > n_0 \Rightarrow x_n \in V(x_0)\right)$, то виникає бажання розглянути узагальнені послідовності, а саме трансфінітні. Відомо [1, с. 66], що довільна множина порядкових чисел є цілком упорядкованою. Що ми розуміємо під терміном «трансфінітна послідовність»? Нехай α_0 – граничний ординал, $A = \{\alpha : \alpha < \alpha_0\}$ – множина порядкових чисел, менших α_0. Відображення $A \to X$, $x(\alpha) = x_\alpha$, $\forall \alpha \in A$ називається трансфінітною послідовністю типу (α_0). Чи вдається за допомогою трансфінітних послідовностей одержати адекватний опис топологічної структури? Відповідь виявляється негативною [5, с. 20]: «Не кожну точку з $\overline{M}$ вдається представити у вигляді послідовності точок з М, навіть трансфінітною».

Причина цього явища полягає у тому, що система околів точки у топологічному просторі, взагалі кажучи, упорядкована частково. Не завжди вдається у цій системі околів виділити ланцюг деякої потужності, що дає фундаментальну систему околів.

Розглянемо тепер інший аспект проблеми. Нехай на множині X задано деяку абстрактну (σ)-збіжність. Відомі умови на неї, що дозволяють одержати топологічну структуру. Це виконується через так звані (σ)-замикання множини $\mathrm{M} \subset \mathrm{X}$. (σ)-замикання множини М є множина $\overline{\mathrm{M}}^{(\sigma)}$, що складається з усіх

(σ)-границь (σ)-збіжних напрямленостей точок множини М. М називається (σ)-замкненою, якщо $\overline{\mathrm{M}}^{(\sigma)} = \mathrm{M}$. При виконанні умов NA1, NA2 [6, с. 107] сімейство всіх (σ)-замкнених множин є сімейством всіх замкнених множин деякої топології $\tau^{(\sigma)}$ на *X*. При цьому збіжність у цій топології слабша (ширша), ніж вихідна (σ)-збіжність: $\left(\tau^{(\sigma)}\right) \supset (\sigma)$, $(\sigma) \Rightarrow \left(\tau^{(\sigma)}\right)$. При виконанні також умов NA3, NA4 ці збіжності співпадають: $(\sigma) = \left(\tau^{(\sigma)}\right)$. Таким чином, при виконанні цих чотирьох умов, $\overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{M}}^{(\sigma)}$ для всіх $\mathrm{M} \subset \mathrm{X}$.

Але часто розглядають такі абстрактні збіжності, що задовольняють лише умови NA1, NA2 – так звані простори Фреше (іноді ще постулюють єдиність (σ)-границі). Тоді не завжди $\overline{\mathrm{M}}^{(\sigma)}$ співпадає з $\overline{\mathrm{M}}$.

Позначимо через $\overline{\mathrm{M}}^{(1)}$ множину всіх (σ)-границь всіх (σ)-збіжних напрямленостей точок з М. Отже $\mathrm{M}^{(1)} = \overline{\mathrm{M}}^{(\sigma)}$. $\overline{\mathrm{M}}^{(2)}$ – це множина всіх (σ)-границь всіх (σ)-збіжних напрямленостей точок з $\mathrm{M}^{(1)}$. Тобто $\overline{\mathrm{M}}^{(2)} = \overline{\mathrm{M}^{(1)(\sigma)}} = \overline{\left(\overline{\mathrm{M}^{(\sigma)}}\right)^{(\sigma)}}$ і т.д. Якщо α – трансфінітне число, то

$$\overline{\mathrm{M}}^{(\sigma)} = \left\{x_0 : x_0 = (\sigma)\text{-} lim x_\alpha\,,\ x_\alpha \in \cup_{\beta<\alpha} \overline{\mathrm{M}}^{(\beta)}\right\}.$$

Тоді для таких трансфінітних замикань має місце такий результат [6]: $\cup_\alpha \overline{\mathrm{M}}^{(\alpha)} = \overline{M}$.

Трансфінітні замикання також використовував С.Банах [3, с.102-106, 181] при вивченні множин лінійних функціоналів у спряжених просторах. (Напрямленостей він не використовував).

Таким чином, хоча трансфінітні послідовності у загальному випадку і не є адекватними топологічній структурі, вони все ж являють собою цікаві і важливі конструкції в топологічних просторах.

Література

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.
3. Банах С.С. Курс функціонального аналізу. – К.: Радянська школа, 1948. – 216 с.
4. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: ГИФМ Л, 1961. – 408 с.
5. Келли Дж.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 384 с.
6. Петунин Ю.И., Скляднев С.А. Некоторые вопросы теории пространств Фреше // Труды семинара по функциональному анализу в Воронежском университете. – Воронеж, 1968. – С.84 (выпуск 10).

7. Погребний В.Д. Про деякі проблеми характеризації топологічної структури в термінах послідовностей // Фізико-математична освіта, випуск 1(3). – Суми: СумДПУ, 2012. – С. 26-32.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 753 с.

Анотація. *Погребний В.Д. Трансфінітні замикання. Розглядаються деякі аспекти використання трансфінітних послідовностей і транс фінітних замикань у загальній топології і функціональному аналізі. Вказується на неадекватність цих конструкцій загальним топологічним структурам.*

Ключові слова**:** *послідовність, залежність, трансфінітний, замикання, границя.*

Аннотация. *Погребной В.Д. Трансфинитные замыкания. Рассматриваются некоторые аспекты применения трансфинитных последовательностей и трансфинитных замыканий в общей топологии и функциональном анализе. Указывается на неадекватность этих конструкций общим топологическим структурам.*

Ключевые слова**:** *последовательность, сходимость, трансфинитный, замыкание, предел.*

Summary. *Pogrebnoy V. Transfinite circuit. We consider some aspects of the use of transfinite sequences and trans finite circuits in general topology and functional analysis. Specifies the inadequacy of these structures general topological structures.*

Keywords: *sequence dependence transfinite, circuit boundary.*