

математике для старшей школы разных лет издания по теме «Показательная и логарифмическая функции».

Ключевые слова: степенная функция, показательная функция, логарифмическая функция.

Ю.С. Лазуткіна

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Постановка проблеми. Бурхливий розвиток науки, техніки, інших галузей народного господарства неможливий без математики. На сучасному етапі розвитку суспільства для розв'язування різних типів прикладних задач сформувався достатньо потужний математичний апарат, зокрема це теорія диференціальних рівнянь. Дослідження багатьох задач потребує побудови математичних моделей, що розв'язуються методами диференціальних рівнянь. Це дає змогу встановити якісні та кількісні характеристики стану процесу, побачити спільність процесів різної природи.

Аналіз актуальних досліджень. Застосування методу диференціальних рівнянь при дослідженні різних процесів та явищ вивчали Мальтус (одновидова популяція), Вольтерр (двовидова популяція), Шредингер (квантова механіка), Левер'є (відкриття планети Нептун), Гальоркін тощо [4].

Мета статті: показати прикладне застосування методу диференціальних рівнянь на прикладі дослідження біологічних моделей та розв'язування задачі про поглинання світла.

Виклад основного матеріалу. У кінці XVII – на початку XVIII ст. різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насамперед це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегрування яких намагалися здійснити за допомогою функцій, що виражають скінченне число алгебраїчних дій або таких, що включають елементарні неалгебраїчні дії, наприклад оперування тригонометричними функціями.

Перший період розвитку вчення про диференціальні рівняння був пов'язаний з успішним розв'язуванням деяких важливих прикладних задач, що потребують застосування апарату диференціальних рівнянь, розробкою методів інтегрування різних типів диференціальних рівнянь і пошуком класів рівнянь, розв'язки яких можна подати у вигляді елементарних функцій або їх первісних. Проте дуже швидко виявилось, що інтегрованих диференціальних рівнянь зовсім небагато. Це зумовило розвиток власне теорії диференціальних рівнянь, яка займається розробкою методів, що дають змогу за властивостями диференціального рівняння визначити властивості та характер його розв'язку.

У зв'язку з потребами практики поступово розроблялися і способи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дають зручні алгоритми обчислень з ефективними оцінками точності, а сучасна обчислювальна техніка дає змогу

економічно і швидко звести розв'язування кожної такої задачі до числового результату [1].

Диференціальні рівняння є одним із найпопулярніших і потужних засобів розв'язування прикладних задач, що виникають всюди, де є необхідність кількісного (числового) опису явищ. Особливо широко вони використовуються для розв'язування задач природничо-наукового циклу: теоретичної механіки, фізики, електротехніки, хімії, біології тощо.

Для цього реальну задачу перекладають на математичну мову, не втрачаючи при цьому основних властивостей оригіналу. Даний процес має назву математичного моделювання.

Модель – це об'єкт, що заміняє оригінал і відображає найважливіші риси і властивості оригіналу для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Моделювання – це процес дослідження деяких явищ, процесів чи систем шляхом побудови і вивчення їх моделей; використання моделей для визначення поведінки і характеристик реальних систем.

Перейдемо до побудови й дослідження конкретних математичних моделей із застосуванням викладеної вище теоретичної бази. На прикладах проілюструємо прийоми й методи математичного моделювання.

Будь-яку кінетичну біологічну систему можна охарактеризувати як сукупність деяких параметрів, значення яких є незмінними протягом часу спостереження за системою, та змінних у часі. Параметрами є, наприклад, такі фізичні величини, як температура, вологість, електрична провідність мембрани і т. д. Залежно від досліджуваних біосистем змінними вважаються: в екології – чисельність виду, у біофізиці – мембранний потенціал, у мікробіології – кількість мікроорганізмів, у біохімії – концентрація речовини тощо.

Припустимо, що в біосистемі є n різних компонент (напр., хімічних сполук), які з часом зазнають метаболічних перетворень. Це означає, що значення концентрації C_i кожної i -ї сполуки ($i = 1, 2, \dots, n$) змінюється з часом унаслідок її взаємодії з будь-якою іншою ($n - 1$) компонентою. Такого припущення достатньо для побудови загальної математичної моделі, яка є системою n диференціальних рівнянь першого порядку.

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = f_1(c_1, \dots, c_n) \\ \dots \\ \frac{dc_n}{dt} = f_n(c_1, \dots, c_n) \end{cases} \quad (1)$$

У системі (1), де $\frac{dc_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – швидкості зміни невідомих концентрацій (змінних), f_i – деякі функції, які можуть залежати як від внутрішніх (наприклад, водневий показник рН), так і від зовнішніх (наприклад, температура) параметрів біосистеми.

Знайти загальний розв'язок моделі (1) в аналітичному вигляді, як правило, вдається лише тоді, коли вона є лінійною. Однак процеси, які відбуваються в біологічних системах, як правило, є нелінійними; відповідно нелінійними є й математичні моделі цих процесів. Проте існують методи якісного аналізу

При проходженні світла через воду (або скло) деяка його частина поглинається. Нехай на поверхню води перпендикулярно до неї падає світло з інтенсивністю A_0 , інтенсивність світла на глибині x позначимо через $A(x)$. Похідна $A'(x)$ – швидкість поглинання світла на глибині x . З оптики відомо, що для такого середовища, як вода або скло, швидкість поглинання світла на глибині x пропорційної інтенсивності світла на цій глибині, а саме

$$A'(x) = -kA(x), k > 0 \quad (5)$$

Оскільки інтенсивність світла $A(x)$ із збільшенням глибини x зменшується, то похідна $A'(x)$ від'ємна. Рівняння (5) для функції $A(x)$ є диференціальним рівнянням вигляду $y'(x) = ky(x)$.

Розглянемо іншу задачу на застосування методу диференціальних рівнянь.

Приклад. Шар води у десять метрів поглинає 40% світла, що падає на її поверхню. На якій глибині денне світло буде за яскравістю таким самим, як місячне світло на поверхні води, якщо яскравість місячного світла складає $\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ яскравості денного світла?

Розв'язання. Початкова умова задачі має вигляд

$$A(0) = A_0 \quad (6)$$

Це зумовлено тим, що на поверхні води світло не поглинається.

Розв'язок рівняння (5) при початковій умові (6) буде мати вигляд $A(x) = A_0 e^{-kx}$; звідки, використовуючи додаткову умову $A(10) = 0,6A_0$, знайдемо

$$e^{-k} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

Закон поглинання світла матиме вигляд

$$A(x) = A_0 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

Глибину x знаходимо з рівняння:

$$\frac{A_0}{3} \cdot 10^{-5} = A_0 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

звідки $x \approx 247$ м. [2]

Висновки. Аналогічність диференціальних рівнянь, що стосуються різноманітних явищ життя, призвела до виникнення важливого засобу розв'язування практичних задач – засобу математичного моделювання. Ми розглянули різні моделі, дослідження яких потребує розв'язків певних диференціальних рівнянь. Ця обставина має не тільки філософське значення, підтверджуючи єдність природи, і не тільки природниче значення, підкреслюючи чинність математичних засобів у природознавстві. Вона має і велике практичне значення. Диференціальне рівняння, що з'явилося при розгляді якої-небудь технічної задачі, моделюють, наприклад, електричним приладом, а саме конструюють такий електроприлад, робота якого описується тим же диференціальним рівнянням, що і технічний об'єкт. Спостерігаючи за роботою електроприладу, ми зуміємо судити про поведінку цієї функції. Дослідження різних моделей математичними методами не тільки дозволяє дослідити кількісні характеристики певних явищ і розрахувати із заданим ступенем точності хід

реальних процесів, а й надає можливість глибокого проникнення до самої суті цих явищ, виявлення схованих закономірностей, передбачення нових ефектів.

Література

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: В 3 т / М. О. Давидов. – К.: Вища школа, 1994. – Т.3. – 390 с.
2. Мясников Б.М. Навчальні допоміжні матеріали з фізики / Б. М. Мясников. – К.: Знання, 1985. – 347 с.
3. Олійник О. А. Роль теорії диференціальних рівнянь в сучасній математиці і її додатках / О. А. Олійник. – М.: МГУ, 1996. – 432 с.
4. Половинкина Ю. С. Додатки диференціальних рівнянь / Ю. С. Половинкина. – М. Наука, 2007 – 128 с.

***Анотація.** Лазуткіна Ю.С. Прикладне застосування методу диференціальних рівнянь У статті показано застосування математичного апарату диференціальних рівнянь у сучасних технологіях, зокрема в біологічних моделях і задачі про поглинання світла. Розглянуто приклад розв'язання задачі про поглинання світла за конкретними даними*

***Ключові слова:** диференціальні рівняння, моделювання*

***Аннотация.** Лазуткина Ю.С. Прикладное использование метода дифференциальных уравнений. В статье показано применение математического аппарата дифференциальных уравнений в современных технологиях, в частности в биологических моделях и задачи о поглощении света. Рассмотрен пример решения задачи о поглощении света при конкретных данных*

***Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, моделирование.*

***Summary.** Lazutkina Julia. Applications of the method differential equations. This paper demonstrates the use of mathematical tools of differential equations in modern technologies, particularly in biological models and the problem of light absorption. An example of solving the problem of light absorption by specific data*

***Keywords:** differential equations, modeling.*

УДК 37:013

Ю.М. Новак

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

БАНАХОВІ ПРОСТОРИ

Постановка проблеми. Однією з найважливіших операцій аналізу є граничний перехід. В основі даної операції лежить той факт, що на числовій прямій визначена відстань від однієї точки до іншої. Більшість фундаментальних понять математичного аналізу не пов'язані з природою дійсних чисел, а спираються лише на означення відстані. Узагальнюючи уявлення про дійсні числа як про множину, на якій введено відстань між елементами, вводять поняття метричного простору – одного з найважливіших понять сучасної математики.