придерживаться определенного алгоритма решения задач, а находить именно тот метод, который целесообразно использовать в ходе решения той или иной задачи.

***Ключевые слова**: стереометрия, задачи на доказательство.*

***Summary**. Zalavskaya A.S. Tasks for the proof in solid geometry. The article says that the main attention to the teaching of mathematics is paid to the tasks, because their decisions are the foundation of teaching and learning activities, during which pupils master the skills and abilities of mathematical activity. The article describes the main methods of solving problems on the proofs in solid geometry, and concluded that the pupils do not have to stick to a particular algorithm for solving problems and finding exactly the method that should be used in the course of solving a particular problem.*

***Keywords**: geometry, problems on the proof.*

УДК 514.116.2

Н.М. Кожушко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ДОВЕДЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

В умовах реформування системи освіти, виходу вітчизняної науки і техніки, виробництва і економіки на світовий рівень, інтеграції в світову систему освіти і конкуренції продукції, у тому числі й інтелектуальної, актуальним стає забезпечення високого рівня математичної підготовки молоді. Математика має великі можливості для інтелектуального розвитку особистості, у першу чергу – логічного мислення, просторових уявлень та уяви, формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, та ін. У курсі алгебри і початків аналізу розвиваються основні лінії курсу алгебри і завершується розробка аналітичного апарату.

Тригонометрія одна із самих складних тем у шкільному курсі математики.

На даний час вивченню тригонометричних функцій приділяється велика увага в шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Тому їх вивченню слід приділити пильну увагу.

В минулому тригонометрія виникла у зв'язку з потребами астрономії, будівельної справи, тобто носила чисто геометричний характер і представляла собою «числення хорд». З часом в неї почали вкрапляться деякі аналітичні моменти. У першій половині 18-го століття відбувся різкий перелом, після чого тригонометрія прийняла новий напрямок і змістилася у бік математичного аналізу. Саме в цей час тригонометричні залежності стали розглядатися як функції.

Перш ніж знайомити учнів з даною темою необхідно ознайомитися з основними цілями вивчення тригонометричних функцій числового аргументу є:

1) ознайомлення учнів з новим типом трансцендентних функцій;

2) розвиток навичок обчислювальної практики (робота з трансцендентними функціями часто вимагає громіздких обчислень);

3) наочна ілюстрація всіх основних властивостей функцій (особливо періодичності);

4) встановлення міжпредметних зв'язків з практикою (вивчення коливань маятника, електричного струму неможливі без знань про тригонометричні функції);

5) розвиток логічного мислення (велика кількість формул породжує необхідність перетворень не алгебраїчного характеру, які носять дослідницький характер)[2].

У вивченні тригонометричних функцій можна виділити наступні етапи:

I. Перше знайомство з тригонометричними функціями кутового аргументу в геометрії. Значення аргументу розглядається в проміжку $(0^0; 90^0)$. На цьому етапі учні дізнаються, що sinφ, cosφ, tgφ і ctgφ кута залежать від його градусної міри, знайомляться з табличними значеннями, основним тригонометричним тотожністю і деякими формулами приведення.

II. Узагальнення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенс для кутів $(0^0 ; 180^0)$.

III. Введення понять тригонометричних функцій числового аргументу.

IV. Систематизація і розширення знань про тригонометричні функції числа, розгляд графіків функцій, проведення дослідження, в тому числі і за допомогою похідної.

Паралельно з тригонометричними функціями учнів потрібно знайомити з тригонометричними рівняннями і нерівностями.

Тригонометричні рівняння виникають при рішенні задач по планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики й в інших областях, а нерівності рік у рік зустрічаються серед завдань шкільного тестування.

Найважливіша відмінність тригонометричних рівнянь від алгебраїчних полягає в тому, що в рівняннях алгебри кінцеве число коренів, а в тригонометричних – не скінченне, що сильно ускладнює відбір коренів. Ще однією специфікою тригонометричних рівнянь і нерівностей є неєдина форма запису відповіді. Розв'язуючи і доводячи тригонометричні нерівності, учні закріплюють свої знання про властивості тригонометричних функцій, набувають навичок теоретико-множинних та логічних міркувань.

Зараз продемонструємо декілька методів їх доведення.

При доведенні тригонометричних нерівностей часто використовуються ті ж прийоми, що і при доведенні алгебраїчних нерівностей [1,218].

<u>1. Доведення нерівності за допомогою означення.</u>

Приклад. Доведемо, що якщо A, B, C – кути трикутника, то $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Доведення. Виконаємо деякі перетворення лівої частини нерівності. Маємо: $\cos A + \cos B + \cos C \le 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$.

Так як за умовою A + B + C = 180^0, то $\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$ і, отже

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos(90^0 - \frac{C}{2}) = \sin\frac{C}{2}.$$

Так як $0 \le \cos\frac{A-B}{2} \le 1$, то $\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le \sin\frac{C}{2}$.

Таки чином, $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C \le 2\sin\frac{C}{2} + \cos C$.

Розглянемо вираз $2\sin\frac{C}{2} + \cos C$. Маємо:

$$2\sin\frac{C}{2} + \cos C = 2\sin\frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}.$$

Покладемо $x = \sin\frac{C}{2}$. Тоді

$$2\sin\frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = -2x^2 + 2x + 1.$$

Якщо ми тепер доведемо що $-2x^2 + 2x + 1 \le \frac{3}{2}$, при вказаних обмеженнях на x, то тим самим ми доведемо і нерівність $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$. Складемо різницю $(-2x^2 + 2x + 1) - \frac{3}{2}$ і з`ясуємо її знак. Отримаємо

$$(-2x^2 + 2x + 1) - \frac{3}{2} =$$

$$= -2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) = -2\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0.$$

Таким чином, $-2x^2 + 2x + 1 \le \frac{3}{2}$, тобто нерівність $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ доведена.

2. Синтетичний метод доведення нерівностей.

Суть цього методу полягає у тому, що за допомогою ряду перетворень доказувана нерівність виводять з деяких відомих(базових) нерівностей. В якості базових часто використовуються наступні нерівності:

$|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ де $1 < x < \frac{\pi}{2}$.

Іноді в якості базових використовують нерівності, що випливають з монотонності тригонометричних функцій. Так на інтервалі ($0; \frac{\pi}{2}$) функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{tg} x$ зростають, а функції $y = \cos x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ спадають. Тому якщо $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то

$\sin x_1 < \sin x_2$, $\cos x_1 > \cos x_2$, $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, $\operatorname{ctg} x_1 > \operatorname{ctg} x_2$. Аналогічні нерівності можуть бути отримані для для інших проміжків монотонності тригонометричних функцій.

Приклад. Доведемо нерівність $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} > \sin\alpha$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Виберемо в якості базової нерівності $\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Послідовно перетворюючи її отримаємо: $\alpha\cos\frac{\alpha}{2} < 2\sin\frac{\alpha}{2}$, $\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2} < 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} < \sin\alpha$, $\alpha\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) < \sin\alpha$.

Скористуємося ще однією базовою нерівністю $\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$.

Так як за умовою $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$ і $\frac{\alpha}{2} < 0$, тому нерівність $\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$ можна перетворити і отримати в результаті наступну нерівність: $\sin^2\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{4}$ і далі $1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} > 1 - \frac{\alpha^2}{4}$, звідки $\alpha\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) > \alpha - \frac{\alpha^3}{4}$, або $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \alpha\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

Порівнюючи нерівності $\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)<\sin\alpha$ та $\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ отримаємо $\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)<\sin\alpha$, звідки $\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha$, що і потрібно було довести.

3. Доведення нерівностей методом від супротивного.

Приклад. Доведемо нерівність

$$\cos\alpha+3\cos3\alpha+6\cos6\alpha\geq-7\frac{3}{16}.$$

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що для деякого α виконується нерівність

$$\cos\alpha+3\cos3\alpha+6\cos6\alpha<-7\frac{3}{16}.$$

Перетворюючи цю нерівність, отримаємо:

$$\cos\alpha+3\cos3\alpha+6\cos6\alpha+6<-1\frac{3}{16},$$

$$\cos\alpha+3\cos3\alpha+12\cos^2 3\alpha<-1\frac{3}{16},$$

$$\cos\alpha+3(\cos3\alpha+4\cos^2 3\alpha)<-1\frac{3}{16},$$

$$3(4\cos^2 3\alpha+\cos3\alpha+\frac{1}{16})+\cos\alpha-\frac{3}{16}<-1\frac{3}{16},$$

$$3(2\cos3\alpha+\frac{1}{4})^2+\cos\alpha<-1.$$

Остання нерівність хибна, оскільки $(2\cos3\alpha+\frac{1}{4})^2\geq0$, а $\cos\alpha\geq-1$. Отже наше припущення невірне, тобто доведено нерівність $\cos\alpha+3\cos3\alpha+6\cos6\alpha\geq-7\frac{3}{16}$.

4. Доведення нерівності методом математичної індукції.

Слово «індукція» в перекладі означає «приведення», а індуктивними називаються висновки, зроблені на основі спостережень і дослідів, тобто здобуті шляхом розглядання окремих випадків і розповсюдження помічених закономірностей на загальний випадок. Метод математичної індукції – це особливий метод міркувань. Його суть така: нехай необхідно довести справедливість деякого твердження для будь-якого натурального числа n. Безпосередня перевірка цього твердження для кожного значення n неможлива, оскільки множина натуральних чисел нескінченна. Щоб довести твердження, перевіряють спочатку його справедливість для n=1. Якщо при n=1 твердження правильне, приймаємо його правильність при n = k, де k∈ N і доводимо, що воно правильне при n = k +1, а потім робимо висновок про правильність твердження і при всіх натуральних значеннях n.

У деяких випадках необхідно довести справедливість твердження не для всіх натуральних чисел, а лише для n ≥ p, де p – фіксоване натуральне число. У цьому випадку принцип математичної індукції формулюється так: якщо твердження правильне при n p = і з його правильності при n = k, де k > p, випливає, що воно правильне й при n = k +1, то твердження правильне і для будь-якого n ≥ p.

Приклад: Доведемо нерівність $\operatorname{tg} n\alpha>n\operatorname{tg}\alpha$

Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, $n -$ натуральне число $n \neq 1$.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1) Перевіримо виконання нерівності при $n = 2$, тобто переконаємося, що $\mathrm{tg}\,2\alpha > 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Дійсно $\mathrm{tg}\,2\alpha$ - $2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

При $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ маємо $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$, $1 - \mathrm{tg}^2\alpha > 0$, а отже $2\,\mathrm{tg}\,\alpha \dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} > 0$.

Звідси і випливає що нерівність $\mathrm{tg}\,2\alpha > 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$ виконується.

2) Припустимо, що нерівність $\mathrm{tg}\,n\alpha > n\,\mathrm{tg}\,\alpha$ виконується при $n = k$, тобто $\mathrm{tg}\,k\alpha > k\,\mathrm{tg}\,\alpha$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k-1)}$.

3) Доведемо, що тоді нерівність $\mathrm{tg}\,n\alpha > n\,\mathrm{tg}\,\alpha$ виконується при $n = k+1$, тобто $\mathrm{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$. Дійсно,

$$\mathrm{tg}(k+1)\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,k\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,k\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha} > \frac{k\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,k\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

За умовою $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$, отже, $\mathrm{tg}\,k\alpha > \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ і $\mathrm{tg}\,\alpha < 1$. Але тоді $\frac{k\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,k\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha} > (k+1)\,\mathrm{tg}\,\alpha$ і як результат, нерівність $\mathrm{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\,\mathrm{tg}\,\alpha$ виконується.

За принципом математичної індукції робимо висновок, що нерівність $\mathrm{tg}\,n\alpha > n\,\mathrm{tg}\,\alpha$ правильна для будь-яких натуральних $n \geq 2$.

Таким чином доведення тригонометричних нерівностей є важливим етапом при вивченні матеріалу пов'язаного з тригонометричними функціями, хоча саме в шкільному курсі дана тема не вивчається.

Література

1. Литвиненко В.Н. Практика по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
2. Слєпкань М.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

Анотація. *Кожушко Н.М. Доведення тригонометричних нерівностей. У статті стисло висвітлено коротку історію тригонометрії, та основних її понять. Наведено основні цілі та етапи вивчення тригонометричних функцій. Виявлено основні методи доведення тригонометричних нерівностей та розглянуті приклади.*

Ключові слова: *функція, тригонометрія, рівняння, нерівність, доведення.*

Аннотация. *Кожушко Н.М. Доказательство тригонометрических неравенств. В статье кратко освещена короткая история тригонометрии, и основных ее понятий. Приведены основные цели и этапы изучения тригонометрических функций. Выявлены основные методы доказательства тригонометрических неравенств и рассмотрены примеры.*

Ключевые слова: *функция, тригонометрия, уравнения, неравенство, доказательство.*

Abstract. *Kozhushko N.The Proof of trigonometric inequalities. The article deals with a short history of trigonometry and its basic concepts. The main objects and stages of studying of trigonometric functions are in the focus of author's attention. It also sheds light on the basic methods of proving trigonometric inequalities and some examples are introduced.*

Key words: *function, a trigonometry, an equation, an inequality, a proof.*

УДК 371.315.6:51

Ю.В. Козолуп

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ» В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ (З СЕРЕДИНИ ХХ СТ. ДО СЬОГОДЕННЯ)

В умовах сучасного суспільства метою навчання математики є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

Під час вивчення курсу математики в школі, як і під час будівництва якоїсь споруди, важливий міцний фундамент, адже інакше споруда не буде стійкою. Вивчення різних перетворень виразів і формул займає значну частину навчального часу шкільної математики. Найпростіші навички проведення перетвореннь, які спираються на властивості арифметичних операцій, виробляються вже у початковій школі. У початкових класах учні ознайомлюються з поняттям числового виразу та виразом, що містить буквений компонент, вчаться знаходити числові значення таких виразів, застосовують буквені вирази для запису властивостей арифметичних дій.

У курсі алгебри постає завдання – на основі вже здобутих знань і умінь систематизувати, поглибити і розширити знання, навички й уміння учнів про вирази та їх перетворення, навчити цілеспрямовано використовувати їх під час виконання різних навчальних задач (спрощення виразів, розв'язування рівнянь нерівностей, доведення тотожностей та ін.).

Програма передбачає в 7 класі повторити й уточнити відомості про числові та буквені вирази, ввести поняття про тотожно рівні вирази, тотожність, тотожні перетворення виразів, вирази зі степенями та їх властивості. У цьому класі вивчають тотожні перетворення цілих виразів (одночленів і многочленів), винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, формули скороченого множення та застосування їх до перетворення многочленів, застосування різних способів розкладання многочленів на множники.

У 8 класі вивчення тотожних перетворень раціональних виразів та дробів, дробових виразів і перетворень ірраціональних виразів, пов'язаних з квадратним коренем. Розширюється поняття степеня. Зокрема, вводять поняття степеня з цілим