Ключевые слова: *иррациональные неравенства, основные методы решения иррациональных неравенств.*

Abstract. *Veremeyenko M.O. Irratsionalni algebraic inequalities. The article briefly highlights the short history of irregularities, and its basic concepts. The main objectives and stages of studying irrational inequalities. The basic methods for solving inequalities irrational and look at examples.*

Keywords: *irrational inequality, basic methods for solving inequalities irrational.*

УДК 514.113

А.С. Залавська

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ЗАДАЧІ НА ДОВЕДЕННЯ В СТЕРЕОМЕТРІЇ

Стереометрія, як і планіметрія, виникла і розвивалася у зв'язку з потребами практичної діяльності людини. Про зародження геометрії в Стародавньому Єгипті близько 2000 років до н.е. писав давньогрецький вчений Геродот (V століття до н.е.).

Геометрія як теоретична наука виникла в Стародавній Греції, багато сучасних геометричних термінів мають давні походження. Праці давньогрецьких математиків зіграли винятково важливу роль у розвитку науки взагалі і геометрії зокрема. Вони стали надбанням загальної культури людства.

Головна увага у викладанні математики приділяється задачам, оскільки їх розв’язування є основним видом навчально-пізнавальної діяльності, у процесі якої школярі опановують вміннями та навичками математичної діяльності.

Тому вивчення проблеми доведення задач по стереометрії, за зображеними просторовими геометричними фігурами, є досить актуальною і необхідною для розвитку образного мислення школярів.

Проблема навчання школярів вмінню розв’язувати задачі на доведення в стереометрії неодноразово ставилася в психології та педагогіці. Однак, в психолого-педагогічній літературі немає поки єдиної термінології з названої проблеми, немає і єдиної точки зору на те, чому і як навчати учнів, щоб вони могли вирішувати завдання середнього та високого рівня, не за зразком, показаним вчителем, а прийти до розв’язання задачі самостійно.

Ще однією проблемою є те, що задачі на доведення в стереометрії не мають єдиної схеми розв’язування, тому і викликають труднощі в учнів.

Наприкінці 9 класу учні починають знайомитися з геометрією в просторі. В 10-х, 11-х класах учні вже поглиблюють свої знання новим матеріалом.

Актуальність даної статті обумовлена тим, що підвищення якості навчання математики, зокрема геометрії, означає пошук шляхів ефективного управління пізнавальною діяльністю учнів і виявлення таких педагогічних умов, які забезпечували б активну творчу роботу мислення школярів, нижче розглянуто декілька основних методів розв’язування задач.

Для розв'язання задач на доведення найчастіше застосовується *геометричний метод*, використовуються теореми планіметрії та стереометрії. При цьому часто доводиться виконувати різні додаткові побудови. У деяких випадках крім зображення просторової фігури слід зробити рисунок розгортки поверхні тіла або проекцію на деяку площину.

Необхідно звертати увагу на початковий етап розв'язання кожної задачі – аналіз, коли планується хід розв'язання, причому нерідко правильний шлях знаходиться не відразу, а після низки невдалих спроб. Виконавши креслення, слід уважно встановити зв'язки між даними і невідомими елементами фігури і спробувати пов'язати їх.

Розглянемо розв'язання задач на конкретних прикладах та методи, за допомогою яких вони розв'язуються [1, 14-16, 35-36].

Приклад 1. Дано тетраедр *ABCD*, всі плоскі кути при вершині *D* – прямі, а ребро *CD* дорівнює сумі ребер *AD* і *BD*. Довести, що сума усіх плоских кутів при вершині *C* рівна 90°.

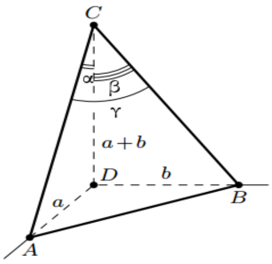

Рис. 1. Тетраедр

Доведення. Нехай *ABCD* — даний тетраедр (рис. 1), $AD = a$, $BD = b$, $AC = m$, $BC = n$, $\angle ACD = \alpha, \angle BCD = \beta$ та $\angle ACD = \gamma$. Оскільки $AD < CD$ і $BD < CD$, то кожний з кутів α і β менше 45° і $0° < \alpha + \beta < 90^\circ$. Отже і $0° < \gamma < 90^\circ$.

Доведемо, що що $\sin(\alpha + \beta) = cos\gamma$.

Так як $sin\alpha = \frac{a}{m}$, $sin\beta = \frac{b}{n}$, $cos\alpha = \frac{a+b}{m}$, $cos\beta = \frac{a+b}{n}$, то $\sin(\alpha + \beta) = \frac{a(a+b)}{mn} + \frac{b(a+b)}{mn} = \frac{(a+b)^2}{mn}$.

З трикутника *ABC*, де $AB^2 = a^2 + b^2$, по теоремі косинусів знаходимо:

$$cos\gamma = \frac{m^2 + n^2 - (a^2 + b^2)}{2mn}.$$

Трикутники *ACD і BCD* прямокутні, тому

$$m^2 + n^2 = a^2 + (a+b)^2 + b^2 + (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(a+b)^2.$$

Отже, $cos\gamma = \frac{(a^2+b^2)}{mn}$.

Таким чином, $\sin(\alpha + \beta) = cos\gamma$, або $\sin(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - \gamma)$. Звідки, враховуючи допустимі значення кутів, отримаємо: $\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$, або $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Що й треба було довести.

Дана задача розв'язується **аналітичним** методом, розглянемо розв'язання цієї ж задачі іншим методом – **геометричним**.

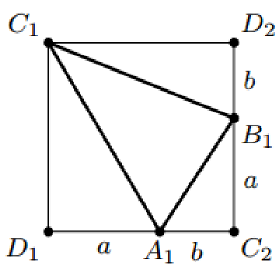

Рис. 2. Розгортка бічної поверхні тетраедра

Приклад 2. Дано тетраедр *ABCD*, всі плоскі кути при вершині *D* – прямі, а ребро *CD* дорівнює сумі ребер *AD* і *BD*. Довести, що сума усіх плоских кутів при вершині *C* рівна 90◦.

Доведення. Назвемо грань *ABD* тетраедра – основою тетраедра *ABCD*, а всі інші – бічними гранями. Зробимо розгортку бічної поверхні, розрізавши тетраедр по ребрам *AD*, *BD і CD*. Покажемо, що ця розгортка – це п'ятикутник $A_1D_1C_1D_2B_1$ з прямим кутом C_1 (рис.2).

Побудуємо квадрат $C_1D_1C_2D_2$ зі стороною $a + b$. На сторонах D_1C_2 і C_2D_2 відкладемо відрізки D_1A_1 і C_2B_1, рівні a. Тоді $A_1C_2 = B_1D_2 = A_1B_1$. Тому трикутники *ABC* *і* $A_1B_1C_1$ також рівні. Таким чином, п'ятикутник $A_1D_1C_1D_2B_1$ – це розгортка бічної поверхні тетраедра *ABCD*. Звідси випливає, що сума плоских кутів тетраедра при вершині *C* рівна куту $D_1C_1D_2$ квадрата, тобто рівна 90°.

Якщо співставити розв'язання цієї задачі аналітичним та геометричним способами, то відразу ж можна помітити, що в першому випадку відсутні допоміжні побудови, тоді як при розв'язуванні задачі геометричним методом основна трудність полягає у тому, що треба здогадатися використати розгортку поверхні тетраедра та виконати допоміжні побудови.

Отже, одним з основних методів розв'язування задач на доведення в стереометрії можна вважати аналітичний метод, який має два різновиди: **метод поетапного розв'язання** і **метод складання рівнянь**. Іншим важливим методом є геометричний, до якого відносять і **метод геометричних перетворень.** При розв'язуванні конкретної завдання часто користуються і тим, і іншим методами. Наприклад, спочатку доводять доводять, що дана фігура має певну властивість, а потім роблять обчислення, користуючись вже відомими формулами або методом складання рівнянь. У такому випадку можна говорити про розв'язання задачі **комбінованим методом**.

При розв'язуванні геометричних задач, крім традиційних методів з використанням алгебри і тригонометрії, можуть застосовуватися й інші методи, зокрема, **векторний**.

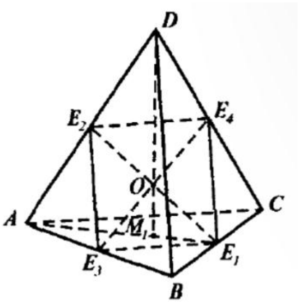

Рис. 3. Тетраедр

Приклад 3. Довести, що медіани тетраедра перетинаються в одній точці і діляться нею як 3:1, починаючи від вершини (рис.3).

Доведення:

Нехай E_1, E_2, E_3, E_4 – середини ребер BC, AD, AB і DC. Точка O - середина відрізку E_1E_2; E_2E_3 - середня лінія грані ABD. Точка M_1 - точка перетину медіан основи. $E_1E_2 = \frac{1}{2}DB$.

Аналогічно

$E_1E_4 = \frac{1}{2}DB \Rightarrow \overrightarrow{E_4O} = \overrightarrow{E_4E_1} + \overrightarrow{E_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{E_1O}, \overrightarrow{OE_3} = \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{E_2E_3} = \overrightarrow{OE_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$

Але за умовою $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{E_1O}$, тому $\overrightarrow{E_4O} = \overrightarrow{OE_1}$, тобто т.$O$ - середина відрізка E_3E_4.

$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DE_2} + \overrightarrow{E_2O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E_2E_1};$

$\overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE_1};$

$\overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE_1}.$

Додамо ці дві рівності та отримаємо:

$\overrightarrow{E_2D} + \overrightarrow{E_2A} = 0;\ \overrightarrow{E_1C} + \overrightarrow{E_1B} = 0$ – за умовою задачі.

Отримаємо:

$$2\overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2D} + \overrightarrow{E_2A} + \overrightarrow{CE_1} + \overrightarrow{BE_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{E_2E_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right). \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E_2E_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$DM_1 = DA + AM_1 = DA + \frac{2}{3}AE_1 = DA + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(AB + AC) = DA + \frac{1}{3}\big((DB - DA) + (DC - DA)\big) = DA + \frac{1}{3}(DB + DC - 2DA) = \frac{1}{3}DB + \frac{1}{3}DC + \frac{1}{3}DA = \frac{1}{3}(DB + DC + DA); DB + DC + DA = 3DM_1. \quad \textbf{(2)}$$

Підставимо (2) в (1):

$DO = \frac{3}{4}DM,$ отже $OM_1 = \frac{1}{4}DM,$ $\frac{DO}{DM_1} = \frac{3}{1}.$ Отже, т.O лежить на відрізку DM_1 і ділить його у відношенні 3:1, починаючи від вершини. Повторивши міркування й для інших пар суміжних граней можна довести це для інших медіант тетраедра. А значить, всі медіани тетраедра перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 3:1, починаючи від вершини. Доведено.

Деякі задачі зручно розв'язувати за допомогою **методу координат**. Це насамперед задачі, в яких мова йде про куб, прямокутний паралелепіпед або тетраедр з прямим тригранним кутом. Прямокутна система координат у просторі зв'язується з цими многогранниками, при цьому серед координат їх вершин багато нулів, що спрощує обчислення.

Пошук вірної відповіді – найважливіший компонент творчого мислення школярів. Керуючий вплив вчителя спонукає учнів чинити тільки так, а не інакше, що позбавляє їх ініціативи, гальмує розвиток умінь здійснювати пошук не на основі прикладів вже розв’язаних задач.

Література

1. Готман Э.Г. Стереометрические задачи и их решения / Готман Э.Г. – М.: Издательство МЦНМО, 2006. – 160 с.

Анотація. *Залавська А.С. Задачі на доведення в стереометрії. У статті йдеться мова про те, що головна увага у викладанні математики приділяється задачам, оскільки їх розв’язування є основним видом навчально-пізнавальної діяльності, у процесі якої школярі опановують вміннями та навичками математичної діяльності. У статті розглянуті основні методи розв’язування задач на доведення у стереометрії, та зроблено висновок, що учні не повинні дотримуватися певного алгоритму розв’язування задач, а знаходити саме той метод, який доцільно використати в ході вирішення тієї чи іншої задачі.*

Ключові слова: *стереометрія, задачі на доведення.*

Аннотация. *Залавская А.С. Задачи на доказательство в стереометри. В статье идет речь о том, что главное внимание в преподавании математики уделяется задачам, поскольку их решения является основным видом учебно-познавательной деятельности, в процессе которой школьники овладевают умениями и навыками математической деятельности. В статье рассмотрены основные методы решения задач на доказательство в стереометрии, и сделан вывод, что ученики не должны* *придерживаться определенного алгоритма решения задач, а находить именно тот метод, который целесообразно использовать в ходе решения той или иной задачи.*

***Ключевые слова**: стереометрия, задачи на доказательство.*

***Summary**. Zalavskaya A.S. Tasks for the proof in solid geometry. The article says that the main attention to the teaching of mathematics is paid to the tasks, because their decisions are the foundation of teaching and learning activities, during which pupils master the skills and abilities of mathematical activity. The article describes the main methods of solving problems on the proofs in solid geometry, and concluded that the pupils do not have to stick to a particular algorithm for solving problems and finding exactly the method that should be used in the course of solving a particular problem.*

***Keywords**: geometry, problems on the proof.*

УДК 514.116.2

Н.М. Кожушко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ДОВЕДЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

В умовах реформування системи освіти, виходу вітчизняної науки і техніки, виробництва і економіки на світовий рівень, інтеграції в світову систему освіти і конкуренції продукції, у тому числі й інтелектуальної, актуальним стає забезпечення високого рівня математичної підготовки молоді. Математика має великі можливості для інтелектуального розвитку особистості, у першу чергу – логічного мислення, просторових уявлень та уяви, формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, та ін. У курсі алгебри і початків аналізу розвиваються основні лінії курсу алгебри і завершується розробка аналітичного апарату.

Тригонометрія одна із самих складних тем у шкільному курсі математики.

На даний час вивченню тригонометричних функцій приділяється велика увага в шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Тому їх вивченню слід приділити пильну увагу.

В минулому тригонометрія виникла у зв'язку з потребами астрономії, будівельної справи, тобто носила чисто геометричний характер і представляла собою «числення хорд». З часом в неї почали вкрапляться деякі аналітичні моменти. У першій половині 18-го століття відбувся різкий перелом, після чого тригонометрія прийняла новий напрямок і змістилася у бік математичного аналізу. Саме в цей час тригонометричні залежності стали розглядатися як функції.

Перш ніж знайомити учнів з даною темою необхідно ознайомитися з основними цілями вивчення тригонометричних функцій числового аргументу є:

1) ознайомлення учнів з новим типом трансцендентних функцій;

2) розвиток навичок обчислювальної практики (робота з трансцендентними функціями часто вимагає громіздких обчислень);

3) наочна ілюстрація всіх основних властивостей функцій (особливо періодичності);