

знань, стійких до збереження в пам'яті, сприятиме розвитку просторових уявлень та уяви учнів.

Список використаних джерел

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. Для студентів матем. Спеціальностей пед. Вузів. / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512с.
2. Погорелов А.В. Геометрія: Підруч. Для 10-11 класів./ А.В. Погорелов. – К.: Просвіта, 2009. – 175с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник./ Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367с.

Анотація. Чижикова Ю. Вивчення теми «Многогранники» у старшій профільній школі.

У роботі розглядається вивчення теми «Многогранники» у старшій профільній школі, зокрема одного з виду многогранників – піраміди.

Ключові слова: старша профільна школа, многогранники, піраміда.

Abstract. Chizhikova Y. Study of the theme "Polyhedra" in high profile school.

This paper examines the topic "Polyhedra" in high profile school, particularly one of the type of polyhedra of the pyramid.

Keywords: high-profile school, polyhedra, pyramid.

Світлана Шевченко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

sheva-sveta93@mail.ru

Науковий керівник – В.Ф. Власенко

ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАМЕНИТИХ ФУНКЦІЙ ДО ПОБУДОВИ КОНТРПРИКЛАДІВ

Поняття «контрприклад» широко використовується у наукових дослідженнях, математичних припущеннях, визначенні коректності означення та істинності твердження, доведенні теорем. Контрприкладом називають приклад, які спростовують ті чи інші твердження. Відмінність між прикладами та контрприкладом полягає в тому, що приклади підтверджують загальні положення, а контрприклад ілюструють хибність і вважаються класичним засобом заперечення гіпотези [1, с. 11].

Розвиток математики та побудова контрприкладів привели до необхідності перебудови та уточнення деяких положень математичних теорій, однією з них була теорія функцій.

Як відомо, існує багато різноманітних функцій. Вони являються основним об'єктом дослідження в математичному аналізі. Проте є функції, які мають спеціальні методи дослідження, а їх специфічні властивості використовуються у контрприкладах. За останні півтора століття вони були побудовані. До них можна віднести такі визначні функції: функцію Діріхле $D(x)$, функцію Рімана $R(x)$, функцію Вейєрштрасса $V(x)$, дельта-функція Дірака $\delta(x)$ та гама-функція Ейлера $\Gamma(a)$. Розглянемо застосування даних функцій до побудови контрприкладів.

Приклад 1. Всюди розривна функція, абсолютне значення якої є всюди неперервною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне,} \\ -1, \text{ якщо } x - \text{іраціональне,} \end{cases} |f(x)| \equiv 1, x \in R.$$

Приклад 2. $\sin D(x) = \begin{cases} \sin 1, \text{ якщо } x \in Q, \\ 0, \text{ якщо } x \in I. \end{cases}$

Приклад 3. $[D(x)] = D(x)$, $\{D(x)\} \equiv 0$, де $[x]$ – ціла частина x , $\{x\}$ – дробова частина x .

Приклад 4. $y = ax^2 D(x)$, $a \neq 0$.

Розв’язання. Ця функція диференційовна в точці $x = 0$. Дійсно,

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x^2 D(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a\Delta x D(\Delta x) = 0.$$

Приклад 5. Функція

$$R_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ якщо } x = \frac{m}{n}, n \in N, m \in Z, (|m|, n) = 1, \\ 1, x = 0, \\ a, x \in I. \end{cases}$$

Розв’язання. $R_a(x)$ для $a \neq 0$ неінтегровна за Ріманом на кожному відрізку, оскільки вона розривна в кожній точці відрізка і міра множини її точок розриву більше нуля.

При $a = 0$ маємо $R_0(x) = R(x)$, $R_a(x)$ – всюди розривна, оскільки при x_0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in I \\ x \in Q}} f(x) = 0 \neq a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in I \\ x \in I}} f(x) = a.$$

Приклад 6. Чи існує функція, неперервна в кожній раціональній точці та розривна в кожній іраціональній точці прямої?

Розв’язання. Не існує, тому що множина точок розриву функції є множиною типу F_σ . А множина I іраціональних чисел не є множиною F_σ .

Приклад 7. Добуток $D(x) \cdot R(x) = R(x)$, $D(R(x)) \equiv 1$, $R(D(x)) \equiv 1$, де $D(x)$ – функція Діріхле, $R(x)$ – функція Рімана. Цей приклад цікавий тим, що суперпозиція всюди розривних функцій може бути неперервною.

Приклад 8. Приклад двох ніде не диференційованих функцій сума (різниця, добуток, частка) яких всюди диференційовна.

Розв’язання. $V(x)$ – функція Вейерштрасса (або Ван-дер-Вардена). Вона обмежена на R : $|V(x)| \leq M$. Візьмемо M_1 та M_2 так, щоб $f_1(x) = M_1 - V(x) > 0$, $f_2(x) = M_2 + V(x) < 0$, тоді $f_1(x) + f_2(x) = M_1 + M_2$.

Для різниці: $f_1(x) = M_1 + V(x)$, $f_2(x) = M_2 + V(x) \rightarrow f_1(x) - f_2(x) = M_1 - M_2$.

Для добутку: $f_1(x) = M_1 - V(x) > 0$, $f_2(x) = \frac{1}{M_1 - V(x)}$, тоді $f_1(x) \cdot f_2(x) = 1$.

Для частки: $f_1(x) = M_1 - V(x)$, $f_2(x) = C \cdot M_1 - C \cdot V(x)$, тоді $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{C}$.

Приклад 9. Функція $z = x + V(y)$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 1$ і не має частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Аналогічно функція $z = y + V(x)$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 1$ і не має $\frac{\partial z}{\partial x}$ в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Функція $z = V(x) + V(y)$ не має частинних похідних в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Очевидно, всі наведені три функції неперервні в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Приклад 10. Приклад функції $f(x)$, що має на R похідні до n -го порядку включно і не має похідної до $(n + 1)$ -го порядку на R .

$f_1(x) = \int V(x) dx, f_2(x) = \int f_1(x) dx, \dots, f_n(x) = \int f_{n-1}(x) dx$. Тоді $f_n'(x) = f_{n-1}(x), f_n''(x) = f_{n-1}'(x), \dots, f_n^{(n)}(x) = f_1'(x) = V(x)$. Отже, $f_n^{(n+1)}(x)$ не існує для $\forall x \in R$.

Приклад 11. Приклад монотонної диференційованої функції, похідна якої ніде не монотонна на R .

$V(x)$ – функція Вейерштрасса. Візьмемо $M > 0$ таке, що $V(x) + M > 0$ для $\forall x \in R$. Тоді

$$\varphi(x) = \int_0^x (V(x) + M) dx$$

строго зростає на R , оскільки $\varphi'(x) = V(x) + M > 0$, а $V(x) + M$ ніде не монотонна на R .

Приклад 12 [2]. Знайти інтеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} dx \quad (p, q, m > 0).$$

Зробимо підстановку $x^m = y$, виразимо x : $x = \sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}, dx = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} dy$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} dx &= \int_0^1 y^{\frac{p-1}{m}} \cdot (1-y)^{q-1} \cdot \frac{1}{m} \cdot y^{\frac{1}{m}-1} dy = \frac{1}{m} \cdot \\ &\cdot \int_0^1 y^{\frac{p-1}{m} + \frac{1}{m} - 1} \cdot (1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{m} \cdot \int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1} \cdot (1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{m} \cdot B\left(\frac{p}{m}; q\right). \end{aligned}$$

Приклад 13 [2]. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi, \quad (a, b > 0).$$

Поклавши $x = \sin \varphi$, зведемо даний інтеграл до інтеграла

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1} dx,$$

використовуючи приклад 4.2.1., будемо мати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Приклад 14 [2]. Знайти інтеграл

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx \quad (m, n > 0)$$

Перетворимо підінтегральний вираз:

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} &= \frac{(1+x)^{2m-1}}{(1+x^2)^m} \cdot \frac{(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^n} = \left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \\ &\cdot \frac{1+x}{1+x^2} \cdot \left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot 2^{m-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^{n-1} \cdot 2^{m+n-2} \cdot \\ &\cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1-2x+x^2}{2 \cdot (1+x^2)}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot \\ &\cdot 2^{m+n-2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{2+2x^2-1-2x-x^2}{2 \cdot (1+x^2)}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot \\ &\cdot 2^{m+n-2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \left(1 - \frac{(1+x)^2}{2 \cdot (1+x^2)}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot 2^{m+n-2}. \end{aligned}$$

Використаємо

підстановку

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2},$$

$$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(1+x)(1+x^2) - (1+x)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{(1+x)(1+x^2 - x^2 - x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} dx, \text{ тоді отримаємо:}$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} \cdot 2^{m+n-2} du = 2^{m+n-2} \cdot$$

$$\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} du = 2^{m+n-2} \cdot B(m; n).$$

Приклад 15. Знайти похідну функції

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Використаємо зв'язок похідної та інтеграла:

$$F(x) = \int_a^b y(x) dx, y(x) = \frac{dF}{dx}.$$

За означенням похідної

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\theta(0 + \Delta x) - \theta(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Таким чином, $\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$ (за означенням дельта-функції Дірака).

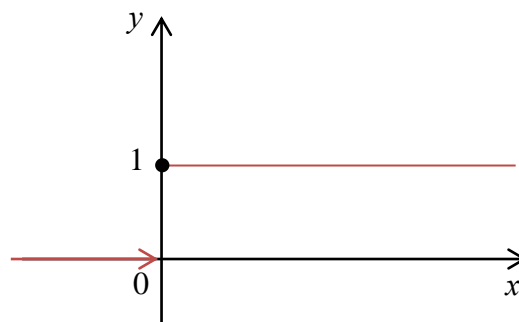


Рис. 1. Графік функції $\theta(x)$

Список використаних джерел

1. Мартиненко О. В. Контрприклад та розвиток поняття функції / О. В. Мартиненко, О. М. Бойко // Фізико-математична освіта: збірник наукових праць. – 2012. – № 1 (3). – 88 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – [3-е изд.]. – Т.2 – М. : Наука, 1951 – 800 с.

Анотація. Шевченко С. Застосування знаменитих функцій до побудови контрприкладів.

Вказується поняття «контрприкладу». Розглядається застосування функцій Діріхле, Рімана, Вейєрштрасса та дельта-функції Дірака до побудови контрприкладів. Наводяться приклади розв'язування інтегралів з параметрами за допомогою бета- та гама-функції Ейлера.

Ключові слова: функція, контрприклад, інтеграл.

Abstract. Shevchenko S. The use of well-known functions to build counterexamples.

Indicate the term "counterexample". The application features Dirichlet, Riemann, Weierstrass and Dirac's delta-function to build a counterexample. Examples of solving integrals with parameters using beta- and gamma-functions Euler.

Keywords: function, counterexample, integral.

Альона Шепель

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

alionashepel@inbox.ru

Науковий керівник – В.Д. Погребний

ДОВЕДЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Вивченню різновидів виразів і перетворенню їх відведено в курсі алгебри значну частину навчального часу. Це не дивно, оскільки перетворення виразів є основою для розв'язування рівнянь і нерівностей, доведення тотожностей, обчислення значень буквених виразів. Їх широко використовують у диференціальному й інтегральному численні.

Вивчення тотожних перетворень сприяє розвитку в учнів вміння мислити згорнутими структурами (використання тотожностей дозволяє представляти формули більш лаконічно, що надає можливості оперативної і зручніше виконувати розв'язання рівнянь, обчислювати значення виразу).

Важливими є три основні аспекти:

1) формування основних понять «вирази», «числові вирази», «вирази зі змінними», «тотожність», «тотожні перетворення»; учень має знати види виразів, способи перетворення певного виду виразів, розуміти з якою метою виконується те чи інше перетворення;

2) формування в учнів навичок виконувати тотожні перетворення і розуміння, які перетворення є тотожними, а які не є тотожними;

3) застосування тотожних перетворень у ході розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем, у ході обчислень значень величин, для побудови графіків функцій, для виконання доведень.