Анотація. Зубко В. Узагальнення і систематизація при вивченні функціональної лінії в шкільному курсі математики.

У статті обґрунтовано необхідність використання узагальнення та систематизації знань учнів. Розглянуто місце функціональної змістової лінії в державній підсумковій атестації в 9 класі та зовнішньому незалежному оцінюванні в 11 класі.

***Ключові слова:** узагальнення, систематизація, функція.*

Abstract. Zubco V. Generalization and systematization of the study functional lines in the school mathematics course.

In the article the need for generalization and systematization of knowledge of students. The place and the topic "Functions and their graphs" in the state final examination in grade 9 and external assessment in grade 11.

***Keywords:** aggregation, classification, function.*

Максим Каща

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Відомості про число складалися в математиці поступово в результаті тривалого розвитку, яке йшло під дією практичних і теоретичних потреб математики. Так в результаті сформувалось поняття натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних, алгебраїчних та трансцендентних чисел [4]. Але на дійсних числах, шлях розвитку систем чисел не зупинився. Необхідність розширення систем дійсних чисел виникла як наслідок неможливості розв´язання рівняння виду $x^2 + 1=0$ в системі дійсних чисел, адже дане рівняння не має дійсних коренів, тому потреба в знаходженні коренів даного рівняння призвела до виникнення комплексних чисел. А саме в 1545 році вийшла у світ книга Джироламо Кардано «Велике мистецтво» в якій було вперше введено комплексні числа, які позначалися як двовимірні числа, а Рафаель Бомбеллі у 1572 році розробив правила роботи з уявними одиницями [2]. На основі комплексних чисел виникла ціла теорія функцій комплексної змінної, яка має велике практичне застосування.

Тому, оскільки комплексні числа виявилися досить важливими і корисними для розвитку математики, виникли ідеї розвинути і узагальнити поняття числа. Так спочатку виникли триплети *a+bi+cj*, які ввів Уільм Гамільтон, а потім кватерніони, де на відміну від триплетів було додано ще одну змінну *k*, і отримали вигляд *a+bi+cj+dk.* Кватерніони виявилися розширенням комплексних чисел і стали однією із систем гіперкомплексних чисел [1]. Над кватерніонами також можна виконувати арифметичні операції додавання, віднімання, множення, а ділення виконується за допомогою рівнянь $q_2x = q_1$ і $Xq_2 = q_1$, кватерніони є системою з діленням. Для того щоб виконати множення над ними, У.Гамільтон вигадав спеціальну таблицю множення, в рядках і стовпчиках якої знаходяться уявні числа і їх добутки. В системі кватерніонів, як і в дійсних числах виконуються всі властивості відносно операцій додавання і множення, окрім комутативності відносно операції множення. Завдяки кватерніонам можливо описати обертання тривимірного і чотиривимірного евклідових просторів. Також розглядається норма кватерніона, і доводиться, що норма добутку кватерніонів дорівнює добутку норм. В роботі розглядається один з прикладів розв´язання рівняння

$x^2+1=0$ в системі кватерніонів. Де в результаті розв´язання було отримано відповідь про те, що в системі комплексних чисел рівняння має 2 розв´язки: *i* та *–i*, а в системі кватерніонів їх буде безліч, а ось наприклад в рівнянні $(x-5)^2=9$ коренів в системі кватерніонів чисел буде 2: 8 і 2.

Також наводяться інші підходи до визначення кватерніонів, таких як подання кватерніонів у формі пари комплексних чисел: довільний кватерніон $q = a + bi + cj + dk$ можна уявити, користуючись тим, що $ij = k$, в вигляді $q = (a + bi) + (c + di)\, j$ або $q = z_1 + z_2\, j$, де $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Нехай поряд з q заданий ще один кватерніон $r = w_1 + w_2\, j$. Перемноживши q і r, отримаємо

$$qr = (z_1 + z_2\, j)(w_1 + w_2\, j) = z_1 w_1 + z_1 (w_2\, j) + (z_2\, j)\, w_1 + (z_2\, j)\, (w_2\, j) = z_1 w_1 + \\ + z_1 w_2\, j + + j w_1 + z_2\, j w_2\, j \qquad (1)$$

Оскільки $ij = -ji$, то $(a + bi)\, j = j\, (a - bi)$, тобто $zj = j\bar{z}$. Крім того, легко перевірити, що будь-які два елементи z і w виду a + bi переставні: $zw = wz$. Виходячи з цих властивостей, можна переписати другі і треті доданки в правій частині (1) відповідно у вигляді $w_2 z_1\, j$ і $z_2 \bar{w}_1 j$, а замість четвертого доданка написати $z_2 \bar{w}_2 j^2$, або $- \bar{w}_2 z_2$. Звідси,

$$qr = (z_1 w_1 - \bar{w}_2 z_2) + (w_2 z_1 + z_2 \bar{w}_1)\, j. \qquad (2)$$

Звертаючись до подання кватерніона у вигляді $q = z_1 + z_2 j$, відзначимо один важливий момент. Оскільки $i^2 = -1$, то всі кватерніони $a + bi$, зокрема, z_1 і z_2, можна трактувати як комплексні числа. Значить, кватерніони можна визначити як вираз виду $z_1 + z_2\, j$ де z_1, z_2 - довільні комплексні числа, а j - деякий символ, причому закон множення таких виразів задається формулою (2) [2].

Також кватерніони дали поштовх багатьом дослідженням в галузі математики і фізики. Наприклад, завдяки кватерніонам виникла надзвичайно поширена область математики – векторна алгебра. Наприклад, якщо ввести в звичайному просторі прямокутну систему координат і позначити через *i ,j, k* вектори довжини 1, які виходять з початку координат і напрямлені вздовж координатних осей, то будь-яка сума виду: *bi + cj + dk,* де *b, c, d* – дійсні числа, буде представляти собою деякий вектор. Цей вектор йде із початку координат О в точку М з координатами *b, c, d.* Тоді повертаючись до кватерніонів, помітимо, що кожен кватерніон *q= a+bi+cj+dk* являє собою формальну суму дійсного числа *a* з вектором *bi + cj + dk.* Число *a* ми будемо називати числовою (або дійсною) частиною, а вираз *bi + cj + dk* – векторною (або уявною) частиною кватерніона *q.*

Розглянемо тепер 2 чисто векторних кватерніони $q_1=bi+cj+dk$ і $q_2=bi+cj+dk.$ Перемножуючи їх по правилу множення кватерніонів, будемо мати:

$$q_1q_2 = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + +(b_1c_2 - c_1b_2)k.$$

Випишемо окремо числову і векторну частини кватерніона q_1q_2.Числова частина: $q_1q_2 = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)$. Векторна частина:

$$q_1q_2 = (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k.$$

Далі можна розглянути скалярний добуток двох векторів:

$$(\overline{q_1 q_2}) = b_1b_2 + c_1c_2 + + d_1d_2$$

і векторний добуток: нехай $\overline{q_1} = b_1\bar{\imath} + c_1\bar{\jmath} + d_1\bar{k}, \overline{q_2} = b_2\bar{\imath} + c_2\bar{\jmath} + +d_2\bar{k}$,

$$\overline{q_1} \times \overline{q_2} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}\ \bar{\jmath}\ \bar{k} \\ b_1c_1d_1 \\ b_2c_2d_2 \end{vmatrix} = (c_1d_2-d_1c_2)\,\bar{\imath}+(d_1b_2-b_1b_2)\,\bar{\jmath}+(b_1c_2-c_1b_2)\,\bar{k}.$$

Але на цьому розвиток поняття числа, не завершився. Кватерніони, як можна помітити є подвоєнням системи комплексних чисел. В свою чергу, можна подвоїти систему кватерніонів, в результаті чого ми отримаємо нову гіперкомплексну систему чисел, так звані октавіони. Це числа виду: $a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7$,де $a_0,\dots, a_7$ – дійсні числа, а $i_1,\dots, i_7$ – уявні одиниці. Всі арифметичні операції виконуються аналогічно, як і в кватерніонах, але з використанням таблиці уявних одиниць (табл.1). Цю таблицю множення для октавіонної системи придумав А.Келі де, як і в кватерніонах записано всілякі добутки уявних одиниць, використовуючи цю таблицю, можливо легко перемножити будь-які октавіони.

Таблиця 1

1	*i*	*j*	*k*	*E*	*I*	*J*	*K*
i	*-1*	*k*	*-j*	*-A*	*-E*	*K*	*-J*
j	*-k*	*-1*	*i*	*-J*	*-K*	*E*	*I*
k	*j*	*-i*	*-1*	*-K*	*J*	*-I*	*E*
E	*-I*	*J*	*K*	*-1*	*-i*	*-j*	*-k*
I	*-E*	*K*	*-J*	*-i*	*-1*	*K*	*-j*
J	*-K*	*-E*	*I*	*j*	*-K*	*-1*	*i*
K	*J*	*-I*	*-E*	*K*	*j*	*-i*	*-1*

Стосовно властивостей октавіонів, то можна сказати про те, що окрім невиконання властивості комутативності по множенню, не виконується, ще і властивість асоціативності по множенню.

Ці числа також можна представити у вигляді пари кватерніонів, аналогічно як кватерніони ми представляли за допомогою пари комплексних чисел.

Цікавою є ще така властивість для октав, як

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2 \qquad (3)$$

де u і v – довільні октавіони, яка говорить про те, що сума восьми квадратів на суму восьми квадратів, є знову сумою восьми квадратів, її ще називають «задача про суму восьми квадратів», вона схожа на задачу про суму чотирьох квадратів, яку розглядають у кватерніонах, і яку ще називають формулою Ейлера.

Розглянемо цю властивість:

нехай $u = a + bi + cj + dk + AE+BI+CJ + DK$, $v = a' + b'i + c'j + d'k + A'E + + B'I + C'J + D'K$, а $uv = \Phi_0 + \Phi_1 i + +\Phi_2 j + \Phi_3 k + \Phi_4 E + \Phi_5 I + \Phi_6 J + \Phi_7 K$, тоді рівність (3) приймає вигляд $(a^2 +\dots+D^2)(a'^2 +\dots+D'^2) = \Phi_0^2 + +\Phi_1^2 + \dots + \Phi_7^2$. Зрозуміло, замість $\Phi_0,\Phi_1,\dots,\Phi_7$ сюди слід поставити їх вирази через $a,\dots,D$, $a',\dots,D'$, виходячи із закону множення октав. Проробивши цю громіздку роботу, прийдемо до такої рівності:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+A^2+B^2+C^2+D^2) \bullet (a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+A'^2+B'^2+C'^2+D'^2)=$$
$$=(aa'-bb'- -cc'-dd'-AA'-BB'-CC'-DD')^2+(ab'+ba'+cd'-dc'-A'B+B'A+C'D- D'C)^2+$$
$$+(ac'+ca'-bd'+db'-A'C+C'A-B'D+D'B)^2+ (ad'+da'+bc'-cb'- A'D+D'A+B'C-C'B)^2+$$
$$+(A'a-B'b-C'c-D'd+A'a+B'b+Cc'+Dd')^2+ (A'b+B'a+C'd+D'c-Ab'+Ba'-Cd'+Dc')^2+$$
$$+(A'c+C'a-B'd+D'b- Ac'+Ca'+Bd'-Db')^2+(A'd+D'a+B'c+C'b-Ad'+Da'-Bc'+Cb')^2 \text{ [5]}.$$

Цікаво відмітити, що саме пошук тотожності для 8 квадратів привів автора системи октав англійського математика А. Келі до їх відкриття!

Висновок. Цей короткий огляд становлення теорії гіперкомплексних числових систем далеко не вичерпує весь матеріал за даною темою. Але з наведеного можна зробити висновок про велику роль гіперкомплексних числових систем для розвитку теоретичних досліджень і виявлення їхньої практичної спрямованості [3].

Список використаних джерел

1. Вивальнюк Л.М. Числові системи. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1977. – 184 с.
2. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.
3. Нечаев В.И. Числовые системы. – М.: Просвещение, 1975. – 199 с.
4. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. – М.: Наука, 1986. – 120 с.
5. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа. – М.: Наука, 1971. – 440 с.

Каща М. Гіперкомплексні числа.

У статті розглянута основна інформація стосовно того, як відбувалося розширення поняття числа, більш детальніше розглянуто систему комплексних чисел, розглянуто як відбувається розширення комплексних чисел до кватерніонів, розглянуто різні форми подання кватерніонів, а також розглянуто ще одну гіперкомплексну систему чисел – октавіони, і яким чином відбувається перехід від системи кватерніонів до системи чисел – октав.

Ключові слова: *комплексні числа, кватерніони, норма кватерніонів, формула Ейлера, октави, гіперкомплексні числа.*

Kascha M. Hypercomplex numbers.

In this paper the basic information on how to expand the concept of number was more closely examine the system of complex numbers, complex numbers change from their doubling, that quaternions, considered other forms of representation quaternions and hypercomplex consider another system of numbers - oktaviony and how is the transition from the system quaternion numbers - octaves.

Keywords: *Kompleksnye numbers quaternions, the rate quaternions formula Euler oktav, hypercomplex number.*

Юлія Коропець

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

koropets90@mail.ru

Науковий керівник – А.О. Розуменко

УСНІ ВПРАВИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Перевантаженість програми, відсутність системи прийомів раціональних обчислень, недостатність усвідомлення кінцевих цілей навчання математики – причини зниження інтересу до предмета. У підручниках багато визначень, правил, алгоритмів, які треба зрозуміти, засвоїти і навчитися застосовувати. Більшість учнів просто не в змозі запам’ятати великий обсяг матеріалу. Тим часом дуже часто можна спостерігати знайому картину – учні старших класів не можуть швидко і точно виконати найпростіші обчислення в розумі. На це доводиться витрачати дорогоцінний час, замість того щоб зайнятися розв’язанням більш складних завдань.

З метою успішного розв’язання даної проблеми в навчально-виховному процесі використовують усні вправи.

Усні вправи є одним із випробуваних засобів, які сприяють кращому засвоєнню курсу математики. Усні вправи важливі тим, що вони активізують розумову діяльність учня; при їх виконанні у дітей розвивається пам’ять, мова, увага, здатність сприймати