то вона була б неперервною і теорема б виконувалась.

Отже, можна зробити висновок, що неперервність функції на відрізку в даній теоремі є важливою умовою і нехтувати нею не можна, інакше не виконується сама теорема.

Список використаних джерел

1. Каленіченко І. Історія виникнення математичного аналізу [Електронний ресурс] / І.Каленіченко// 2013. – Режим доступу: http://prilmom.at.ua/publ/istorija_viniknennja_matematichnogo_analizu/1-1-0-2
2. Ляшко И. И. Математический анализ: введения в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике. Т. 1. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач // М.: Едиториал УССР. – 2001. – С. 97-110.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
4. Фихтенгольц В. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / В.М. Фихтенгольц // Государственное издательство физико-математической литературы. – М., 1962. – С. 146-166.

Анотація. Бондар І. Неперервність функцій як необхідна та достатня умова.

У статті розглянута властивість неперервності функції як необхідна або достатня умова існування інших її властивостей, зокрема, у теорії диференціального та інтегрального числення, теорії рядів. На прикладі проілюстровано, що невиконання даної властивості функції є важливою умовою, якою не можна нехтувати, бо це приводить до невиконання самої теореми.

Ключові слова: *неперервність функцій, необхідна умова, достатня умова.*

Summary. Bondar I. Continuity of functions as necessary and sufficient condition.

In the article the property of continuity of the function as a necessary or sufficient condition for the existence of its other properties, in particular, in the theory of differential and integral calculus, theory of series. The example shows that the property of continuity of a function is an important condition, which cannot be neglected.

Keywords: *continuity of functions, necessary condition, sufficient condition.*

Віта Гризун

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

vitaliya.gryzun@mail.ru

Науковий керівник – О.О. Одінцова

КОЛА, ПОВ'ЯЗАНІ З ТРИКУТНИКОМ

Шкільний курс планіметрії містить не так багато інформації з геометрії конфігурації трикутників і кіл. А тема ця дуже цікава. Багато великих вчених, такі як Гаусс, Ейлер, Лейбніц, Чева займалися вирішенням завдань пов'язаних з комбінацією трикутників і кіл. З найдавніших часів коло і трикутник вважали досконалими фігурами, в деяких країнах їх наділяли і наділяють магічними сенсом. Розглянемо такі цікаві факти геометрії: коло вписане та описане навколо трикутника, зовні описане коло коло дев'яти точок (коло Ейлера) та її властивості, коло Аполлонія.

Колом називається фігура, яка складається із всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки. Ця точка називається центром кола [1].

Коло називається *вписаним* в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема 1. У будь-який трикутник можна вписати коло.

З рівності ΔAPO і ΔAMO, ΔBMO і ΔBNO випливає наслідок 1.

Наслідок1. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника [2].

Відомо, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, яку називають *інцентром*. Звідси можна сформулювати наслідок.

Зауважимо, що в трикутник можна вписати тільки одне коло. Це слідує з того, що бісектриси кутів *A* і *B* (рис.1) перетинаються тільки в одній точці. Звідси слідує, що існує тільки одна точка, рівновіддалена від сторін трикутника [3].

Радіус вписаного в трикутник кола обчислюється за формулою $r = \frac{S}{p}$, де r – радіус вписаного кола, p – півпериметр трикутника.

У випадку прямокутного трикутника $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r – радіус вписаного кола, *a* і b – катети, *c* – гіпотенуза [3].

Коло називається *описаним* навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини трикутника [2].

Теорема 2. Навколо будь-якого кола можна описати коло [3].

Наслідок 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін [2].

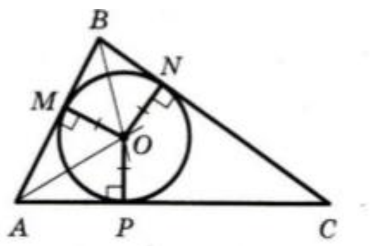

Рис. 1

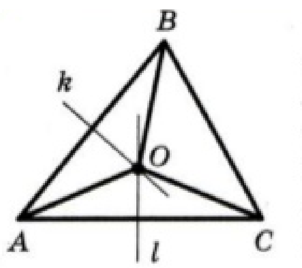

Рис. 2

Зауважимо, що навколо трикутника можна описати тільки одне коло. Це слідує з того, що серединні перпендикуляри *k* і *l* (рис.2) мають тільки одну точку перетину. Звідси слідує, що існує тільки одна точка, рівновіддалена від всіх вершин трикутника [3].

У гострокутному трикутнику центр описаного кола лежить всередині трикутника, у тупокутному – зовні трикутника, у прямокутному – на середині гіпотенузи [4].

Крім кіл, вписаного в трикутника та описаного навколо нього розглядають ще *зовні вписане* коло.

Проведемо у трикутнику *ABC* бісектриси зовнішніх кутів при вершинах *B* і *C* (рис. 3). Точка O_1 перетину рівновіддалена від прямих *AB*, *BC*, *AC* ($O_1M = O_1K = O_1N$). Тому вона є центром кола, яке дотикається до сторони *BC* трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називається *зовні вписаним*. Центр O_1кола рівновіддалений від продовжень сторін *AB* і *AC*, тому він лежить на бісектрисі кута *A*.

Для будь-якого трикутника можна провести три зовні вписаних кола.

Зовні вписане коло має цікаві властивості. На рисунку 3 *AM = AB + BK*, оскільки *BK = BM*; *AN = AC + CK,* оскільки *CK = C N.* Додавши ліві і праві частини цих нерівностей, маємо:

$$AM + AN = AB + AC + BK + CK = AB + AC + BC.$$

Оскільки $AM = AN$, $AM = AN = \frac{AB + AC + BC}{2} = p$, де p – півпериметр трикутника ABC.

Теорема 3. Відстані від точок дотику зовні описаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника, до їх спільної вершини, дорівнює півпериметру трикутника.

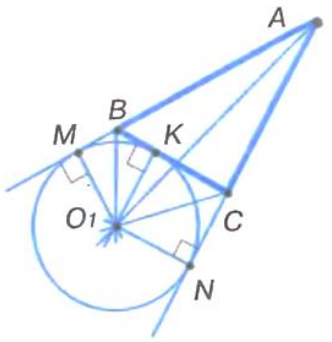

Рис. 3

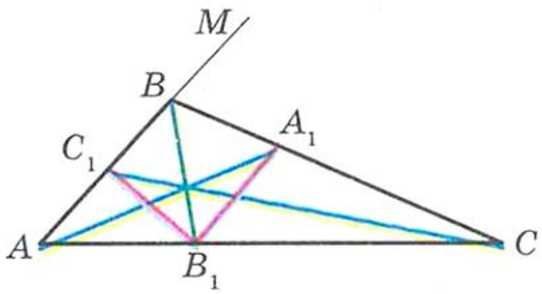

Рис. 4

Оскільки, $AM = AB + BK = p$, $AN = AC + CK = p$ і $AM = AN$, то $AB + BK = =AC + CK = p$.

Теорема 4. Пряма, що проходить через точку дотику зовні вписаного кола до сторони трикутника і протилежну цій стороні вершину, поділяє його периметр навпіл [4].

Наведемо приклад задачі.

Задача. У трикутнику ABC з кутом B, який дорівнює 120°, проведено бісектриси AA_1, BB_1, CC_1. Знайти кут $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай $\angle MBC$ – зовнішній кут трикутника ABC при вершині B (рис.4). Очевидно, що $\angle MBC = 60^{\circ}$. Тоді промінь BA_1 – бісектриса кута MBB_1. Отже, точка A_1 – центр зовнішнього кола трикутника ABB_1. Тоді промінь B_1A_1 – бісектриса кута BB_1C. Аналогічно, промінь B_1C_1 – бісектриса кута AB_1B.

Отже, $\angle A_1B_1C_1$ дорівнює половині розгорнутого кута, тобто $\angle A_1B_1C_1 = 90^{\circ}$ [1].

Теорема 5. У будь-якому трикутнику основи висот, середини сторін і середини відрізків, що з'єднують ортоцентр - точку перетину висот – з вершинами трикутника, лежать на одному колі [8].

Це коло називається *колом дев'яти точок* або *колом Ейлера (рис.5)*.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 – середини відповідно сторін BC, AC, AB; точки H_a, H_b, H_c – основи висот; точки E_a, E_b, E_c ділять навпіл відповідно відрізки AH, BH, CH. Оскільки A_1B_1 – середня лінія трикутника ABC, то $A_1B_1 = \frac{AB}{2}$. Відрізок $H_a C_1$ є медіаною прямокутного трикутника $AH_a B$. Отже, $H_a C_1 = \frac{AB}{2}$ і $A_1B_1 = H_a C_1$. Тоді трапеція $B_1C_1H_a A_1$ має рівні бічні сторони A_1B_1 і $H_a C_1$, тобто є рівнобічною. Отже, точка H_a лежить на колі, описаному навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно на цьому колі лежать точки H_b і H_c.

Зазначимо, що $C_1E_b \parallel AH_c$, оскільки C_1E_b – середня лінія трикутника ABH_a $B_1C_1 \parallel BC$. Тоді $C_1E_b \perp B_1C_1$. Аналогічно $A_1E_b \perp A_1B_1$. Отже у чотирикутнику $C_1E_bA_1B_1$ два протилежні кути $E_bC_1B_1$ і $E_bA_1B_1$ прямі. Це означає, що навколо нього описано те коло, яке ми розглядаємо, тому точка E_b лежить на ньому. Аналогічно доводиться, що на цьому колі лежать також точки E_a, E_c [5].

Наслідок 3. Радіус кола Ейлера вдвічі менший радіуса описаного кола [6].

Ця коло було відкрите великим вченим Л. Ейлером в XVIII столітті, тому його часто називають колом Ейлера. Минуло століття, і коло заново відкрив вчитель провінційної гімназії в Німеччині Карл Фейєрбах (рідний брат відомого філософа Людвіга Фейєрбаха).

Розглянемо ще коло, пов'язане з трикутником.

Колом Аполлонія називається геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є стале [7].

Вперше їх описав Аполлоній із Перги, відомий грецький математик [9].

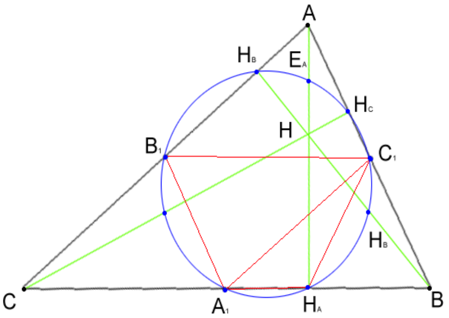

Рис. 5

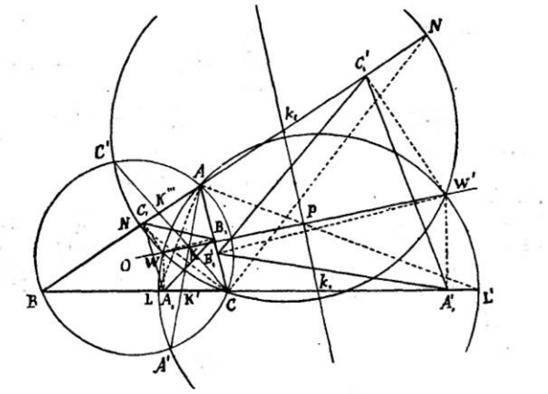

Рис. 6

Якщо *L* і L', *M* і M', *N* і N' належать внутрішнім та зовнішнім бісектрисам трикутника *ABO* (рис. 6), то коло, яке має діаметри відрізків LL', MM', NN' називається колом Аполлонія.

Так як внутрішня та зовнішня бісектриси одного кута трикутника взаємно перпендикулярні, то кути $< LAL'$, $< MBM'$, $< NCN'$ прямі, то кожне із кіл Аполлонія проходить через вершину трикутника, протилежній тій стороні, на якій знаходиться центр кола трикутника.

За властивістю бісектриси трикутника:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{L'B}{L'C} = \frac{c}{b} = \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$
$$\frac{MC}{MA} = \frac{M'C}{M'A} = \frac{a}{c} = \frac{1}{c} : \frac{1}{a},$$
$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b};$$

отже, сторони трикутника *BC*, *CA*, *AB* діляться колом Аполлонія гармонічно у відношенні

$$\frac{1}{b} : \frac{1}{c},\ \frac{1}{c} : \frac{1}{a},\ \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

З цього слідує, що три кола Аполлонія трикутника *ABC* перетинаються в двох полярних зв'язаних точках *W* і W', відстань яких від вершин трикутника обернено пропорційним його сторонам трикутника, так що

$$WA : WB : WC = W'A : W'B : W'C = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Радикальна вісь WW' кола Аполлонія проходить через центр *O* кола *ABC* і ділиться ним гармонічно, так що $OW \cdot OW' = R^2$ [10, VI, 32].

Якщо K_1, K_2, K_3 центри кіл Аполлонія LAL', MBM', NCN', то

$$\frac{K_1B}{K_1C} = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} = \frac{c^2}{b^2},$$
$$\frac{K_2C}{K_2A} = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} = \frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{K_3A}{K_3B} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Застосування досвіду розв'язування задач з використанням кіл, які пов'язані з трикутником, дає додаткові можливості при вивченні геометрії, допомагає підвищити рівень просторової уяви, рівень логічної культури учнів. Дана тема має велике прикладне і практичне значення і вимагає посиленої уваги як з боку вчителя, так і з боку учня. Тому необхідно не зупиняти пошук шляхів удосконалення методики навчання учнів із заявленої теми.

Список використаних джерел

1. Мерзляк А.Г. Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія , 2010. – 240 с.
2. Істер О. С. Геометрія 7 клас: : підручник для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Освіта, 2007. – 159 с.
3. Мерзляк А.Г. Підручник для 7 класу. – Х.: Гімназія, 2008. – 208 с.
4. Бурда М. І. Підручник для 7 класу. – Вид. Зодіак – ЕКО, 2007. – 204 с.
5. Партасюк Н. А. Задачі Ейлера. – м. Красилів, 2010р.
6. Пряма Ейлера та коло Ейлера: [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.nnstr.com/Books/book3/book1_2.pdf
7. Бевз Г.П.Геометрія 10 клас, підручник для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2010.
8. Окружность девяти точек и прямая Эйлера: [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/99b1a646-a5cc-c976-bde6-2fc832c48e1e/euler.html
9. Українська радянська енциклопедія в 12-ти томах / За ред. М. Бажана. — 2-ге вид. — К.: Гол.УРЕ, 1974-1985.
10. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. – Одесса: Типография бланкоиздательства М.Шпенцера, 1992. – 351 с.

Анотація. Гризун В. Кола, пов'язані з трикутником.

У статті проаналізовані властивості основних кіл трикутника.

Ключові слова: *трикутник, коло, вписане коло, описане коло, зовні вписане коло, коло Ейлера, коло Аполлонія.*

Summary. Hryzun V. Lines in a triangle.

There are analyzes the main properties of circles of the triangle in this article.

Keywords: *triangle, circle, inscribed circle Description circle outside inscribing circle, circle Euler circle of Apollonius.*

Альона Гурба

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ale-kyzhel@yandex.ru

ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ХІМІЇ

В умовах докорінного перетворення нашого суспільства та кардинальних економічних перетворень підготовка компетентного фахівця є важливим складником сучасної системи професійної освіти. У зв'язку зі зростанням в інформаційному