

## Секція 1. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Ірина Авраменко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

*ira.avramenko.92@mail.ru*

Науковий керівник – О.В.Семеніхіна

### ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Формування умінь розв'язувати задачі на екстремум за допомогою похідної є одним із важливих завдань вивчення початків аналізу у старшій школі. Багато задач геометричного змісту є типовими задачами на екстремум. У цих задачах при виконанні певних умов треба знайти найбільше або найменше значення певної геометричної величини (периметра, площі, об'єму). Кожній з цих величин можна поставити у відповідність певну формулу (іноді не одну), яка виражає шукану величину як функцію інших величин. Проте сама функція в готовому вигляді не дається. Її треба визначити з умов задачі. Часто за умовами задачі можна побудувати функцію не однієї змінної, а двох. Тоді, застосувавши відомі геометричні теореми, одну з цих змінних виключають [3, с. 47].

Є чимало елементарних, досить простих і наочних, а іноді штучних, способів розв'язання задачі на екстремум. Проте використання апарату диференціального числення дає універсальний спосіб розв'язування задач такого типу:

- 1) вибір незалежної змінної і визначення множини її значень;
- 2) побудова функції, яка описує ту геометричну величину, екстремальне значення якої треба знайти;
- 3) відшукування критичних точок цієї функції і аналіз тих, які належать області визначення функції;
- 4) з'ясування характеру екстремуму функції в цих точках;
- 5) обчислення значень функції в цих точках і на кінцях відрізка області визначення з подальшим вибором найбільшого або найменшого з них.

Якщо неперервна функція диференційовна в інтервалі і має єдиний екстремум, то у випадку максимуму це буде її найбільше значення, а у випадку мінімуму – найменше [2].

Розглянемо приклад. З усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою  $c$  знайти той, у якого площа найбільша (рис. 1).

Розв'язання.

Якщо позначити через  $x$  і  $y$  катети трикутника, то з теореми Піфагора  $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ , і площа трикутника, виражена через змінну  $x$ , буде мати вигляд  $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}$ .

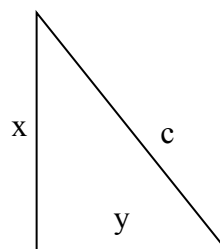


Рис. 1

Оскільки площа – невід’ємна величина, областю визначення функції  $S(x)$  є відрізок  $[0, c]$ . Знайдемо похідну функції  $S(x)$ :

$$S'(x) = \left( \frac{x}{2} \sqrt{c^2 - x^2} \right)' = \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{c^2 - x^2 - x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}},$$

$$\frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{c}{\sqrt{2}}$$

Змісту задачі відповідає лише одна з цих точок:  $\frac{c}{\sqrt{2}}$ . З виразу похідної видно, що

$S'(x) > 0$  при  $x < \frac{c}{\sqrt{2}}$ ,  $S'(x) < 0$  при  $x > \frac{c}{\sqrt{2}}$ . А це означає, що  $\frac{c}{\sqrt{2}}$  є точкою максимуму

функції  $S(x)$ , причому  $S\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = \frac{c^2}{4}$ . Крім того,  $S(0) = S(c) = 0$ , тому  $S(x)$  у точці

$\frac{c}{\sqrt{2}}$  набуває найбільшого значення. Але при  $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ , другий катет  $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$ , а це означає, що трикутник рівнобедрений.

Іншими словами, з усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою рівнобедрений має найбільшу площу.

Але, як показує практика, використання елементів диференціального числення при розв’язуванні задач на екстремум часто є складним, тому пропонуємо використати інший підхід і емпіричним способом одержати описаний результат. Для цього скористаємося спеціалізованими інформаційними засобами.

На сучасному етапі розвитку суспільства розроблено значну кількість програмних засобів, орієнтованих на підтримку вивчення математики. Ці засоби активізують навчально-пізнавальну діяльність учнів, підвищують інтерес дітей до вивчення математики. Вони забезпечують більшу повноту засвоєння матеріалу, триваліше його запам’ятовування і глибше розуміння. До таких засобів можна віднести програми динамічної математики, такі як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, GeoGebra тощо [4;5;7]. Ми зупинилися на вільно поширюваному середовищі GeoGebra, яке дає змогу реалізувати ще один підхід до розв’язування багатьох практичних задач на екстремум, який пов’язано з використанням таблиць значення функції та динамічним слідом точки.

Задамо параметр  $c$  у межах від 0 до 3. На довільній прямій відкладемо відрізок довжини  $c$  – це буде гіпотенуза наших прямокутних трикутників. Потім побудуємо коло з діаметром  $c$ , тоді усі трикутники зі стороною-діаметром і вершиною на колі будуть прямокутними. Візьмемо довільну точку на колі та інструментом *Многоугольник* побудуємо трикутник. Інструментами *Площадь* і *Расстояние* или *длина* будемо фіксувати площу та довжини сторін трикутника. Для знайдених довжин і площі та фіксованого параметра  $c$  через контекстне меню замовимо послугу *Запись в таблицу*, попередньо обравши полотно таблиць (рис. 2).

При зміні положення вершини прямого кута трикутника і фіксованому  $c$  спостерігаємо значення довжин сторін трикутника і відповідного їм значення площі. Найбільша площа трикутника при  $c = 3$  відповідає однаковим сторонам-катетам і дорівнює  $9\text{см}$  (рис. 2). При  $c = 1,5$ ,  $c = 2$  та інших фіксованих  $c$  маємо подібні висновки, тому справедливим буде припущення, що з усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою найбільша площа буде у рівнобедреному трикутнику (рис.3-4).

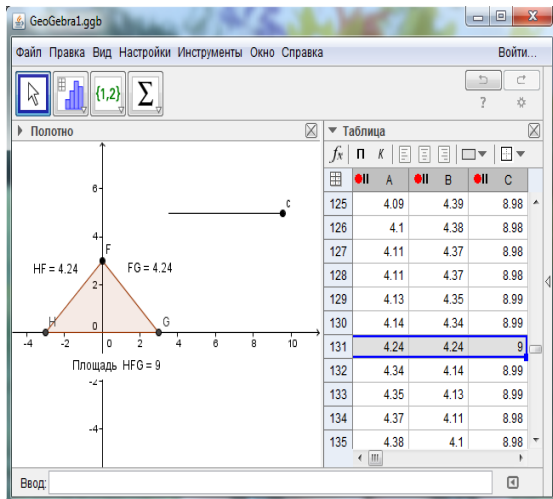


Рис. 2

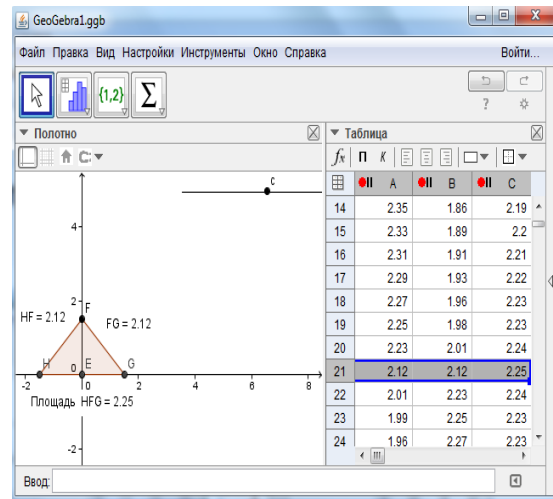


Рис. 3

Можливий і інший підхід до розв’язування цієї задачі пов’язаний з використанням інструментів *Локус* або *Оставлять след*.

Для цього після побудови трикутника, побудуємо точку  $L$  з координатами  $\left(\sqrt{c^2 - x^2}, \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}\right)$ , де  $\sqrt{c^2 - x^2}$  – сторона трикутника, а  $\frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}$  – значення площі, та замовимо для цієї точки послугу *Оставить след*. При зміні положення вершини  $F$ , яка рухається по колу, на екрані залишається слід, який описує криву, схожу на параболу (рис. 5). Максимум досягається, коли точка  $F$  лежить на  $Oy$ , а це означає, що трикутник буде рівнобедреним. Такий висновок знову можна зробити для будь-яких значень параметра  $c$ .

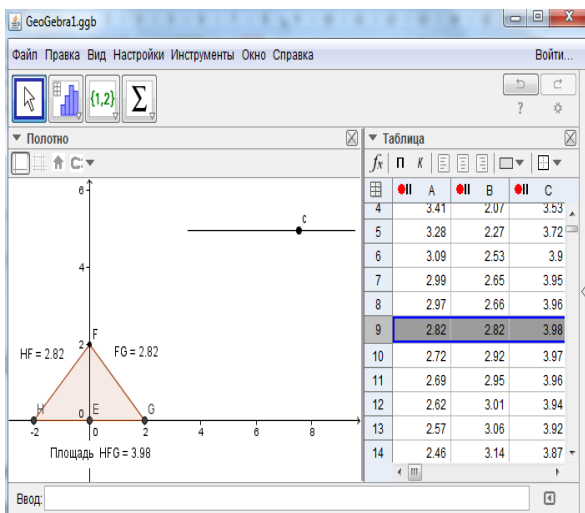


Рис. 4

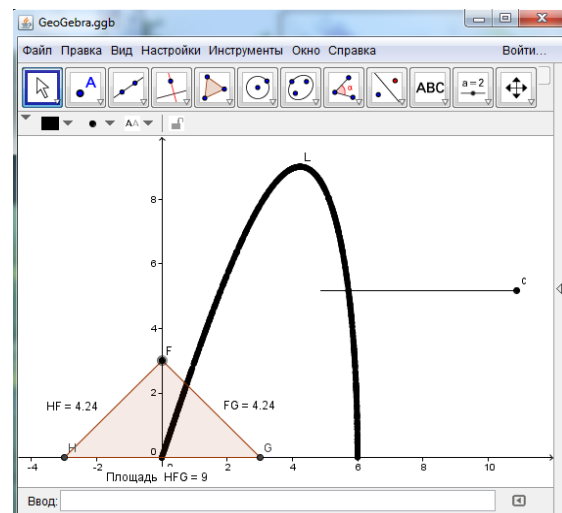


Рис. 5

Розв’язування задач такого типу з одного боку знайомить учнів з спеціалізованими середовищами математичного спрямування GeoGebra та шляхами його використання в розв’язанні математичних задач, а з іншого боку дозволяє емпіричним шляхом одержати результат, який раніше можна було одержати лише аналітично.

Застосування описаного підходу дозволяє вчителю математики одночасно підвищити зацікавленість у вивченні математики і сприяти накопиченню в учнів емпіричного досвіду розв'язування математичних задач та інтуїції [6].

#### Список використаних джерел

1. Динамічне геометричне середовище GeoGebra [Електронний ресурс]. – [Режим доступу]: <http://te.zavantag.com/docs/1040/index-31012-1.html?page=3>
2. Задачі на екстремум в планіметрії та стереометрії [Електронний ресурс]. – [Режим доступу]: [http://5ka.at.ua/load/matematika/zadachi\\_na\\_ekstremum\\_v\\_planimetriji\\_ta\\_stereometriji\\_referat/36-1-0-11967](http://5ka.at.ua/load/matematika/zadachi_na_ekstremum_v_planimetriji_ta_stereometriji_referat/36-1-0-11967)
3. Мельник В. Геометричні задачі на екстремуми / В. Мельник // Математика в школі. – 2000. – № 4. – С. 56.
4. Застосування комп'ютера при вивченні математики: [навчальний посібник] / Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. – Суми, 2014. – 179 с. (електронний ресурс)
5. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики і методичні проблеми їх використання [Електронний ресурс] / Семеніхіна Олена Володимирівна, Друшляк Марина Григорівна // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Том 42, № 4. – С. 109-117. – Режим доступу: [http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1055/813#.VDPbk2d\\_vE4](http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1055/813#.VDPbk2d_vE4)
6. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Створення власних комп'ютерних інструментів у середовищах динамічної математики / Олена Семеніхіна, Марина Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – №5. – С. 60-69.
7. Elena Semenikhina, Marina Drushlyak. Computer Mathematical Tools: Practical Experience of Learning to use them // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – Vol.(9), № 3. – Pp. 175-183.

**Анотація. Авраменко І. Особливості використання середовища GeoGebra при розв'язуванні задач на екстремум.**

*У роботі на прикладі продемонстровано емпіричний підхід до розв'язування задач на екстремум та із застосуванням середовища GeoGebra. При цьому використано полотно таблиць та інструмент Динамічний слід.*

**Ключові слова:** задачі на екстремум, динамічна геометрія, середовище GeoGebra.

**Summary. Avramenko I. Features of GeoGebra in solving environmental problems on extreme.**

*In this paper demonstrated empirical approach to solving task of extremum and application environment GeoGebra. Used canvas of tables and tool Dynamic track.*

**Keywords:** problem on the extreme, dynamic geometry environment GeoGebra.