

Аннотация. Левченко И. Развитие творческого мышления учащихся на уроках математики. В статье рассматривается проблема развития творческих способностей детей младшего подросткового возраста. Представленные формы, приемы и методы, которые способствуют развитию креативного мышления.

Ключевые слова: креативность, дивергентное мышление, творческие способности.

Abstract. Levchenko I. Development of creative thinking of students in mathematics lessons. In the article the problem of development of creative abilities of children of younger teens. Presented forms, techniques and methods that promote creative thinking.

Keywords: creativity, divergent thinking, creativity.

Яна Лісниченко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, м. Суми

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРУП У ФІЗИЧНИХ ТЕОРІЯХ

Постановка проблеми. Уявлення симетрії відіграє величезну роль у постановці та аналізі фізичних завдань. Відомо, що закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу системи пов'язані з однорідністю часу, однорідністю і ізотропністю простору відповідно. Багато завдань вирішуються просто, якщо використовувати симетрію і, звичайно, фізичні уявлення. Форма законів всесвітнього тяжіння Ньютона і закону Кулона впливає з сферичної симетрії задачі для точкової маси (заряду) і законів збереження маси і заряду відповідно. Використання симетрії є ефективним методом, що дозволяє отримати відносно просто результати дослідження.

Часто елементи симетрії і співвідношення між ними можна виразити мовою теорії груп. У кристалографії такий підхід дозволив систематизувати різні види симетрії в кристалографічні класи.

Теорія груп є у фізиці важливим методом розгляду завдань, які важко вирішити аналітично або обчислювальними методами. Часто, виходячи з теорії груп, можна отримати принципові результати, що мають загальний характер, наприклад, в теорії елементарних частинок.

Навчитися застосовувати методи груп можна, насамперед, на конкретних прикладах. Враховуючи досить складні математичні побудови теорії груп, доцільно починати з найпростіших випадків, для засвоєння яких достатньо знань середньої школи.

Значення методу для розуміння фундаментальних законів з погляду симетрії можна проілюструвати при розгляді фермі- і бозе частинок.

На прикладі групи симетрій трикутника показується хід міркувань і суть групового підходу: побудова зображень, в тому числі і незвітних.

Мета статті – розглянути поняття теорія груп, та розкрити їх використання у фізиці.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай розвиток математичної теорії і розширення кола її застосувань утворюють два взаємодіючих процеси: виникнення нових завдань стимулює розвиток теорії, а розвиток теорії, природно, розширює коло вирішуваних завдань. Зовсім інакше розвивався процес з теорією груп незважаючи на те, що її виникнення було пов'язане з дослідженням коренів алгебраїчних рівнянь, а знаменита теорема Галуа про нерозв'язність в радикалах алгебраїчних рівнянь була вражаючим досягненням цієї теорії на зорі її існування.

Однак, подальший розвиток теорії груп довгий час визначався тільки її внутрішньою логікою. Теорія груп встигла сформуватися в логічно завершену науку задовго до того, як з'явилися нові її застосування. Протягом тривалого періоду (близько тридцяти років) існувала готова до застосування теорія і ніхто не підозрював про її приховані можливості. Теорія груп вважалася класичним прикладом математичної теорії, досягнення якої нічого не обіцяли іншим наукам.

Положення істотно змінилося в період бурхливого розвитку квантової механіки. Виявилося, що теорія груп є надзвичайно корисним інструментом при дослідженні поведінки електронів в атомі і атомів в молекулі. Це дало поштовх до подальшого розвитку теорії груп – починаючи з тридцятих років нашого століття і по теперішній час йде безперервний процес збагачення теорії груп, помітно розширилася область її застосувань.

Теорія груп дозволяє знаходити важливі властивості, що впливають з симетрії об'єкта дослідження. Однак для цього зовсім не потрібні всі теореми, накопичені теорією груп, і всі поняття, нею створені. Доцільно відокремити ту частину теорії груп, яка потрібна при дослідженні завдань, що володіють симетрією. Цю частину теорії домовимося називати прикладною теорією груп, включаючи в це поняття не тільки відповідні теореми теорії груп, а й відповідні методи [1].

Уявлення симетрії відіграють величезну роль у постановці та аналізі фізичних завдань. Відомо, що закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу системи пов'язані з однорідністю часу, однорідністю і ізотропною простору відповідно. Багато завдань вирішуються просто, якщо використовувати симетрію і, звичайно, фізичні уявлення. Математичний запис законів всесвітнього тяжіння Ньютона і закону Кулона впливає зі сферичної симетрії задачі для точкової маси (заряду) і законів збереження маси і заряду відповідно. У багатьох конкретних завданнях: при розрахунку електричних і магнітних полів, в задачах гідродинаміки, дослідженні коливань – міркування симетрії є ефективним методом, що дозволяє отримати відносно прості кінцеві формули.

Теорія груп є у фізиці важливим методом розгляду завдань, які важко вирішити аналітично або обчислювальними методами. Часто, виходячи з теорії груп, можна отримати принципові результати, що мають загальний характер, наприклад, в теорії елементарних частинок. Навчитися застосовувати методи груп можна, насамперед, на конкретних прикладах. Значення таких методів для розуміння фундаментальних законів з погляду симетрії ілюструється при розгляді фермі- і бозечастинок.

Враховуючи досить складні математичні побудови теорії груп, доцільно починати з найпростіших випадків, для засвоєння яких достатньо знань середньої школи. Зокрема, на прикладі групи симетрій трикутника можна проілюструвати хід міркувань і суть групового підходу: побудову зображення, поділ групи на незвідні зображення.

Коливання трикутника розглядаються для того, щоб показати зв'язок спектрів з симетрією системи. У цьому випадку можна судити про поведінку частот у зовнішніх полях на основі групового підходу без складних обчислень.

Дуже важливим прикладом симетрії, створеної самою природою, є симетрія кристалів. Фізика кристалів – постійний «споживач» методів теорії груп. Ще один клас важливих прикладів – атоми в молекулі і електрони в атомі. Фундаментальну роль у фізиці «грає симетрія простору і часу». Її прояви різноманітні. У найбільш загальній формі вона виражається в тому, що всі інерціальні системи відліку фізично еквівалентні. З цього впливає, що і всі фізичні закони мають одну і ту ж форму в усіх інерційних системах відліку. Візьмемо, наприклад, закони, що керують електромагнітним полем, - знамениті рівняння Максвелла. При переході з однієї інерціальної системи відліку в іншу вони не

змінюють свої форми. Точніше, кожне окремо взяте рівняння Максвелла при такому переході змінює свій вигляд, проте вся сукупність рівнянь Максвелла після декількох тотожних перетворень повертається до первісного вигляду. Іншими словами, кожен перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої такої ж системи є операцією симетрії для рівнянь Максвелла. Це один із часткових проявів загальних властивостей симетрії простору і часу. Залишається відповісти на питання, яку користь можна отримати, застосовуючи методи теорії груп при дослідженні завдань, що володіють симетрією.

Розглянемо тепер специфіку фізичних завдань, що досліджуються методами прикладної теорії груп. Перша особливість таких завдань полягає в тому, що найрізноманітніші фізичні об'єкти часто мають одну і ту ж групу симетрій. Які причини цього явища і які наслідки випливають з нього? Є три основних джерела симетрії фізичних завдань:

- 1) симетрія простору і часу;
- 2) нерозрізненість елементарних частинок одного сорту;
- 3) симетрія «уявного світу», близького до реального світу.

Симетрія простору і часу виражається в тому, що всі інерціальні системи відліку фізично еквівалентні. Точніше, всі фізичні закони формулюються абсолютно однаково у всіх інерціальних системах відліку. Як приклад можна вказати на рівняння Максвелла. При переході з однієї інерціальної системи в іншу координати і час перетворюються певним чином один через одного. Сукупність цих перетворень утворює групу - повну групу Лоренца. Саме вона описує симетрію простору і часу. Закони фізики інваріантні щодо групи Лоренца. З цього випливає, що при переході з однієї інерціальної системи відліку в іншу перетворюються не тільки координати і час, але і всі фізичні величини, що ставляться до досліджуваних законам фізики. Якщо рівняння, що виражають ці закони, лінійні, то лінійними є й перетворення відповідних фізичних величин. Вони утворюють зображення повної групи Лоренца. Тому класифікація таких зображень природно переноситься на фізичні величини. На практиці замість повної групи Лоренца часто користуються двома її підгрупами: групою обертань і власною групою Лоренца. Це призводить до класифікації фізичних величин за поданнями цих підгруп. Саме так виникають скаляри, тривимірні вектори, тензори різних рангів, чотиривимірні вектори і тензори.

Нерозрізненість елементарних часток призводить до того, що будь-яка перестановка двох або декількох однакових частинок автоматично є операцією симетрії для будь-якої фізичної задачі, у якій фігурують ці частинки. Таким чином, і цей вид симетрії є загальним для найрізноманітніших фізичних об'єктів.

Переходячи до третього джерела симетрії фізичних завдань, пояснимо лише, що ми маємо на увазі, говорячи про симетрії уявного світу. Цей світ, хоча і уявний, не відірвано від дійсного світу. Говорячи точніше, дійсний світ, його закони можна розглядати як результат слабкого збурення уявного світу. Так, електромагнітну взаємодію протонів можна розглядати як слабе збурення; якщо, знехтувати ним, то протони нічим не відрізнятимуться від нейтронів і виникне нова симетрія - симетрія фізичних законів, що оперують нуклонами і не враховують електромагнітної взаємодії. Пошуки подібних симетрії - вони називаються вищими симетріями - виявилися дуже плідними в теорії елементарних часток [3].

Фермі- і Бозе частинки

Існування двох сортів часток різної симетрії - один з найважливіших результатів фізики XX століття. Фермі-частинки, наприклад, електрони, характеризуються тим, що в одному стані не може перебувати більше однієї частинки, що пов'язано з тим, що фермі-частинки мають напівцілий спін, Бозе- частинки мають цілий спін, в одному стані може перебувати будь-яке число частинок .

Існування двох сортів частинок впливає з принципу тотожності частинок, який слідує із квантової механіки, і групи дзеркальної симетрії. Покажемо це.

Нехай стан системи, що складається їх N однакових частинок, описується функцією, залежною від параметрів цих частинок

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.1)$$

У квантовій механіці - це хвильова функція і фізичний зміст має квадрат модуля цієї функції (ймовірність знайти систему в даному стані) $-\psi^2$. Очевидно, що при операції симетрії, наприклад, при перестановці частинок функція може змінити знак або зберегти знак. Стан при цьому не змінюється, оскільки частинки тотожні. Дія оператора перестановки двох частинок запишеться

$$\hat{P} \psi(x_1 \dots x_k \dots x_e \dots x_N) = \pm \psi(x_1 \dots x_k \dots x_e \dots x_N). \quad (1.2)$$

Власні значення оператора $P=\pm 1$, що відповідає регулярному поданням групи з двох елементів - одиничного I і дзеркального відображення P:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Це уявлення розбивається на два незвідних одновимірних зображень з характеристиками: $\chi_1(I)=1$, $\chi_1(P)=1$ і $\chi_2(I)=1$, $\chi_2(P)=-1$. В силу тривіального результату таке подання єдине.

Якщо симетрія частинок відповідає значенню $P = -1$, то в одному стані не може бути більше, ніж одна частинка. Якщо частинка $x_k \dots x_e$ знаходяться в одному стані, то їх перестановка нічого не змінює; отже, в цьому випадку

$$\psi(x_1 \dots x_N) = -\psi(x_1 \dots x_N) = 0, \quad (1.4)$$

тобто ймовірність такого стану дорівнює нулю. Якщо $P=+1$, то заборона на число часток в одному стані відсутня. Елемент симетрії $P=-1$ з характером (1, -1) відповідає ферміонами, що має напівцілий спін. Судження про величину спіна S (число, що характеризує власний момент частинки) впливає з того, що при обертанні в спіновому просторі хвильова функція перемножається на величину $(-1)^{2S}$.

Таким чином, існування тільки двох сортів часток є наслідком симетрії елементарних частинок, яка легко виражається мовою теорії груп.

Можна уявити собі випадок, коли в одному стані «дозволяється» перебувати не більше P частинок ($P>1$). Тоді крім бозе- і фермі частинок повинні існувати й інші частинки - груп симетрії була б складнішою (містила б і інші елементи крім I і P). Але сучасна фізика допускає тільки два сорти частинок, що відповідає групі дзеркальної симетрії [2].

Група симетрії трикутника

Група симетрій рівностороннього трикутника (рис. 1) містить 6 елементів: I – тотожність, A – поворот на 120° , B – поворот на 240° , C, D, E – відображення відносно ліній P, Q і R – відповідно. Група ізоморфна групі перестановок з трьох елементів (1, 2, 3). Легко бачити, що група має три класи I; AB, CDE, причому I, IAB – підгрупи трикутника.

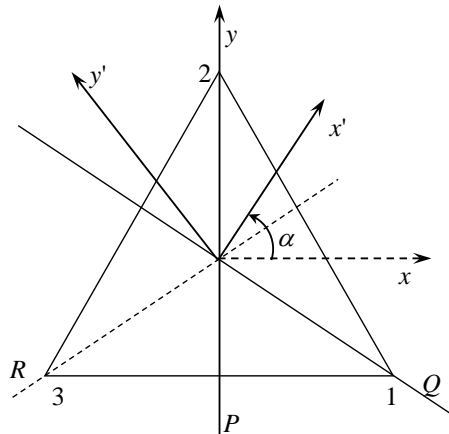


Рис. 1. Рівносторонній трикутник

Побудуємо зображення групи. Завжди існує одиничне зображення розмірності $n=1$ $D_D^{(2)}$, в якому кожному елементу ставиться у відповідність 1. Друге подання розмірності $n=1$ $D_D^{(2)}$ отримаємо, поставивши у відповідність 1 елементам IAB і -1 елементам C, D, E , що відповідає розбиттю на класи. Для побудови двовимірного зображення використовуємо зображення повороту за допомогою матриці

$$F = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де α – кут повороту системи координат (x', y') , щодо вихідної (x, y) (рис. 1). Очевидно, що поворот трикутника на кут α відповідає повороту системи координат на кут α . Тоді легко отримати матриці

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = F(120^\circ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$B = F(240^\circ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Елемент C відповідає зміні напрямку осі $x \rightarrow -x$, отже

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

використовуємо множення

$$E = AC, \quad D = BC,$$

Отримаємо

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Складемо таблицю характеристик зображення, які визначаються як слід матриці

g	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
I	1	1	2
A	1	1	-1
B	1	1	-1
C	1	-1	0
D	1	-1	0
E	1	-1	0

Як і очікувалось, елементи одного класу в будь-якому зображенні мають однакові характери. Переконаємося, що розбиття регулярного представлення, яке в нашому випадку має розмірність $n = 6$ на наведені вище незвідні подання є єдиними. Скористаємося формулою

$$\sum_{i=1}^3 n_i^2 = n. \quad (2.5)$$

У нашому випадку це відповідає відношенню

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6. \quad (2.6)$$

Очевидно, що число 6 можна так розбити на квадрати цілих чисел єдиним способом. Зображення розмірності $n_i = 1$ в даному випадку тільки 2 з урахуванням того, що елементи одного класу мають однаковий характер. Зауважимо, що характери кожного зображення повинні задовольняти співвідношенню

$$\sum P_k |\chi(C_k)|^2 = n. \quad (2.7)$$

Легко перевірити, що результати, наведені в таблиці задовольняють умові (2.7). Отже, ми отримали необхідні параметри зображення групи: розбиття на незвідні зображення і характери класів. У більш складних випадках обчислення складніше, але сам хід міркувань, загалом, зберігається [4].

Висновки. Розглянуто приклади застосування теорії груп при дослідженні фізичних завдань. Показано схему визначення параметрів групи: виділення класів, характеристик незвідних зображень, розбиття регулярного подання групи на незвідні зображення.

Теорія груп ефективна при формулюванні фундаментальних висновків: таких як обґрунтування існування двох сортів частинок - бозе- і фермі частинок, на які діляться всі частинки, відомі в сучасній фізиці.

При розгляді конкретних завдань теорія груп дозволяє зробити висновки про поведінку системи без складних обчислень, використовуючи уявлення про симетрії системи. Такі передбачення мають істотне значення при дослідженні спектрів.

Список використаних джерел

1. Хейне В. Теория групп в квантовой механике. – М. : ИЛ, 1963. – 522 с
2. Голод П. І. Симетрія та методи теорії груп у фізиці (дискретні симетрії). – К. : Києво-Могилянська академія, 2005. – 215 с.
3. Любарский Г.Я. Теория групп и физика. М., Наука, 1986. – 224 с.
4. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. – М.: Изд-во физ.-мат. л-ры., 1958. – 356с.

Анотація. Лісниченко Я.В. Застосування теорії груп у фізичних теоріях. У статті розглянуто застосування теорії груп у фізичних теоріях. Показано схему визначення параметрів групи: виділення класів, характеристик незвідних зображень, розбиття регулярного подання групи на незвідні зображення.

Теорія груп ефективна при формулюванні фундаментальних висновків: таких як обґрунтування існування двох сортів частинок – бозе- і фермі частинок, на які діляться всі частинки, відомі в сучасній фізиці.

При розгляді конкретних завдань теорія груп дозволяє зробити висновки про поведінку системи без складних обчислень, використовуючи уявлення про симетрії системи. Такі передбачення мають істотне значення при дослідженні спектрів.

Ключові слова: теорія груп, симетрія, фізичні закони, квантова механіка, фізичні величини, зображення, бозе і фермі частинки, квантова механіка.

Аннотація. Лесниченко Я.В.. Применение теории групп в физических теориях.

В статье рассмотрено применение теории групп в физических теориях. Показана схема определения параметров группы: выделение классов, характеров неприводимых изображений, разбиение регулярного представления группы на неприводимые изображения.

Теория групп эффективна при формулировке фундаментальных выводов: как обоснование существования двух сортов частиц – бозе- и ферми частиц, на которые делятся все частицы, известные в современной физике.

При рассмотрении конкретных задач теория групп позволяет сделать выводы о поведении системы без сложных вычислений, используя представление о симметрии системы. Такие предсказания имеют существенное значение при исследовании спектров.

Ключевые слова: теория групп, симметрия, физические законы, квантовая механика, физические величины, изображения, бозе и ферми частицы, квантовая механика.

Abstract. Lisnichenko Y.V. Application of the theory of groups in physical theories. In article application of the theory of groups in physical theories is considered. The scheme of determination of parameters of group is shown: allocation of classes, characters of not provided images, splitting regular representation of group into not provided images.

The theory of groups is effective at the formulation of fundamental conclusions: as justification of existence of two grades of particles - boze-and a farm of particles on which all particles known in modern physics share.

By consideration of specific objectives the theory of groups allows to draw conclusions on behavior of system without difficult calculations, using idea of symmetry of system. Such predictions have essential value at research of ranges.

Keywords: theory of groups, symmetry, physical laws, quantum mechanics, physical quantities, images, Bosa and farm of a particle, quantum mechanics.

Ганна Мащенко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
Науковий керівник – О.В. Мартиненко

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЯХ СПОЖИВЧОЇ ПОВЕДІНКИ ТА ПОПИТУ

Питанням дослідження споживчого попиту на ринку присвячено праці багатьох представників світової економічної думки: А. Маршалла, В. Парето, Л. Вальраса, Д. Хікса, Г. Касселя та ін. [2]. В Україні проблемам моделювання попиту та прогнозуванню результатів економічної діяльності підприємств присвячені доробки видатних науковців В.В. Вітлінського, В.М. Гееця, В.Я. Заруби, Т.С. Клебанової, Л.Н. Сергєєвої, Б.Я. Панасюка, В.Ф. Беседіна та ін.

Споживчий ринок – це окремі особи та домашні господарства, які купують товари та користуються послугами для особистого або сімейного споживання чи використання.