Вікторія Зубко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
vikazubko601@gmail.com
Науковий керівник – О.О. Одінцова

СТИСЛИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД ГОМОРІ

Постановка проблеми. Навряд чи можна вказати сферу діяльності людини, де б не застосовувалися методи математичного дослідження. Математичне програмування зараз проникло в усі інші науки. Якщо раніше математичний апарат переважно використовувався як інструмент розрахунку, то тепер ставиться завдання вибору найбільш ефективного розв’язку проблеми, пошук оптимального варіанту.

Вперше завдання лінійного програмування у своїх роботах перед собою поставив російський економіст А. Н. Товстий при складанні плану перевезення вантажу між пунктами так, щоб загальний пробіг транспорту був найменшим. Математичні основи для вирішення завдань лінійного програмування були створені в 1939 році академіком Л.В. Канторовичем і його учнями.

У наш час існує доволі широке коло задач математичного програмування в математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах тощо. Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте містять вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах. Прикладами таких задач є вибір послідовності виробничих процесів, календарне планування роботи підприємства, планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо [4].

Аналіз досліджень і публікацій. Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п’ятдесяті роки. У цей час з’являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків зокрема працях Г. Куна і А. Таккера, Чарнес, Лемке, Р. Белмана. У період найбурхливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках. Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці B.C. Немчинова, В.В. Новожилова, Н.П. Федоренка, С.С. Шаталіна, В.М. Глушкова, B.C. Михалевича, Ю.М. Єрмольєва та ін. У період становлення дискретної оптимізації, з’явилося багато робіт, присвячених цій проблемі А.О. Корбута, Ю.Ю. Фінкельштейна, А. Кофмана, А. Анрі-Лабордера, Л.С. Лесдона, Т. Ху, І.В. Сергієнка, В.П. Шила, Х. Пападімітріу, К. Стайгліца, В.С. Михайлевича.

Мета статті: дати стислу характеристику методів цілочисельного програмування.

Виклад основного матеріалу. Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремальні задачі (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання. Такі задачі ще називають оптимізаційними.

Як самостійний науковий напрямок математичне програмування сформувалось на початку 40-х років XX століття. У 1939 році відомий російський математик Л.В. Канторович опублікував роботу «Математичні методи організації та планування виробництва», в якій сформулював принципово новий клас екстремальних задач з обмеженнями і розробив ефективний метод їх розв'язання. Так було започатковано новий розділ прикладної математики, який пізніше отримав назву «лінійне програмування».

За останні роки розроблено багато ефективних методів розв'язання математичних задач оптимізації на ПК.

В залежності від виду цільової функції та системи обмежень галузі математичного програмування поділяють на [5]:

- лінійне програмування – цільова функція і функції обмежень, що входять в систему обмежень є лінійними;
- нелінійне програмування – цільова функція або одна із функцій обмежень, що входять в систему обмежень є нелінійними;
- цілочисельне (дискретне) програмування – якщо на хоча б одну змінну наложена умова цілочисельності;
- динамічне програмування – якщо параметри цільової функції і/або система обмежень змінюються в часі або цільова функція має адитивний/мультиплікативний вигляд чи сам процес прийняття рішення має багатокроковий характер.

В залежності чи відома вся інформація про процес заздалегідь галузі математичного програмування поділяють на:

- стохастичне програмування – відома не вся інформація про процес заздалегідь: параметри що входять в цільову функцію або в функцію обмежень є випадковими або доводиться приймати рішення в умовах ризику;
- детерміноване програмування – відома вся інформація про процес заздалегідь

У даній роботі зупинимось докладніше на цілочисельному програмуванні. ***Цілочисельне програмування*** – це розділ математичного програмування, який використовує змінні лише у цілочисельному вигляді. Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається ***задачею цілочисельного програмування***. До них також належать ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (булові, або бінарні змінні). У тому разі, коли цілочисельних значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається ***частково цілочисельною***.

Умова цілочисельності є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. У даній роботі ми розглянемо цілочисельні задачі лінійного програмування, тобто задачі в яких крім умови цілочисельності всі обмеження та цільова функція є лінійними.

Загальна цілочисельна задача лінійного програмування записується так: $\max(\min\ ) F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, за умови що:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i\,, \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (1)$$

$x_j \ge 0 \ \ (j=\overline{1,n})$

x_j – цілі числа $(j=\overline{1,n})$

Зауваження: у формулі (1) обирають один із знаків залежно від умови задачі.

Зовнішній вигляд задачі лінійного цілочисельного програмування практично не відрізняється від задачі лінійного програмування, за винятком того, що на розв'язок задачі лінійного програмування накладається додаткове обмеження: змінні набувають лише цілих значень [3, с. 151].

Припустимо, що ми розв'язали деяку задачу лінійного програмування, не враховуючи вимогу цілочисельності, і отримали наступний многокутник розв'язків ABCDO.

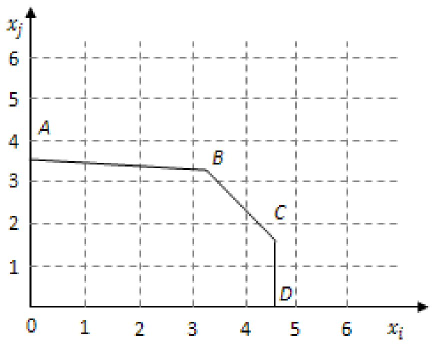

Рис. 1. Многокутник розв'язків задачі лінійного програмування

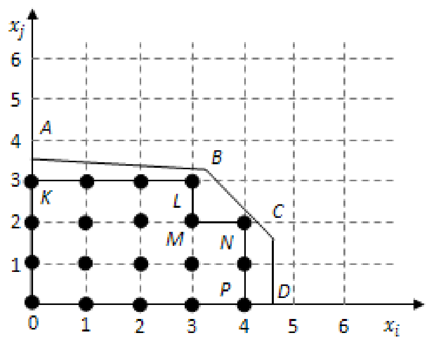

Рис. 2. Многокутник розв'язків задачі цілочисельного програмування

Якщо до даного розв'язку застосувати умову цілочисельності, то в результаті розв'язком для задачі цілочисельного програмування будуть точки з цілочисельними координатами, що містяться в многокутнику KLMNPO, в якому цілі числа позначено точками.

Для розв'язування задач математичного програмування з умовою цілочисельності використовують наступні методи: точні (метод відтинання, комбінаторні методи) і наближені методи. Зв'язок між ними подано на блок-схемі (рис. 3).

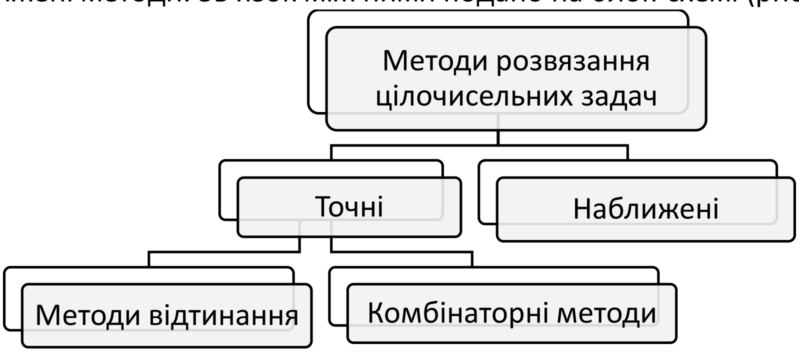

Рис. 3. Блок-схема зв'язку між методами розв'язання цілочисельних задач

Зупинимось докладніше на методі розв'язування задач лінійного цілочислового програмування, який був запропонований американським математиком Р. Гоморі в 1958 році. Це метод Гоморі, він належить до групи методів відтинання та існує у двох варіантах: перший варіант призначений для розв'язку повністю цілочисельних задач (перший алгоритм Гоморі) і другий варіант — призначений для розв'язку частково цілочисельних задач (другий алгоритм Гоморі). Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Тобто задачу лінійного цілочисельного програмування розв'язують спочатку без обмеження цілочисельності. Якщо одержаний розв'язок цілочисельним, то він є оптимальним планом задачі цілочисельного лінійного програмування. У противному випадку до умов початкової задачі додають лінійне обмеження, що його задовольняють усі цілочисельні плани початкової задачі, але не задовольняє одержаний нецілочисельний розв'язок, і розв'язують розширену задачу. Якщо розв'язок розширеної задачі цілочисельним, то він є оптимальним планом початкової задачі. В протилежному випадку до умов задачі додають наступне додаткове обмеження, що його задовольняють усі цілочисельні плани початкової задачі, але не задовольняє одержаний нецілочисловий розв'язок, і розв'язують задачу вже з двома додатковими обмеженнями і так далі. Описана процедура відтинання триває доти, поки на якомусь кроці не буде одержано цілочисельного оптимальний план або виявлено нерозв'язність задачі. Таким чином, розв'язування задачі лінійного цілочислового програмування зводиться до розв'язування послідовності задач лінійного програмування.

Алгоритм знаходження розв'язку методом Гоморі для цілком цілочисельних задач наступний:

1. Лінійна задача розв'язується класичним симплекс-методом, без врахування цілочисельності змінних x_j. У результаті отримують деякий оптимальний опорний план, який має наступний вигляд:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,; i = \overline{1,m} \ (2)$$

$$F_0 + \sum_{j=m+1}^{n} a_{0j}x_j = b_0\,; i = \overline{1,m}$$

2. Якщо (2) містить рівняння для яких базисні змінні $x_i = b_i$ мають дробові значення, то серед них обирають таке рівняння, яке має найбільшу дробову частину. Дане рівняння перетворюють у додаткову нерівність:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}x_j \geq \beta_i \ (3)$$

де $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$; $\beta_i = b_i - [b_i]$; $\alpha_{ij} \geq 0$; $\beta_i \geq 0$.

Для обрання чисел $[a_{ij}]$ та $[b_i]$; існують наступні правила:

1) якщо дробові числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ є додатніми числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є цілими додатніми числами і дорівнюють цілій частині числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ відповідно.

Приклад:

$a_{ij} = 2{,}3$; $[a_{ij}] = 2$; $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] = 2{,}3 - 2 = 0{,}3$

$b_i = 1{,}25$; $[b_i] = 1$; $\beta_i = b_i - [b_i] = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$

2) якщо дробові числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ є від'ємними числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є від'ємними цілими числами, які по абсолютній величині на одиницю більші за абсолютну величину цілої частини числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$.

Приклад:

$a_{ij} = -3\frac{1}{3}$; $[a_{ij}] = -4$; $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] = -3\frac{1}{3} - (-4) = \frac{2}{3}$

$b_i = -\frac{3}{5}$; $[b_i] = -1$; $\beta_i = b_i - [b_i] = -\frac{3}{5} - (-1) = \frac{2}{5}$

3) якщо $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ є цілими числами, то $a_{ij} = 0$ і $b_i = 0$;

4) додаткова нерівність (3) повинна містити лише додатні коефіцієнти. Вона множенням на −1 спочатку приводиться до вигляду, який повинна мати нерівність у симплекс-методі згідно із стандартною формою:

$$\sum_{j=m+1}^{n} -\alpha_{ij}x_j \leq -\beta_i$$

а потім за допомогою додаткової змінної x_{n+1} перетворюється у наступне рівняння:

$$\sum_{j=m+1}^{n} -\alpha_{ij}x_j + x_{n+1} = -\beta_i$$

яке додається до оптимального опорного плану системи (2) і сумусно з ним створює псевдоплан, який містить одне від'ємне значення $b_i = -\beta_i$;

5) даний псевдоплан розв'язується двоїстим симплекс-методом. В результаті отримують новий оптимальний опорний план з додатніми значеннями b_i та a_{0j} . Якщо в новому оптимальному опорному плані існують змінні $x_j = b_i$, значення яких містять дробову частину, то знову додають одне додаткове обмеження, і процес розрахунків повторюється до отримання цілочисельних значень базисних змінних.

Ознакою відсутності розв'язку задачі є наявність у таблиці хоча б одного рядка з цілими величинами a_{ij} та вільним членом b_i , значення якого містить дробову частину. Дана ознака вказує на відсутність розв'язку у цілих числах [2, с. 50].

Алгоритм знаходження розв'язку методом Гоморі для частково цілочисельних задач аналогічний цілочисельному алгоритму, тобто, так само вводяться додаткові обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j \geq \beta_i$$

де величини y_{ij} визначається з наступних співвідношень:

1) для нецілочисельних значень змінних x_j:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{якщо } a_{ij} \geq 0 \\ \dfrac{\beta_i}{1-\beta_i} |a_{ij}|, \text{якщо } a_{ij} < 0 \end{cases}$$

2) для цілочисельних змінних x_j :

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{якщо } a_{ij} \leq \beta_i \\ \dfrac{\beta_i}{1-\beta_i} (1 - a_{ij}), \text{якщо } a_{ij} > \beta_i \end{cases}$$

Розглянемо ***приклад*** [1, с. 182-183].

Методом Гоморі знайти максимальне значення функції

$$F = 3x_1 + 2x_2 \qquad (1)$$

при таких умовах

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (j = \overline{1,5}) \qquad (3)$$

$$x_{ij} - \text{цілі } (j = \overline{1,5}) \qquad (4)$$

Для знаходження оптимального плану задачі (1) – (4) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (1) – (3).

Базис	Б. К.	В. Ч.	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	13	1	1	1	0	0
x_4	0	6	1	-1	0	1	0
x_5	0	9	-3	1	0	0	1
		0	-3	-2	0	0	0
x_3	0	7	0	2	1	-1	0
x_1	3	6	1	-1	0	1	0
x_5	0	27	0	-2	0	3	1
		18	0	-5	0	3	0
x_2	2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	3	$\frac{19}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	0	34	0	0	1	2	1
		$\frac{71}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отриманий оптимальний план X=($\frac{19}{2}$; $\frac{7}{2}$; 0; 0; 34) задачі (1) – (3) не є оптимальним планом задачі (1) – (4), оскільки x_1 та x_1 мають нецілочисельні значення. При цьому дробові частини рівні між собою. Тому для однієї із змінних складаємо додаткове обмеження. Складемо його наприклад для змінної x_2. З останньої симплекс-таблиці маємо $x_2+\left(\frac{1}{2}\right)x_3-\left(\frac{1}{2}\right)x_4=\frac{7}{2}$.

Таким чином, до системи обмежень задачі (1) – (3) додаємо нерівність $f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)x_3+f\left(-\frac{1}{2}\right)x_4\geq f\left(\frac{7}{2}\right)$ або $\left(\frac{1}{2}\right)x_3+\left(\frac{1}{2}\right)x_4=\frac{1}{2}$, тобто $x_3+x_4\geq 1$

Базис	Б. К.	В. Ч.	3	2	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	3	$\frac{19}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_5	0	34	0	0	1	2	1	0
x_6	0	–1	0	0	–1	–1	0	1
		$\frac{71}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_2	2	4	0	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	3	9	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
x_5	0	32	0	0	-1	0	1	2
x_4	0	1	0	0	1	1	0	–1
		35	0	0	2	0	0	$\frac{1}{2}$

Отже, вихідна задача має такий оптимальний план X*=(9; 4; 0; 1; 32). При цьому $F_{max}=35$.

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень.

Отже, цілочисельне програмування є розділом математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення всіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисельності.

Методи рішення задач цілочисельного програмування розділяють на такі дві групи: точні методи (методи відтинання, комбінаторні методи) і наближені методи. Найвідоміший метод відтинань – метод Гоморі.

Упродовж останніх років все більше уваги вчені приділяють розробці ефективних методів розв'язання математичних задач оптимізації на ЕОМ для широких класів множини X і функцій *f(x).* Знання математичного програмування значною мірою може підвищити якість планування прибутку підприємства або цеху, розкрою матеріалів для виробництва продукції, рентабельності фермерського господарства, перевезення вантажів або пасажирів тощо.

Список використаних джерел

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и заданих / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986 – 319 с.

2. Гончаренко Я. В. Математичне програмування / Я. В. Гончаренко. – К.: НПУ імені М.П .Драгоманова, 2010. – 184 с.
3. Івченко І. Ю. Математичне програмування: навч. посібник / І. Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.
4. Наконечний С. І. Математичне програмування: навч. посібник / С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
5. Цілочисельне математичне програмування [Електронний ресурс] // Вікіпедія – вільна енциклопедія. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F

Анотація. Зубко В. ***Стислий огляд методів цілочисельного програмування. Метод Гоморі.*** *У статті подана коротка історична довідка про утворення нової прикладної математичної дисципліни – математичного програмування. Представлені різні класифікації галузей математичного програмування. Подано загальну характеристику методів розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування. Докладніше розповідається про точні методи математичного програмування. Проаналізовано два алгоритми методу Гоморі для цілком цілочисельних задач та частково цілочисельних задач. Та розв'язана алгоритмом Гоморі задача.*

Ключові слова: *цілочисельне лінійне програмування, точні методи, наближені методи, алгоритм Гоморі.*

Аннотация. Зубко В. Краткий обзор методов целочисленного программирования. Метод Гомори *В статье представлена краткая историческая справка о создании новой прикладной математической дисциплины – математического программирования. Представлены различные классификации отраслей математического программирования. Подано общую характеристику методов решения задач целочисленного линейного программирования. Подробнее рассказывается о точные методы математического программирования. Проанализированы два алгоритма метода Гомори для полностью целочисленных задач и частично целочисленных задач. И решена алгоритмом Гомори задача.*

Ключевые слова: *целочисленное линейное программирование, точные методы, приближенные методы, алгоритм Гомори.*

Abstract. Zubko V. A brief overview of the methods of integer programming. Method Gomorrah. *The article presents a brief historical background of the creation of a new applied mathematical discipline – mathematical programming. Presents various classifications of the branches of mathematical programming. Filed a General characteristic of methods for solving problems of integer linear programming. Details the exact methods of mathematical programming. Analyzed two algorithm method Gomori fully for integer tasks and partially integer tasks. And solved by the algorithm Gomory task.*

Keywords: *integer linear programming, exact methods approximate methods, the algorithm Gomorrah.*