НАУКОВІ ТА МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Віта Гризун
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
vitaliya.gryzun@mail.ru
Науковий керівник – О.О. Одінцова

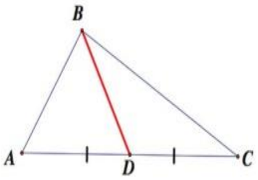
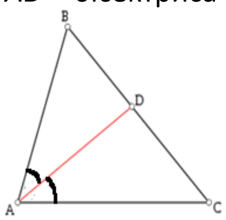
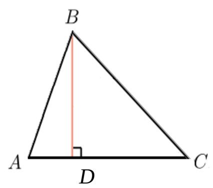
ЛІНІЇ В ТРИКУТНИКУ

На зламі XIX-XX століть завдяки великій кількості робіт, присвячених трикутнику, утворився розділ планіметрії – «нова геометрія трикутника». Серед теорем про трикутник є такі, вивчення яких дозволяє істотно розширити коло розв'язання геометричних задач. Значущість їх полягає насамперед у тому, що з них або з їх допомогою можна вивести більшість теорем геометрії, які слугують основою багатьох подальших висновків.

Не дивлячись не те, що трикутник є чи не найпростішою геометричною фігурою, він має багато важливих і цікавих властивостей, до яких зводяться властивості інших, але більш складних фігур.

Розглянемо основні лінії трикутника та властивості, що пов'язані з ними.

Таблиця 1

Основні лінії	**Медіана**	**Бісектриса**	**Медіана**
Означення	*відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою його протилежних сторін.* [1] *BD* – медіана 	*відрізок бісектриси кута, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.* [2] *AD* – бісектриса 	*перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.* [3] *BD* – висота 
Точки перетину та їх властивості	***Теорема 1.*** [2] *Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка є його <u>центром мас</u>.* Точку перетину трьох медіан трикутника ще називають ***центроїдом*** і вона ділить кожну медіану у відношенні 2:1.	***Теорема 2.*** [1] *Всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.* Точку перетину бісектрис називають ***інцентром***.	***Теорема 3.*** [1] *Три прямі, котрим належать висоти трикутника, перетинаються в одній точці.* Точку перетину прямих, що містять висоти трикутника називають ***ортоцентром*** *трикутника*.

Цікавими є рівнокутні та ізогональні прямі.

Означення 1. [4] *Прямі, які проходять через вершини трикутника і утворюють рівні кути з бісектрисою внутрішнього кута трикутника (рис. 1), проведеною з тієї ж вершини називаються* ***ізогональними.***

Існує багато цікавих властивостей, на основі яких потім розв’язується велика кількість задач. Наведемо одну з них і за допомогою неї розв’яжемо задачу.

Теорема 4. [4] *Для того щоб трикутник був прямокутним, необхідно і достатньо, щоб медіана і висота, які проведені з однієї вершини, були ізогональними.*

Перейдемо до розв’язування задачі на використання цього факту.

Задача 1. [4] *Визначити кути трикутника, в якому бісектриса, медіана і висота, проведені з однієї вершини, поділяють кут на чотири рівні частини.*

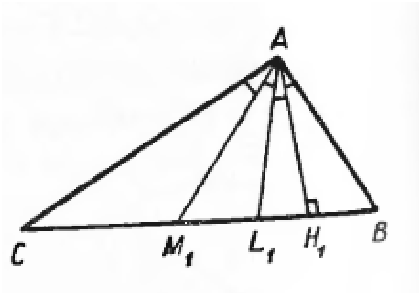


Рис. 1

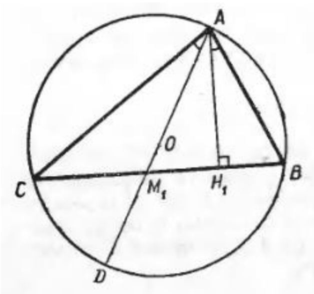


Рис. 2

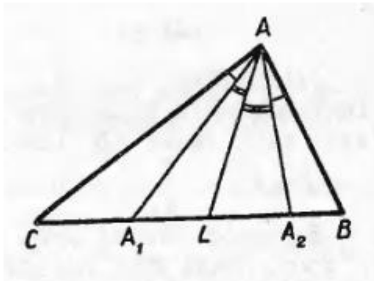


Рис. 3

Розв’язання. Оскільки трикутник *ABC (рис. 3)* – нерівнобедрений і медіана AM_1 та висота AH_1 – ізогональні, то за попередньою теоремою маємо $\angle BAC = 90^{\circ}$, а два інших кута трикутника *ABC* неважко обчислити, бо

$$\angle H_1AB = \frac{1}{4}\angle BAC = 22^{\circ}30', \angle ACB = \angle M_1AC = 22^{\circ}30',$$

$$\angle B = 90^{\circ} - 22^{\circ}30' = 67^{\circ}30' \text{(оскільки } \Delta CM_1A \text{ – рівнобедрений).}$$

У геометрії трикутника крім ізогональних прямих цікавими є так звані рівнокутні прямі.

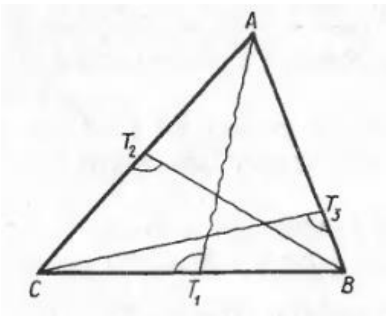


Рис. 4

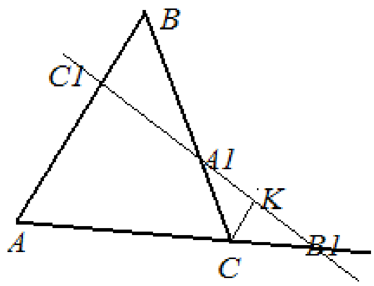


Рис. 5

Означення 2. [4] *Три прямі, кожній з яких належить одна з вершин трикутника і які перетинають протилежні вершинам сторонни під рівними кутами (рис. 4), називають* ***рівнокутними****.*

Точки перетину рівнокутних прямих з відповідними сторонами трикутника *ABC* позначають T_1, T_2, T_3.

Теорема 5. [4] *Для того щоб рівнокутні прямі перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо збігання їх з висотами трикутника.*

У геометрії трикутника існує багато таких теорем, автори яких залишилися в історії науки тільки «завдяки трикутникам». Йдеться про теореми - теорему Чеви і теорему Менелая. Обидві вони мають цікаві та численні застосування.

Відмінність цих теорем полягає в тому, що теорема Менелая розглядає трикутник, сторони або продовження сторін якого перетинаються деякою прямою (січною), у теоремі Чеви мова йде про трикутник і три прямі, що проходять через його вершини, та перетинаються в одній точці. [5].

Отже, теорема Менелая входить до золотого фонду давньогрецької математики. Ця теорема дійшла до нас в арабському перекладі книги «Сферика» Менелая Олександрійського (I—II ст. до н. е) і дозволяє легко і витончено розв`язати цілий клас задач, в яких мова йде про відношення відрізків, а також доводити належність трьох точок одній прямій.

Теорема 6 (Менелая). [6] *Нехай на сторонах AB, BC і на продовженні сторони AC (або на продовженнях сторін AB, BC і AC)* ΔABC *(рис. 5) взято відповідні точки* C_1, A_1 *і* B_1*, які не збігаються з вершинами трикутника* ΔABC*. Точки* A_1, B_1, C_1 *лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Аналогічне твердження можна сформулювати для зовнішньої січної.

Відомо, що медіани, бісектриси перетинаються в одній точці, висоти трикутника (або їх продовження) теж перетинаються в одній точці. Поставимо тепер загальне питання. Розглянемо трикутник ABC і відзначимо на його сторонах BC, AC і AB (або їх продовженнях) відповідно точки $\mathrm{C_1}$,$\mathrm{A_1}$і $\mathrm{B_1}$. При якому розташуванні цих точок прямі $\mathrm{AA_1}$, $\mathrm{BB_1}$ і $\mathrm{CC_1}$ перетнуться в одній точці?

Відповідь на це питання знайшов в 1678 році італійський інженер-гідравлік Джованні Чева (1698 р. -1734 р.).

Теорема 7 (Чеви). [7] *Дано трикутник ABC (рис. 6). На прямих AB, BC і CA позначено точки* C_1, A_1, B_1 *відповідно. Для того щоб прямі* AA_1, BB_1, CC_1 *перетинались в одній точці, необхідно і достатньо виконання умови*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Аналогічне твердження можна сформулювати, якщо точка перетину прямих буде зовні для трикутника.

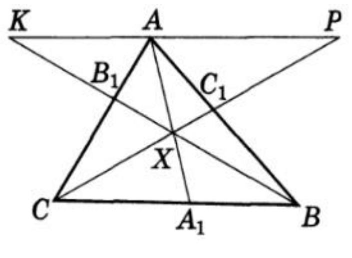


Рис. 6

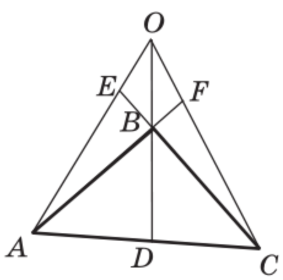


Рис. 7

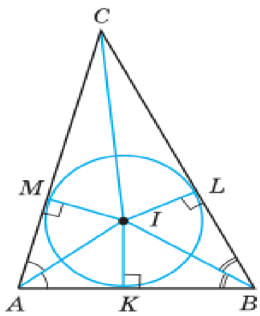
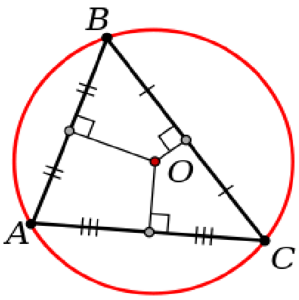
Теорема 8. [6] *Нехай* $D\in AC$*, точки F і E відповідно на продовженнях сторін AB і BC трикутника ABC (рис. 7). Довести, що прямі AE, CF і BD перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

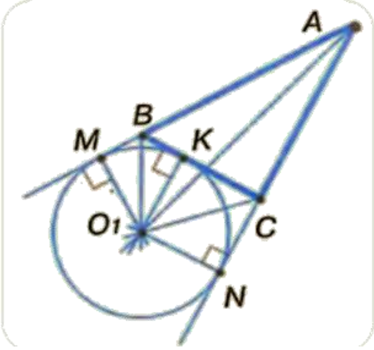
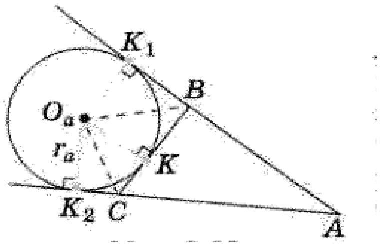
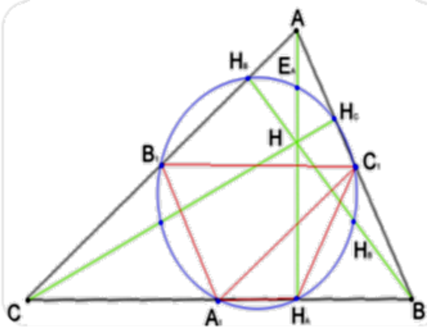
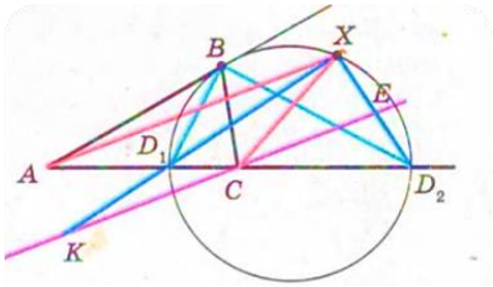
$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

Досить цікавою інформацією з геометрії є конфігурації трикутників та кіл. З найдавніших часів коло і трикутник вважали досконалими фігурами, в деяких країнах їх наділяли і наділяють магічними сенсом.

У таблиці 2 наведено цікаві факти геометрії: коло вписане та описане навколо трикутника, зовні описане коло, коло дев'яти точок (коло Ейлера), коло Аполлонія.

Таблиця 2

Вид кола	***Означення***	***Властивості***
Вписане коло	 *Коло називається вписаним в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.* [3]	***Теорема 9***. [3] *У будь-який трикутник можна вписати коло.* ***Наслідок 1.*** [3] *Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника, тобто є **інцентром**.*
Описане коло	 *Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.* [3]	***Теорема 10.*** [3] *Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.* ***Наслідок 2.*** [3] *Центром кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін.*
Зовні вписане коло	Проведемо у трикутнику *ABC* бісектриси зовнішніх кутів при вершинах *B* і *C).* Точка O_1 перетину рівновіддалена від прямих *AB*, *BC*, *AC* ($O_1M = O_1K = O_1N$). Тому вона є центром кола, яке дотикається до сторони *BC* трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називається ***зовнівписаним.*** [8]	***Теорема 11.*** [8] *Радіус зовнівписаного кола трикутника ABC, що дотикається до його сторони a, дорівнює* $\frac{S}{p-a}$, *де S - площа трикутника ABC, p – його півпериметр.*

Вид кола	***Означення***	***Властивості***
		 ***Теорема 12.*** [8] *Радіус зовні вписаного кола трикутника ABC, що дотикається до його сторони а, можна обчислити за формулами:* $$r_a = \frac{rp}{p-a}, r_a = p \cdot tg\frac{A}{2}$$ $$r_a = (p-a) \cdot ctg\frac{C}{2}$$
Коло Ейлера	У будь-якому трикутнику основи висот, середини сторін і середини відрізків, що з'єднують з вершинами трикутника, лежать на одному колі. Це коло називається ***колом дев'яти точок*** або ***колом Ейлера***. [9] 	*Радіус кола Ейлера вдвічі менший радіуса описаного кола.* [10] $R \geq 2r_e$
Коло Аполлонія	***Колом Аполлонія*** називається  геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є стале.	***Теорема 13.*** [4] *Радіус кола Аполлонія обчислюється за формулою* $$R_a = \frac{mn}{m^2-n^2} \cdot AB$$

Значне місце в системі формування інтелектуальної та творчої особистості школяра приділяється вивченню геометрії як дисципліни, яка володіє величезним гуманітарним та світоглядним потенціалом. Вона розвиває логічне мислення і просторову уяву школярів, має великі можливості для показу сили наукових методів у пізнанні навколишнього світу, з'ясування процесу формування понять і шляхів виникнення, представляє важливу складову математики і є одним з основних компонентів загальнолюдської культури. Однією з базових тем систематичного курсу планіметрії є програмова тема "Трикутники".

Вивчення складових трикутника має велике прикладне і практичне значення та вимагає значної уваги як з боку вчителя та учня, так і з боку викладача та студента.

Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Геометрія трикутника: Навч.-метод. посіб. для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.
2. Математика. Повний повторювальний курс [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.subject.com.ua/mathematics/zno/375.html
3. Істер О. С. Геометрія 7 клас : підручник для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Освіта, 2007. – 159 с.
4. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.
5. Мендель В.В. Теоремы Чевы и Менелая [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://khpms.khspu.ru/wp-content/uploads/M-10-1.doc
6. Теоремы Менелая, Чевы, Ван-Обеля [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://geometry2006.narod.ru/Lecture/Cheva/Cheva.htm
7. Ященко Н.А. История одной задачи [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://portfolioteka.ru/UPLOAD/2014/01/08/lyudmila_anatolevna_yaschenko111.doc
8. Апостолова Г.В. Геометрія 8 клас, дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів /Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2008. – 278 с.
9. Партасюк Н. А. Задачі Ейлера / Партасюк Н. А. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lit.govuadocs.com.ua/docs/1158/index-262255.html
10. Коло Ейлера та пряма Ейлера [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.nnstr.com/Books/book3/book1_2.htm
11. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики / А.Г. Мерзляк – Х.: Гімназія, 2008. – 240 с.

Анотація. Гризун В.О. Лінії в трикутнику. *У статті розглянуті основні положення нової геометрії трикутника: означення, властивості прямих, що вивчаються в школі, тобто медіан, бісектрис, висот, та прямих, що виходять за межі шкільного курсу, ізогональних та рівнокутних. Наведені задачі на використання властивостей останніх прямих.*

Важливим фактом для геометрії трикутника є перетин прямих в одній точці, як-то медіан, бісектрис, висот. Для довільних прямих умова їх перетину в одній точці сформульована в теоремі Чеви, що наведена в статті.

Не менш важливим фактом є належність трьох точок одній прямій. Умова цього міститься в теоремі Менелая, що теж наведено в статті.

Також, у статті наведені означення та властивості різних кіл: вписаного, описаного, зовнівписаного, кола Ейлера та кола Аполлонія. Цю інформацію структуровано в таблиці.

Ключові слова: *трикутник, лінії трикутника, медіана, висота, бісектриса, ізогональні прямі, рівнокутні прямі, коло Аполлонія, коло Ейлера, теорема Чеви, теорема Менелая.*

Аннотация. Гризун В.А. Линии в треугольнике. *В статье рассмотрены основные положения новой геометрии треугольника: определение и свойства прямых, изучаемых в школе, то есть медиан, биссектрис, высот, и прямых, не изучаемых в школьном курсе геометрии, изогональных и равноугольных. Приведены задачи на использование свойств последних.*

Важным фактом для геометрии треугольника является пересечение прямых в одной точке, таким свойством, как известно, обладают медианы, биссектрисы, высоты. и это условие для произвольных прямых сформулировано в теореме Чевы, приведенной в статье.

Не менее важным фактом является принадлежность трех точек одной прямой. Условие этого содержится в теореме Менелая, также приведенной в статье.

Также, в статье поданы определения и свойства различных окружностей: вписанной, описанной, вневписанной, окружности Эйлера и окружности Аполлония. Эта информация структурирована в таблицу.

Ключевые слова: *треугольник, линии треугольника, медиана, высота, биссектриса, изогональние прямые, равноугольные прямые, окружность Аполлония, окружность Эйлера, теорема Чевы и теорема Менелая.*

Abstract. Hryzun V. A. Lines in the triangle. *The article describes the main principles of the new geometry of the triangle. Definitions, properties of direct lines which is studied in school, i.e. medians, bisectors, heights and direct lines that extend beyond the school course: izohonally and equiangular lines. Problems on using characteristics of the latest ones are adduced (presented).*

An important fact for the geometry of the triangle is the intersection of the direct lines at one point, such as medians, bisectors, heights, and this condition for arbitrary direct lines formulated in Ceva's Theorem, which is presented in the article.

Another important fact is when three points are collinear. The condition of that is covered in Menelaus theorem, which is presented in the article too.

Besides, in the article the definition and properties of various circles: refines, described, excircle, Euler's circle and the circle of Apollonius are given in the article. This information is structured in a table.

Keywords: *line of the triangle, the median, altitude, bisector, isogonally direct, conformal lines, circles Apollonius, circle of Euler's, Cave`s theorem and the theorem of Menelaus***.**