

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Можна Леся Григорівна

**ВПРОВАДЖЕННЯ ДИСТАНЦІЙНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ УЧНІВ
ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»**

Спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеню магістр

Науковий керівник:

_____ О.В. Мартиненко,
кандидат фіз-мат наук, доцент кафедри
математики, фізики та методик їх навчання
«____» _____ 2021 року

Виконавець:

_____ Л.Г.Можна
«____» _____ 2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИСТАНЦІЙНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ	8
1.1. Технологія організації дистанційного навчання математики учнів старшої школи. Нормативно-правове регулювання освітнього процесу при дистанційному навчанні.....	8
1.2. Форми роботи з учнями при дистанційному навчанні	15
1.3. Психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи в контексті дослідження.....	26
1.4. Особливості використання Google-сервісів та інших систем дистанційної освіти при навчанні математики учнів старшої школи	34
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ.....	40
2.1. Аналіз навчальних програм і підручників з теми	40
2.2. Основний зміст навчального матеріалу з теми	47
2.3. Методичні рекомендації щодо проведення уроків з теми «Похідна та її застосування» при дистанційній формі навчання.....	58
2.4. Організація перевірки знань учнів з теми в умовах дистанційної форми навчання. Організація самостійної роботи учнів.....	76
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	80
ДОДАТКИ	89

ВСТУП

Актуальність теми. Постіндустріальний час, в якому наше суспільство нині існує, характеризується стрімким поширенням інформаційних технологій, яке почалося в 1970-х рр. зі зростанням важливості комунікаційних мереж і супроводжувалося процесами оцифрування даних. У XXI ст. означені тренди стали невіддільною частиною повсякденного життя і обумовили появу принципово нових способів навчання, спілкування і професійної діяльності, які базуються на інформаційних/цифрових технологіях. Однією із суттєвих особливостей сучасного етапу суспільного розвитку стала глобальна боротьба людства з пандемією, спричиненою вірусом COVID19. За таких умов основою освітнього процесу є дистанційні освітні технології, активна реалізація яких нині здійснюється у всіх закладах освіти, зокрема закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО).

Наразі дистанційне навчання школярів пропонується використовувати щодо базових курсів різних навчальних дисциплін; у рамках додаткової освіти (елективні курси та спецкурси з різних дисциплін); у позакласній роботі (мережеві олімпіади, вікторини, турніри школярів). Однією з переваг дистанційного навчання є реальна можливість найбільш повного врахування індивідуальних особливостей учнів та їх освітніх потреб при організації навчального процесу, зокрема, самостійної роботи учнів та створення успіху для кожного учня.

Особливості нормативно-понятійного аспекту дистанційного навчання відображені в Законі України «Про освіту», Державному стандарті базової і повної середньої освіти, навчальних програмах, методичних листах МОН щодо вивчення навчальних предметів та ін. Про нові вимоги до структури змісту освіти і умов реалізації освітнього процесу в умовах розвитку інформаційного суспільства наголошено в указах Президента України «Про заходи щодо розвитку національної складової глобальної інформаційної мережі Інтернет та забезпечення широкого доступу до цієї мережі в Україні», «Про невідкладні заходи щодо забезпечення та розвитку освіти в Україні», «Про додаткові заходи

щодо підвищення якості освіти в Україні», Концепції розвитку цифрової економіки та суспільства України на 2018 – 2020 рр., основною метою якої є реалізація ініціатив «Цифрового порядку денного України 2020», що охоплює широкий спектр напрямів, одним із яких є сфера освіти, та інші державні документи, спрямовані на забезпечення відповідних умов для ефективного використання інформаційних технологій з метою вдосконалення освітнього процесу на всіх рівнях освіти, у тому числі й у старшій школі.

Численні дослідження (Е.С. Полат, І.В. Роберт, А.В. Хуторський, Н.А. Варданян, С.М. Суханова, Н.В. Шкарупа та ін.), присвячені розробці методики використання дистанційних форм навчання у школі, висвітлюють проблеми, які виникають при впровадженні цифрових технологій у освітній процес.

Математика як навчальна дисципліна має великі можливості для реалізації дистанційного навчання, оскільки використання цифрових технологій дозволяє посилити прикладну та практичну спрямованість курсу математики та створює умови для реалізації індивідуального підходу на якісно новому рівні, надає додаткові можливості (обчислювальні, графічні, візуалізаційні, довідково-інформаційні) процесу навчання.

У результаті аналізу теорії та практики дистанційного навчання школярів можна наголосити на необхідності вирішення наступних питань: як організувати навчання математики, що підвищує рівень засвоєння навчального матеріалу та рівень самостійної діяльності учнів; яким має бути зміст навчального матеріалу, реалізованого засобами дистанційного навчання, та за якими критеріями необхідно здійснювати його добір; як організувати самостійну роботу учнів з урахуванням їх пізнавальних потреб в умовах застосування дистанційних методів навчання; яку дистанційну технологію доцільно покласти основою дистанційного навчання школярів; які при цьому засоби навчання та засоби взаємодії педагога та учнів найбільш ефективні тощо. Усе це вказує на актуальність проблематики дослідження й широкий простір для наукових, методичних і практичних досліджень.

Мета дослідження полягає в дослідженні особливостей дистанційної форми навчання математики учнів старшої школи, зокрема, теми «Похідна та її застосування».

Мета дослідження реалізується виконанням таких тактичних завдань:

1) описати технологію організації дистанційного навчання математики учнів старшої школи та нормативно-правове регулювання освітнього процесу під час дистанційного навчання;

2) охарактеризувати основні форми організації діяльності учнів при дистанційній формі навчання;

3) з'ясувати психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи, що виникають під час дистанційного навчання математики;

4) виявити специфіку використання Google-сервісів та інших інформаційних систем при навчанні математики учнів старшої школи;

5) розглянути методичні особливості дистанційної форми навчання учнів теми «Похідна та її застосування», зокрема:

- навчальні програми та підручники з теми, основний зміст навчального матеріалу з теми;

- організаційні форми проведення уроків з теми під час дистанційного навчання;

- форми перевірки знань учнів з теми та організації їх самостійної роботи;

6) підготувати практичні розробки з теми дослідження.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої школи.

Предмет дослідження – особливості навчання учнів теми «Похідна та її застосування» в умовах упровадження дистанційної форми навчання.

Методи дослідження. Для виконання поставлених завдань використано наступні методи:

- теоретичні – аналіз, систематизація, узагальнення, які дозволяють опрацювати нормативні, наукові та навчально-методичні джерела, проаналізувати методику і практику дистанційного навчання математики учнів старшої школи;

– емпіричні – спостереження, бесіди зі вчителями, що працюють у старших класах; вивчення матеріалів навчальної та педагогічної діяльності, які забезпечують дослідження стану і визначення перспективних напрямків використання різних форм дистанційного навчання математики учнів старшої школи.

Наукова новизна дослідження полягає в узагальненні й систематизації науково-методичних відомостей про особливості і методику упровадження дистанційних форм навчання математики учнів старшої школи.

Практичне значення одержаних результатів пов'язане з їх використанням у практично-педагогічній діяльності вчителів математики закладів загальної середньої освіти, методистів, викладачів, учнів, всіх, хто цікавиться вивченням математики.

Апробація результатів. Основні положення та результати дослідження були представлені для обговорення на Звітній студентській науково-практичній конференції фізико – математичного факультету Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка 28 - 30 квітні 2021 року.

Публікації. Основні результати дослідження опубліковані в збірнику матеріалів:

- Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. – Випуск 15. – Том 1. – 72 с.
- Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. – Випуск 15. – Том 2. – 45 с.

Робота складається зі вступу, двох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел (82 позиції), додатків.

У першому розділі роботи розглянуто теоретичні основи дистанційної форми навчання математики учнів старшої школи, зокрема: технологію

організації та нормативно-правове регулювання, основні форми роботи з учнями та психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи, що виявляються під час дистанційного навчання математики; специфіку використання Google-сервісів та інших інформаційних систем дистанційної освіти.

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості дистанційного навчання учнів теми «Похідна та її застосування», а саме: навчальні програми та підручники, основний зміст навчального матеріалу; організаційні форми проведення уроків, форми перевірки знань учнів та організацію їх самостійної роботи.

У висновках узагальнено й систематизовано основні результати роботи, зроблено рекомендації по використанню отриманих результатів, визначено перспективи подальших досліджень.

Загальний обсяг роботи – 114 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИСТАНЦІЙНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

1.1. Технологія організації дистанційного навчання математики учнів старшої школи. Нормативно-правове регулювання освітнього процесу при дистанційному навчанні

Сучасний учитель повинен уміти формувати за допомогою інформаційних технологій освітнє середовище, що забезпечує належний рівень навчання, моделювати індивідуальні траєкторії навчання та розвитку учнів, а також власний маршрут професійного зростання [72].

Дистанційна освіта – це можливість навчатися та отримувати необхідні знання віддалено від навчального закладу. Вона використовує усі стандартні складові (методичні матеріали, цілі, зміст, організаційні форми, технологічні засоби та контроль), але у форматі інтерактивної віддаленої взаємодії, за допомогою Internet-технологій. Сучасні технології дають нам можливість вчити те, що нам цікаво, використовувати найновішу інформацію та дозволяють нам зробити своє життя кращим[32].

Однією з технологій, що використовуються у процесі навчання, виступають дистанційні освітні технології, які базуються на використанні інформаційно-комунікаційних технологій, впевнено входять до практики діяльності багатьох закладів освіти. Оскільки однією з головних її рис є незалежність від географічного розташування, від відстані між викладачем та тим, хто навчається, її назвали дистанційною (похідне від англ. distance — відстань, видалення), тобто навчання з відривом [79].

Зараз, у період карантинних обмежень, дистанційне навчання є особливо важливим при навчанні математики, яка не може існувати без пояснень і наочного супроводу. Зрозуміло, що головним елементом дистанційного

навчання є комп'ютер та Інтернет, тому в роботі вчителя не можливо обійтись без використання ІКТ.

У «Педагогічному енциклопедичному словнику» дистанційна освіта сприймається як технологія цілеспрямованого та методично організованого керівництва навчально-пізнавальною діяльністю учнів (незалежно від рівня, одержуваної ними освіти), які проживають на відстані від освітнього центру, яка може бути використана за будь-якої формі навчання [33].

Ряд авторів визначають дистанційне навчання як навчання: коли учні відділені від навчального закладу відстанню [35]; або як освітню технологію, за якої кожна людина, яка проживає в будь-якому місці, отримує можливість вивчити програму будь-якого коледжу чи університету [23]; або як нову форму здобуття освіти, що базується на принципі самостійного навчання студента [17].

Дистанційне навчання як самостійну форму організації навчального процесу визнають багато вітчизняних дослідників: В.Ю.Биков, Є.Ю.Володимирська, Н.Б.Євтух, В.О.Жулкевська, С.А.Калашнікова, М.Ю.Карпенко, С.П.Кудрявцева, Є.С. Полат, Н.Г. Сиротенко, Є.М.Смирнова-Трибульська, П.В. Стефаненко, В.П. Тихомиров, О.В. Хміль, А.В. Хуторський, Б.І. Шуневич та ін.. Таку думку поділяють і закордонні вчені: М. Алєн, Т.Андерсон, Дж. Боат, Ф. Ведемер, Д. Р. Гаррісон, Дж. Данієль, Р. Деллінг, Д.Кіган, М. Мур, О. Петерс, К. Сміт, Р. Холмберг та ін. Вони розглядають дистанційне навчання як:

- спосіб навчання на відстані, при якому викладач та учні фізично знаходяться в різних місцях і використовують аудіо-, відео-, інтернет- та супутникові канали зв'язку в навчальних цілях [28];

- цілеспрямований, організований у специфічній дидактичній системі процес інтерактивної взаємодії учнів та вчителів із застосуванням засобів навчання, інваріантних до їх розташування у просторі та часі [3];

- телекомунікаційне навчання, яке здійснюється в основному за допомогою технологій та ресурсів мережі Інтернет і при якому віддалені один від одного суб'єкти (учні, викладачі, тьютори, модератори та ін) здійснюють

освітній процес, що супроводжується їх внутрішніми змінами (прирощеннями) та створенням освітньої продукції [56].

А.А.Андрєєв пропонує визначати дистанційне навчання як «цілеспрямований процес інтерактивної взаємодії тих, хто навчає, та тих, які навчаються, між собою та із засобами навчання. Він інваріантний (індиферентний) до розташування суб'єктів навчання у просторі та часу та реалізується у специфічній дидактичній системі» [23].

За визначенням А.В. Зубова «дистанційне навчання – це нова форма організації навчального процесу, що поєднує в собі традиційні та нові інформаційні технології навчання, що ґрунтується на принципі самостійного здобуття знань. Воно переважно передбачає телекомунікаційний принцип доставки учням основного навчального матеріалу. Цей принцип лежить в основі інтерактивної взаємодії учнів та викладачів як безпосередньо в процесі навчання, так і при оцінці отриманих ними у процесі навчання знань та навичок» [20].

Є.С. Полат визначає дистанційне навчання як сукупність інформаційних технологій, що забезпечують доставку учням основного обсягу матеріалу, що вивчається, інтерактивна взаємодія учнів та вчителів у процесі навчання, надання учням можливості самостійної роботи з освоєння досліджуваного навчального матеріалу [37].

Згідно Г.В. Можасової, дистанційне навчання є інформаційно-освітньою системою віддаленого доступу, засновану на сучасних інформаційних технологіях [11].

Б.Є. Стариченко визначає дистанційне навчання як асинхронну форму вивчення навчальної дисципліни, яка передбачає самостійне засвоєння учнями спеціально організованих навчальних матеріалів та оперативний доступ до них; контроль та управління навчальною діяльністю здійснюється віддаленим викладачем [52]. До визначення даються такі пояснення:

– асинхронна форма – процес навчання відбувається у кожного учня незалежно від інших,

- самостійне засвоєння – зміна ступеня взаємодії з іншими учасниками освітнього процесу,
- спеціально організовані навчальні матеріали – охоплення всіх типів матеріалів для всіх видів навчально-пізнавальної діяльності,
- оперативний доступ – у будь-який час із зручного для учня місця[59].

На основі представлених визначень можна виділити такі підходи до визначення поняття дистанційне навчання:

- спосіб навчання на відстані, при якому викладач та учні фізично перебувають у різних місцях; використання аудіо, відео, інтернет та супутникових каналів зв'язку в навчальних цілях;
- цілеспрямований, організований процес інтерактивної взаємодії учнів та учнів між собою та із засобами навчання, інваріантний до їх розташування у просторі та часі, який реалізується у специфічній дидактичній системі;
- навчання за допомогою засобів телекомунікацій, завдяки яким віддалені один від одного суб'єкти навчання (учні, викладачі, тьютори, модератори та ін.) здійснюють освітній процес, що супроводжується виробництвом освітньої продукції та їх внутрішніми змінами (прирошеннями);
- сучасне дистанційне навчання здійснюється в основному за допомогою технологій та ресурсів мережі Інтернет.

У Наказі Міністерства освіти і науки України «Про затвердження Положення про дистанційне навчання» подано таке трактування: «дистанційне навчання – індивідуалізований процес набуття знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності людини, який відбувається, в основному, за опосередкованої взаємодії віддалених один від одного учасників навчального процесу в спеціалізованому середовищі, яке функціонує на базі сучасних психолого-педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій» [64]. Саме на це тлумачення ми будемо спиратися у нашому дослідженні.

Поняття «інформаційні технології» (ІТ) є багатозмістовним.

У роботі вважаємо за доцільне прийняти визначення М.Жалдака, розуміючи під ІТ «сукупність методів і технічних засобів збирання, організації, зберігання, обробки, передачі, подання інформації, які розширюють знання людей і розвивають їх можливості управління технічними і соціальними процесами» (рис. 1.1).

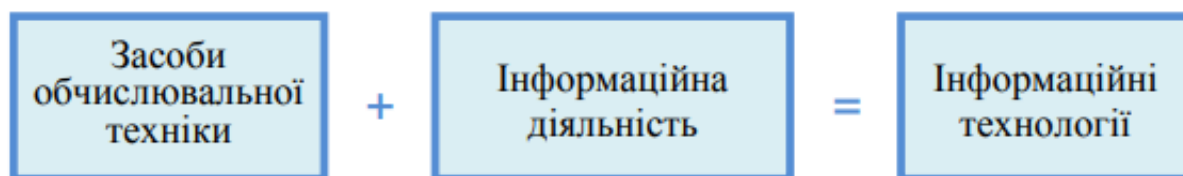


Рис. 1.1. Поняття інформаційних технологій

С. Дятлов [51] виділяє сім етапів розвитку суспільства, які характеризуються певним типом інформаційних технологій:

- 1) усно-мовленнєва ІТ, яка пов'язується з виникненням мови і мовлення як способу ефективної комунікації та організації взаємин між людьми;
- 2) писемна, яка характеризується періодом виникнення й становлення писемності і граматичних правил мови через технології письма для передавання або ж відтворення повідомлень чи знань (наочні символи, спеціальні знаки, рукописи тощо);
- 3) друкарська (книжна) технологія співпадає з періодом виникнення технологій друку, коли повідомлення і знання передавалися за допомогою друкованих книг ;
- 4) радіотелеграфна (електромагнітна) технологія характеризується періодом появи телеграфу, телефону, радіо і телебачення, коли передача даних стала значно швидшою та передбачала при цьому оперування значними обсягами, швидке оброблення і накопичення інформації завдяки застосуванню електромагнітних сигналів;

5) комп'ютерна технологія – період, коли для передачі, обробки і відтворення даних почали використовувати електронні обчислювальні машини;

6) глобальна комп'ютерно-мережева технологія пов'язана з розвитком і поширенням телекомунікаційних і космічних мереж (поява оптико-волоконних каналів передавання сигналів, приймально-передавального обладнання);

7) універсальна інформаційно-мережева біоквантова технологія, в еру якої ми живемо, характеризується масштабним використанням цифрових технологій передавання й відтворення інформації. Поява і розвиток квантових комп'ютерів сприяють і обумовлюють розвиток універсальної глобальної гуманітарно-комп'ютерної (біоквантової) мережі для збирання, оброблення, відтворення й використання світових даних в різних сферах людської діяльності.

Останній етап обумовлений появою цифрових технологій (ЦТ, з англ. Digital technology) – технологій, які засновані на дискретному представленні сигналів, до яких відносять електронну пошту, Інтернет, мобільні телефони, MP3-програвачі, комп'ютери, робототехніку, вимірювальні прилади, радіо- і телекомунікаційні пристрої та багато інших. Саме тому поняття «цифрові технології» є складовою частиною поняття «інформаційні технології» (рис.1.2).



Рис. 1.2. Співвідношення понять

Крім цього, останнім часом постає потреба використовувати не тільки друковані, а й електронні освітні ресурси (ЕОР) або ж цифрові освітні ресурси (ЦОР). Природно вважати, що таке зміщення акцентів може вплинути на інтенсивність та ефективність процесу навчання, забезпечення індивідуалізації

та диференціації навчального процесу, самостійність роботи молоді, розвиток в них культури використання інформаційних технологій і засобів тощо.

Слід звернути увагу і на те, що розвиток системи освіти, в контексті політики інформатизації, пов'язаний зі значною кількістю нормативних, аналітико-статистичних документів, цільових і пріоритетних програм (додаток А).

Отже, організація освітнього процесу з використанням дистанційних освітніх технологій за нормативними документами має такі характеристики [14]:

- поділ процесів викладання та навчання у часі та просторі;
- освоєння учнями освітніх програм за місцем проживання при домінанті самостійної роботи, з періодичними зустрічами групи учнів;
- широке використання оглядового навчання, що реалізується за допомогою оглядових лекцій, що допомагає учню створити цілісну картину досліджуваної галузі знань та діяльності;
- використання модульного принципу, що передбачає поділ навчального предмета на логічно замкнуті блоки, звані модулями, в рамках яких проходить як вивчення нового матеріалу, так і контрольні заходи щодо перевірки його засвоєння;
- керування самостійною роботою учня засобами освітнього закладу за допомогою навчальних планів, спеціальним чином підготовлених навчально-методичних та навчальних матеріалів та спеціальних процедур контролю;
- обов'язкове застосування інформаційно-комунікаційних технологій для передачі знань, опосередкованої, діалогової та інтерактивної взаємодії суб'єктів навчання та вирішення адміністративних завдань;
- створення особливого інформаційно-освітнього середовища, що включає різні цифрові та електронні навчальні продукти – від електронного підручника до комп'ютерних навчальних програм, слайд-лекцій та аудіо- та відеокурсів тощо.

1.2. Форми роботи з учнями при дистанційному навчанні

Форма навчання – це зовнішнє вираження спільної діяльності учнів і вчителя, що здійснюється в певному режимі і порядку [80].

У наукових і навчально-методичних джерелах пропонуються різні класифікації форм навчання (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Класифікації форм навчання

Ми схильні, без додаткових корекцій, прийняти до користування практично зручну тривимірну класифікацію форм організації навчання, запропоновану І. Лов'яною [37] (рис. 1.4).

загальні форми	зовнішні форми	внутрішні форми
<ul style="list-style-type: none"> індивідуальна, парна, групова, колективна, фронтальна 	<ul style="list-style-type: none"> урок, семінар, лекція, конференція, самостійна робота, екскурсія 	<ul style="list-style-type: none"> вступне заняття, урок формування практичних навичок, урок узагальнення і систематизації знань, урок контролю знань, умінь і навичок, комбінований урок

Рис. 1.4. Тривимірна класифікація форм організації навчання за І. Лов'яною

Ставлення науковців, педагогів, суспільства до впровадження дистанційних технологій в освітній процес, як показав період дистанційного навчання під час карантинних заходів у 2020-2021 роках в Україні, не є однозначним. Це дало змогу виявити відсутність єдиного погляду на повну інформатизацію та цифровізацію освіти, адже в результаті цих прогресивних на перший погляд процесів отримуємо досить негативний ланцюжок: комп'ютерна індивідуалізація → ізоляції суб'єктів навчання → віддалення їх від закладу освіти, відірваність від реального навчального процесу → відсторонення від спільного досягнення результатів навчання. За цих умов досить складно передбачити виховний аспект освітнього процесу, адже виховні впливи Інтернету є складно прогнозованими.

Особливістю упровадження дистанційних форм навчання є інтеграція різних моделей навчання. Це пов'язано з орієнтацією на конкретні потреби користувачів, якими є суб'єкти навчання. Так, для аналізу ресурсів платформ А.Бухачовський, С.Ковальчук, Г.Тарнавський використовують модель становлення хмарних обчислень Cloud Computing Maturity Model (CCMM). Вони виокремлюють два покоління технологій і 5 рівнів [65]. Технології I покоління є загальновизнаними і забезпечують консолідацію, абстрагування, автоматизацію використання ресурсів: PaaS (англ. Platform as a Service) – платформа як послуга; IaaS (англ. Infrastructure as a Service) – інфраструктура як послуга; SaaS (англ. Software as a Service) – ПЗ як послуга. Технології II

покоління є продовженням розвитку I покоління й орієнтовані на удосконалення та підтримку хмарних сервісів та поширення сервісів у хмарках IV, V та VI рівнів DaaS (англ. Data as a Service) – дані як послуга; WaaS (англ. Workplace as a Service); AaaS (англ. All as a Service) – все як послуга – робоче місце як послуга. Вони покликані забезпечувати управління цілою екосистемою обчислень, програмних та інформаційних ресурсів. Розвиток ХТ настільки стрімкий, що поява нових їхніх рівнів не є дивиною. Нині дослідники, зокрема О.Прохоров, О.Назаренко розглядають можливості рівня EaaS (everything as a service – «все як сервіс»). Науковці О.Кузьмінська, Н. Морзе, О. Свириденко, О. Спірін досліджують сервісні моделі I покоління SPI Model (Saas, PaaS, IaaS) з надання освітніх хмарних послуг і вважають їх визначальними [38, 58]. Загалом технології SaaS, PaaS, IaaS, DaaS, WaaS, AaaS є актуальними.

Нині у психолого-педагогічній літературі виокремлюють такі терміни, як «електронне навчання» та «мобільне навчання» як форми дистанційного навчання. Розглянемо їх детальніше.

Під терміном *«електронне навчання»* розуміють таку організацію освітньої діяльності, яка базується на електронних базах даних, технічних засобах, а також інформаційно-телекомунікаційних мережах, які в своїй сукупності забезпечують передачу по лініях зв'язку навчальної інформації та її результатів, забезпечуючи тим самим обернений зв'язок [59].

При цьому, згадується, що використання подібних технологій освітніми організаціями не повинно суперечити державній політиці і відповідним нормативно-правовим актам [23].

Організація електронного навчання можлива за умови організації інформаційно-освітнього середовища, де основним засобом навчання виступають ЦОР.

Інформаційно-освітнє середовище (ІОС) у ЗЗСО найчастіше асоціюється у дослідників з програмними комплексами, системами і тренажерами, що імітують процеси в сфері точних наук [70]. Значна частина наукових публікацій з проблематики організації\використання інформаційно-освітніх середовищ,

стосуються обговорень апаратного і програмного забезпечення і оціночного аналізу різноманітних варіантів застосування нових освітніх технологій [33]. Інформаційно-освітнє середовище повинне складатися з: електронних інформаційних ресурсів, електронних освітніх ресурсів, сукупності інформаційних технологій, телекомунікаційних технологій, відповідних технологічних засобів і повинне забезпечувати освоєння освітніх програм в повному обсязі незалежно від територіального місця знаходження учнів.

Основними компонентами інформаційного освітнього середовища ЗЗСО в більшості випадків є:

- предметні інформаційно-освітні складові (бібліотечні фонди освітньої установи, мультимедійні аудиторії з можливістю доступу в мережу Інтернет, сукупність навчально-методичних робіт і посібників, електронні підручники і оцифровані бібліотечні фонди, комплекс тестових завдань, дистанційні освітні інтернет-репозитарії, мультимедійні лабораторні комплекси тощо) [56];
- комунікаційні засоби навчання (електронне, технічне і програмне забезпечення, автоматизовані системи контролю знань і т.д.);
- системи управління освітнім процесом (аналітико-статистичні системи обліку контингенту, навчально-методичні комплекси, індивідуальні траєкторії навчання, модульний принцип побудови електронних курсів, розробка і впровадження в навчальний процес нових перспективних технологій навчання, безперервний супровід науково-дослідницької роботи).

Кожен з перерахованих компонентів інформаційного освітнього середовища освітньої установи в більшості випадків є мікросередовищем, всередині якого ті, хто навчаються, можуть здійснювати навчальну діяльність і всебічно розвиватися в професійних областях знань, здійснювати власне особистісне самовдосконалення і формувати комплекс, вкрай необхідних в сучасному світі, підсумкових компетенцій [64].

Аналізуючи представлені вище компоненти інформаційного освітнього середовища, слід особливо виділити одну з її складових частин – електронні освітні ресурси (ЕОР) як основний первинний елемент всієї структури. При

аналізі практичної професійної діяльності вчителів найчастіше виділяють два основні пріоритети в розумінні ключової суті електронних освітніх ресурсів.

У першому випадку характеристика поняття «електронний ресурс» дозволяє дослідникам провести віртуальну аналогію між будь-яким видом навчального матеріалу, представленого в електронній формі і безпосередньо електронним освітнім ресурсом. Відомі дослідники даної тематики стверджують, що до електронного освітнього ресурсу слід відносити практично будь-який інформаційний продукт, відтворений за допомогою комп'ютера. Це може бути інтерактивне тестове завдання, запис відеолекції або навіть відсканований вид методичного посібника [50].

У другому випадку електронний освітній ресурс розглядається дослідниками, як комплексний феномен, тобто як системний тематично вибудований навчальний матеріал, представлений в інформаційній мережі. У той же час, прихильник даного напрямку розуміння сутності електронних освітніх ресурсів, А. Телегін стверджує, що під цим терміном мається на увазі комплексна система, пропонує до вивчення за допомогою використання електронної (комп'ютерної) техніки: упорядкованого в форматі освітньої траєкторії матеріалу, який передбачає активне освоєння сукупності знань і практичних навичок з дисципліни, яка вивчається [56]. Поява мобільного освітнього процесу виникла порівняно недавно у відповідь на поширення мобільних пристроїв та безпроводного доступу до інформаційних ресурсів. Його вважають різновидом електронного навчання [41], який передбачає використання мобільних пристроїв для задоволення освітніх потреб особистості.

Мобільне навчання також кваліфікують як будь-яке навчання, що відбувається, коли учень не перебуває у фіксованому, наперед визначеному місці, або навчання, коли учень використовує навчальні можливості мобільних технологій [72].

Відмінністю мобільного навчання від інших освітніх технологій є використання мобільного пристрою як основного засобу навчання та доступу

до інформаційно-освітніх ресурсів. Навчання може проходити незалежно від місцезнаходження суб'єктів навчання – в аудиторії або поза її межами.

Використання у процесі навчання мобільного пристрою регламентується упровадженням концепції BYOD (Bring Your Own Device – «принеси свій власний пристрій»). Концепція BYOD передбачає не тільки можливість користуватися власними пристроями, але й підключатися до мережі, використовувати наявні в певній організації інформаційні ресурси. В освітньому закладі основна ідея полягає в тому, що адміністрація та викладачі не забороняють використання пристроїв на заняттях, але заохочують і мотивують учнів приносити та використовувати власні пристрої для навчання.

Організація мобільного навчання має низку позитивних аспектів (рис.1.5).

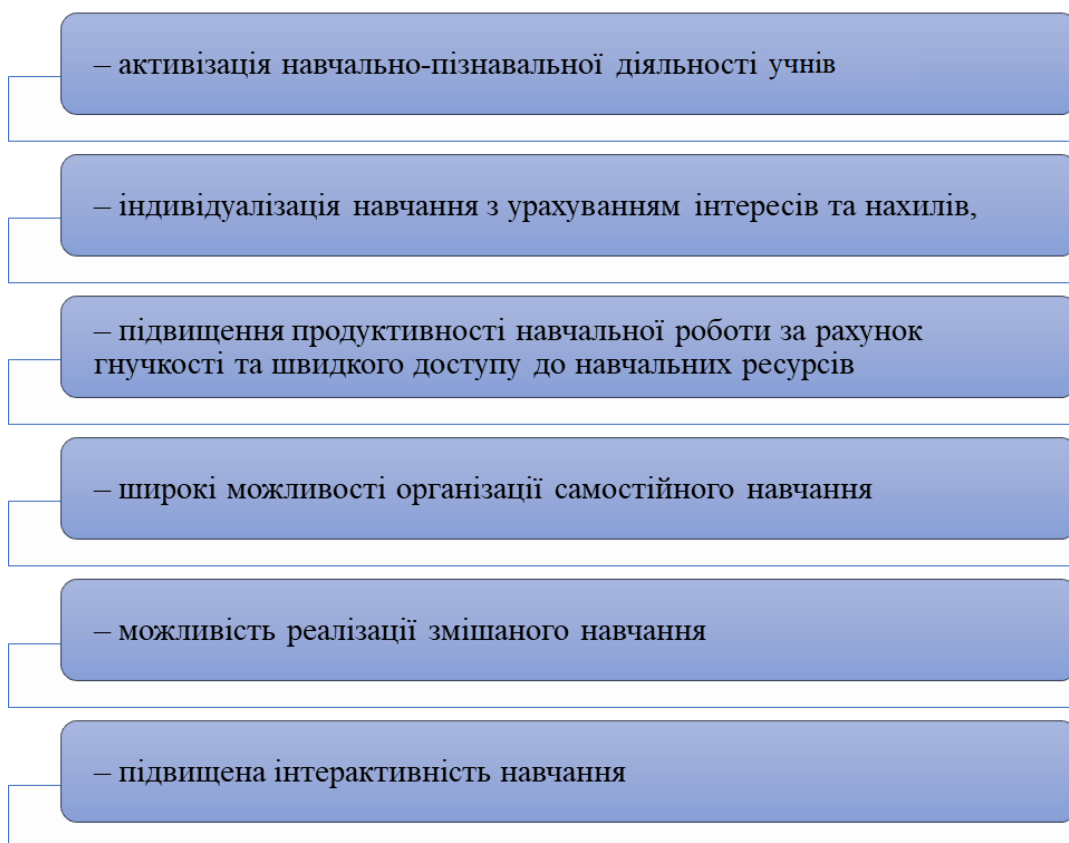


Рис.1.5. Позитивні аспекти використання мобільного навчання

Мобільне навчання в умовах шкільного заняття дає змогу ініціювати такі форми, які реалізують навчальну взаємодію усіх учасників освітнього процесу як колективно, так і при організації самостійної роботи.

У даному випадку, слід звернути увагу на те, що не зважаючи на достатню популярність, модернізацію сфери застосування дистанційних технологій в освіті, розширення їх можливостей і відокремлення від традиційних технологій в освіті, повністю дистанційні освітні курси (по своїй суті – заочне навчання) викликають певну недовіру: як у індивідуальних споживачів освітніх послуг, так і у освітніх організацій. Тому, на сучасному ринку освітніх послуг, в умовах інформатизації освіти, величезне значення набуває використання змішаної системи навчання, при якій застосовуються як елементи традиційного підходу, реалізовані через особистий контакт вчителя з учнем, так і дистанційна форма самостійної роботи підлітка засобами електронної взаємодії.

Історія виникнення терміну «дистанційне навчання» бере свій початок в 90-х роках XX століття з появою мережі Інтернет. Одна з перших згадок з'явилася в прес-релізі компанії Interactive Learning Centers, в якому стверджувалося, що компанія починає пропонувати online курси [29].

Багато авторів зазначають, що ключовим моментом і основною суттю дистанційного навчання є вибір правильного поєднання способів донесення матеріалу, організації освітнього процесу та застосовуваних технологій в раціональному змішуванні форм і методів навчання.

При цій системі навчання необхідним є впровадження в освітній процес електронних\цифрових освітніх ресурсів. Однак, слід розуміти, що електронні технології не повинні розпадатися на «засоби навчання», коли можна говорити лише про використання деяких елементів таких технологій в процесі навчання. У даному випадку, до електронних освітніх ресурсів відносять:

- технології надання навчальної інформації (підручники, посібники, мультимедійні освітні ресурси, віртуальні лабораторні практикуми, інтерактивні тренажери, системи комп'ютерного тестування);
- технології доступу до електронних освітніх ресурсів (мережеві і локальні);

– технології організації педагогічного взаємодії (тьюторський супровід, побудова індивідуальних траєкторій, здійснення діалогу, який передбачає синхронний або асинхронний «зворотний зв'язок») [57].

На традиційних щорічних найбільших міжнародних конференціях з нових освітніх технологій і методик «EdCrunch» були проведені всебічні огляди наявних освітніх концепцій [49; 51], що стосуються завдань навчання з використанням електронних освітніх ресурсів.

За підсумками участі в даних конференціях і аналітичного огляду їх результатів, були виявлені наступні ключові концепції сучасного використання ЕОР в системі освіти:

- перспективи адаптивного навчання [6] (застосування будь-якого виду сторонніх або власних електронних ресурсів при позааудиторних заняттях у «віртуальних класах» засобами освітніх online майданчиків);

- популяризація масових відкритих онлайн-курсів (публікація відео-уроків на спеціальних порталах, наприклад, зарубіжних сайтах «Coursera» і «EdX», «Відкрита освіта», «ИНТУИТ», «Prometheus» тощо з подальшим виконанням слухачами завдань і отриманням сертифікатів в разі успішного завершення навчання);

- синхронне і асинхронне навчання (разова участь в освітньому процесі через спеціальні ресурси або формування проблемного поля і освітнього контенту для досягнення поставлених цілей) [33];

- використання переваг змішаного навчання [38, 52, 56] (поєднання інтерактивних можливостей мережі Інтернет з реальним аудиторним навчанням за допомогою внутрішньокампусних електронних ресурсів);

- концепція «перевернутий клас» або технологія «випереджувального знання» (зміна позицій традиційної аудиторної форми занять в розділах «засвоєння нового матеріалу» і «закріплення матеріалу»: освоєння матеріалу здійснюється самостійно вдома, а на заняттях відбувається виконання практико орієнтованих завдань) [29];

- навчання, що самостійно спрямовується (технологія для високомотивованих студентів/учнів, при якій студент/учень самостійно приймає рішення про поточні освітні завдання, формулює цілі і визначає джерела отримання знань: в даній концепції важливий в більшій мірі процес, ніж результат) [31];

- система управління навчальним процесом «Learning Manage System» (викладач отримує можливість управляти навчальним процесом з будь-якого електронного гаджета, за власним розсудом розміщувати навчальні матеріали, проводити тестування і обговорення з учнями в синхронному режимі);

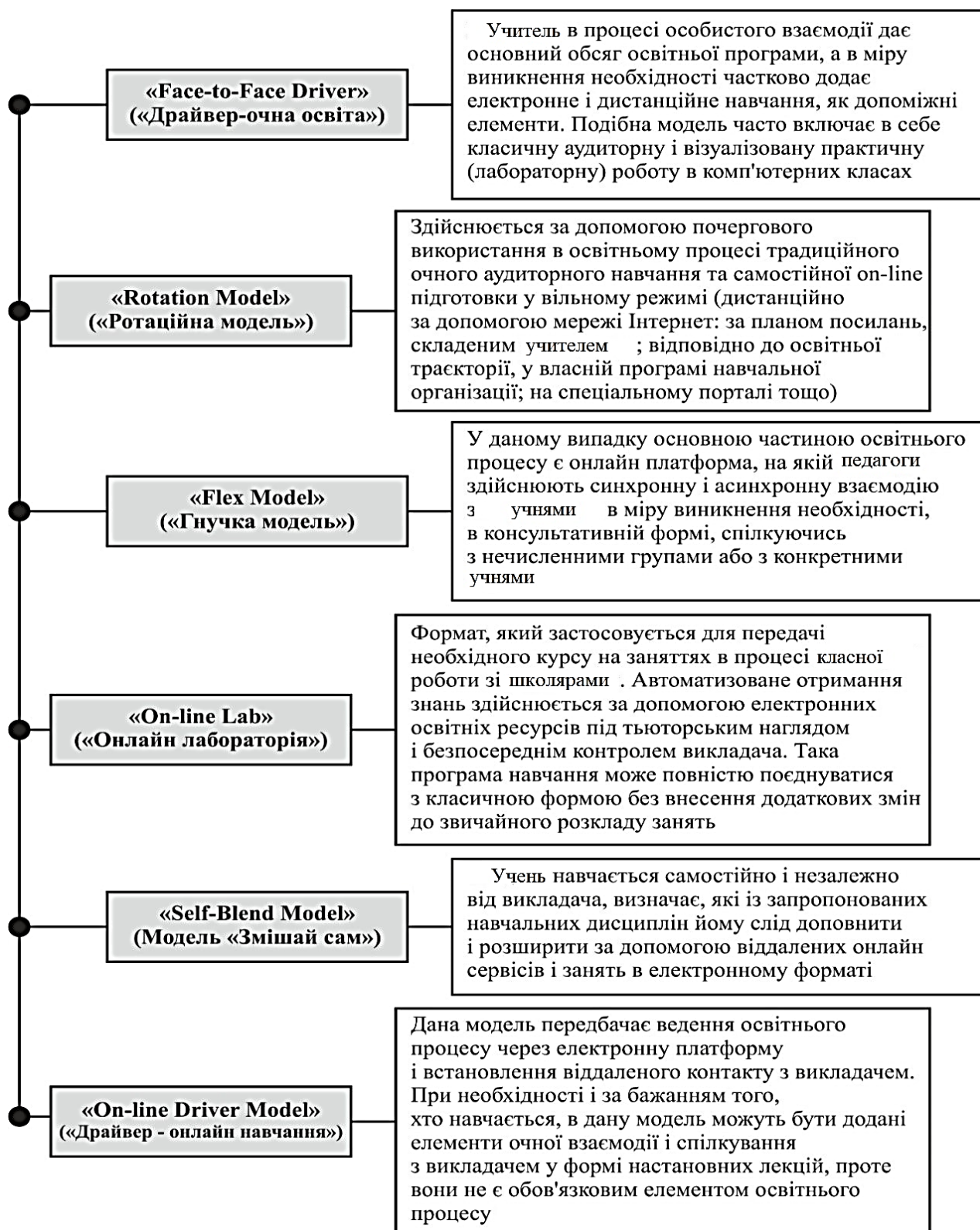
- «хмарне навчання» (застосування інтерактивних можливостей одночасно з аудиторних навчанням, при якому кілька комп'ютерів можуть працювати як один сервер, дозволяючи зберігати загальний файл в «хмарі» і піддавати його одночасної редакції декількох користувачів: така технологія корисна, в першу чергу, при веденні дослідницької і проєктної роботи, а також при формуванні колективних сховищ освітніх ресурсів) [47];

- мобільне навчання (використання різних мобільних пристроїв в процесі аудиторного і позааудиторного навчання, засноване на технологіях додаткової реальності і функціонує на базі вебдодатків) [35];

- технологія «1:1» (використання персонального пристрою в процесі навчання кожного, при якому конкретний заклад освіти не витрачає додаткових ресурсів на забезпечення і технічну підтримку мобільних класів (аудиторій), а учень має можливість виконувати освітні завдання в будь-якому місці) [67];

- гейміфікація (застосування ігрових форм навчання, кейсів і квестів в освітній діяльності, при яких викладач є основним модератором ігрового процесу) [55].

Отже, на сьогоднішній день в світі існує шість найбільш популярних форм дистанційного навчання з різними педагогічними акцентами, освітніми потребами та обсягами інвестиційних витрат (рис. 1.6).



**Рис. 1.6. Форми організації роботи учнів
під час дистанційного навчання**

При цьому для використання таких моделей дистанційного навчання слід окреслити використовувані методи, форми та засоби навчання (табл.1.1.).

Таблиця 1.1

Робота з учнями під час дистанційного навчання

Модель дистанційного навчання	Методи, форми та засоби навчання
«Rotation Model»	Форми: чати, лабораторні роботи Методи: проєктні, евристичні Засоби: ЕОР, ВОР, ІОС ЗВО, системи управління навчанням
«On-line Driver Model»	Форми: чати, семінари, проєкти, самостійна робота Методи: проєктні, евристичні, інтерактивні Засоби: ВОР, ІОС ЗВО, системи управління навчанням
«Flex Model»	Форми: чати, семінари, відеоконференції, вебінари Методи: інтерактивні, інформаційно-перцептивні Засоби: ВОР, ІОС ЗВО, системи управління навчанням, комунікаційні програми
«Face-to-Face Driver»	Форми: лекції-візуалізації, відеоконференції, тренінги, майстер-класи, неформальна освіта Методи: впливу на особистість, комп'ютерні симуляції Засоби: ЕОР, ВОР, Інтернет-ресурси, засоби доповненої реальності, вербальні, ілюстративні

Ключовими етапами успішної реалізації форми дистанційного навчання в будь-якій освітній організації можна вважати наступний порядок:

- «Підготуйте» (початковий етап, що забезпечує розуміння, цілепокладання і мотивацію до навчання);
- «Розкажіть» (етап подання, що формує цілі, завдання та ключові ідеї навчання);
- «Покажіть» (демонстраційний етап, що визначає методи, способи і концепцію отримання навичок);
- «Дозвольте» (практичний етап, що дозволяє засвоїти навички, забезпечити запам'ятовування і якісно повторити вивчений матеріал);
- «Перевірте» (оціночний етап, що дозволяє виявити отримані компетенції в умовах формальної освітнього середовища);

- «Підтримайте» (етап сприяння в застосуванні отриманих навичок на практиці);
- «Інструктують» (етап взаємодії з реальним світом, що має на увазі спілкування з наставниками та експертами в конкретних галузях знань, у формі консультування);
- «Об'єднайте» (етап групової взаємодії, навчальної роботи в команді, комунікацій і спільним вирішенням робочих завдань).

Проте, слід усвідомлювати той факт, що будь-які інформаційні технології та перспективні особливості електронних методів навчання при всій сукупності переваг не в змозі повністю замінити значимість учителя в освітньому процесі. Їх основна роль полягає в створенні умов, зміні характеру взаємних взаємодій учителя й учнів і деякої трансформації ролей в освітньому процесі ЗЗСО. Сучасний учитель перестає бути таким собі транслятором готового знання і поступово видозмінює свою роль у бік консультування і тьюторства, створюючи для учнів індивідуальні освітні траєкторії і навчаючи їх здобувати знання. У свою чергу, учні перестають бути пасивними споживачами освітнього продукту, стаючи активними учасниками процесу створення та накопичення нових знань і умінь.

1.3. Психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи в контексті дослідження

Особливістю цифрового етапу розвитку суспільства є можливість отримувати актуальні дані у будь-який час за умови доступу до Інтернету. Міа Карлсон термін «цифрова компетентність» пов'язує з мережами (network), інтернетівськими хмарами (internet competency) та мультимедіями (multy media) [68]. Перспективність формування цифрової компетентності Європейська комісія визнала ще у 2006 р. як ключової. Вона пов'язана зі здатністю упевнено, критично і творчо використовувати ІКТ для досягнення поставлених цілей [68]. Особливо актуальною ця теза стала після появи теорії поколінь. Комп'ютеризація суспільства призвела до того, що у віртуальному світі у

фахівця більше можливостей бути пов'язаними з іншими через віртуальні комунікаційні канали, ніж в реальному спілкуванні. Часто фахівці різних сфер розраховують на Інтернет як засіб утримати аудиторію (блоги, Інтернет-канали, різні соціальні мережі в Інтернеті, розсилки електронною поштою).

Означені тенденції сприяли появі так званого «мережевого покоління», яке в науковий обіг увів у 1997 р. канадський вчений Д. Тапскотт («Електронно-цифрове суспільство: Плюси і мінуси епохи мережевого інтелекту» [49]). Він одним із перших досліджував перше покоління людей, які народилися в умовах стрімкого розвитку інформаційно-цифрових технологій. Більшість представників даного покоління використовують Інтернет з раннього віку, і вони, як правило, добре взаємодіють з віртуальним середовищем і вільно почувають себе в соціальних мережах.

Американський дослідник М. Пренскій у статті «Цифрові уродженці, цифрові іммігранти» [65] вводить термін *«цифрова людина»* – це людина, яка народилася під час цифрової революції і з народження взаємодіє з інформаційними технологіями, які постійно розвиваються.

Термін «цифрове суспільство» (або «цифрова людина») з'явився в США і в науковому середовищі використовується відносно недавно – з середини 1990 рр. До того моменту для позначення суспільства, на фундаменті якого базуються переважно інформаційно-комп'ютерні технології, був поширений термін «інформаційне суспільство» або «постіндустріальне суспільство». Цифрове (мережеве) суспільство – це покоління людей, які пройшли соціалізацію в умовах широкого поширення інформаційних технологій в сфері повсякденного життя.

Американські вчені-соціологи дають пояснення «теорії поколінь» (Н.Хоув і У.Штраусс), проаналізувавши історію країни США. Вони дійшли висновків, що системи цінностей у людей, які жили в різні історичні періоди, розрізняються і досить значно. Це пов'язано з тим, що цінності виникають не тільки в результаті сімейного виховання, а й під впливом соціальних, економічних, політичних і природних факторів, у т.ч. й технологічних. Виросло

перше покоління людей, які володіють інформаційно-цифровими технологіями з самого дитинства. Для них абсолютно природним є постійний доступ до мережі Інтернет, а також можливість постійно знаходитися на зв'язку за допомогою сервісів мобільних телефонів, комп'ютера та інших технологій.

У 2009 р. канадський дослідник Д. Коупленд видав книгу «Покоління А» про нову генерацію людей. Автор точно описує поточний стан суспільства, приходячи до висновку що «... вплив інформації не припиняється ні на секунду, і кожен день з'являється щось нове. Одним тільки прагненням до оригінальності вже нікого не здивуєш» [14].

Мережеве покоління є першим поколінням, яке «мало доступ в Інтернет або з народження або з дитинства» [20]. Оскільки технологія стала більш компактною і доступною, популярність смартфонів в США виросла в геометричній прогресії.

Е. Тернер характеризує мережеве покоління «як таке, що постійно має зв'язок з Інтернетом», стверджує, що технології можуть допомогти людям уникнути емоційної і психічної боротьби, з якою вони стикаються в реальному світі [64].

Незважаючи на те, що спочатку теорія про мережеве покоління була спрямована на вивчення молоді в англо-американському середовищі, вона набула широкого поширення в багатьох країнах світу. Е. Шамис пояснює народження історії покоління Z «ключовими подіями та явищами в світі (поява Інтернету, поширення мобільного зв'язку), які є загальними для різних країн» [17].

Поява цифрового покоління Z, яке швидко опановує комп'ютерні програми, сформувало новий тип мислення – тип *мережевого мислення* (Е.Проніна). Воно не має меж, носить глобальний характер і за логікою корелює з поняттям *мережеве покоління*. На основі аналізу наукової літератури можна виділити *систему ознак* мережевого мислення:

1) система гіперпосилань, де думка може переорієнтуватися або навіть мимоволі змінитися під впливом нових даних, кожне гіперпосилання – це

додатковий ступінь свободи осягнення суті повідомлення та інтерпретації даних;

2) превалювання візуального сприйняття, тоді як текст примітивізується до елементарного переліку фактів, думок, цитат і деталей; деякі дослідники вважають, що одна з особливостей мережевого покоління – це швидке читання і миттєве розуміння сенсу [59]. Через такий спосіб роботи з інформацією змінюється і мислення людини, яке перетворюється в систему, організовану тегами і ключовими словами. Якщо ж інформації входить занадто багато, необхідно вміти отримувати потрібну з пам'яті за асоціаціям – і цифрове покоління вже це робить. Варто мати на увазі, що мислення молодих людей орієнтоване на цілу систему факторів, щоб переробляти інформацію короткими порціями в форматі так званого «кліпового мислення»;

3) специфічний темпо-ритм і лаконізм, а тому тенденція переривати виклад думок, пропускати ті елементи висловлювання, які легко розуміються в даному контексті або ситуації;

4) стилістика інтерактивності і «право на авторитетне втручання в процес обговорення теми» [29], особа мислить, говорить і діє без уваги на регламент, субординацію і пристойності, слідує власним інтенціям, розуміючи світ у світлі особистих інтересів і відчуваючи свій прямий вплив на ситуацію. Зазначене обумовлене прагненнями особистості до самовираження і самоствердження за допомогою форумів, чатів, соціальних мереж та інших засобів масової комунікації, де кожен, зайшовши в Інтернет, має можливість відкрито висловити свій суб'єктивний погляд на важливі події, що відбулися в світі – це інший психічний стан, інша усвідомленість, де не останнє місце займає індивідуальна активність. Фахівець не виписує нову інформацію, а оперує нею, самостійно знаходить дані, що цікавлять його, в доступних джерелах, високо оцінює свої можливості, погляди і наполягає на тому, щоб їх сприймали серйозно.

Американський психолог Ш. Постник-Гудвін [60] визначає такі ознаки покоління Z (рис.1.7).

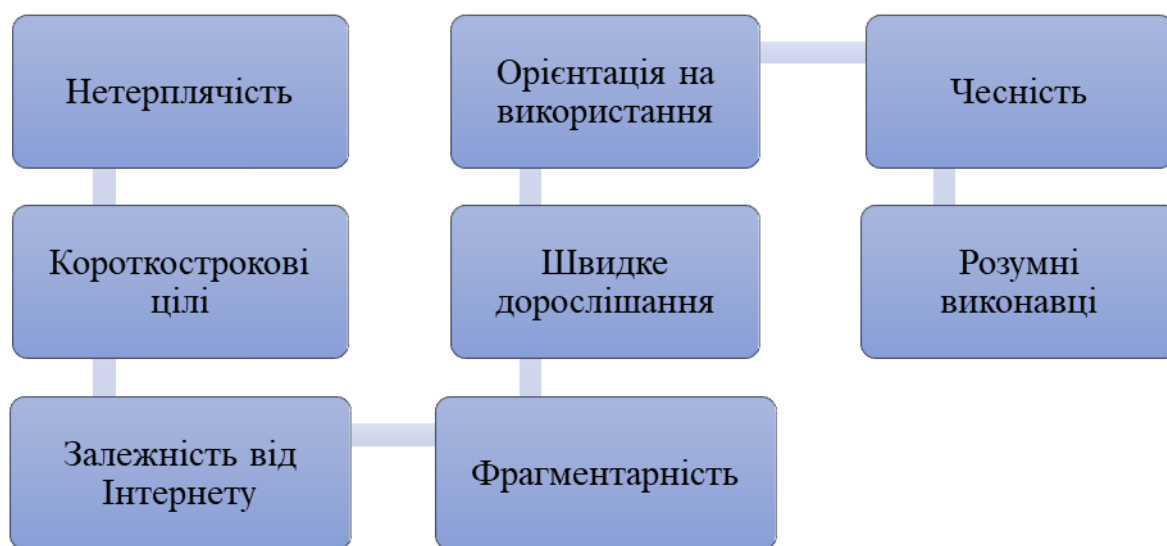


Рис.1.7. Характеристики покоління Z

Представники мережевого покоління націлені на пізнавальну комунікацію. Вони здатні створювати великі спільноти і бізнес-співробітництво через Інтернет без знання кого-небудь особисто в реальному середовищі. У більшості випадків намір такого взаємозв'язку має економічні та педагогічні цілі і розглядається як освітня місія.

Онлайн-навчання в епоху інформаційно-цифрових технологій носить дисперсний і нелінійний характер. Дж.Браун і Р.Адлер вводять термін «навчання 2.0», щоб описати новий досвід – так зване «навчання на вимогу» [57]. Він вказує на перехід від спрямованого (лінійного) навчання на основу пошукових навичок суб'єкта освітнього процесу. Знання суб'єкта освітнього процесу залежать в даний час від його здібностей орієнтуватися в потоці інформації, різних соціальних мережах і наукових спільнотах. Саме тому домінує точка зору, що «цифрова компетентність – це інтегрована здатність використовувати цифрові технології і засоби, розуміти і критично оцінювати їх різні аспекти, а також уміти їх використовувати для ефективної комунікації» [59].

Цінним є зарубіжний досвід формування у суб'єктів навчання цифрової компетентності [55, 65, 66, 67]. Dig Comp 2.0 визначає основні компоненти цифрової компетентності у 5 галузях (додаток Б).

Зазначимо, що рамка Dig Comp [66] була схвалена в межах Програми освіти та навчання 2020 (<https://ec.europa.eu/jrc/en/digcomp/implementation>).

Згідно з матеріалами Національної онлайн-платформи з цифрової грамотності «Дія. Цифрова Освіта» [13] володіти *цифровою грамотністю* означає використовувати цифрові засоби та інструменти з користю для своєї діяльності, освітньої, професійної чи повсякденної.

Тлумачення поняття «цифрова культура» з'явилося на початку ХХІ століття, його було введено до наукового обігу Т.О'Рейлі (Т.О'Reilly)) через виникнення технологій Web 2.0, де на перший план вийшли цифрові технології обміну даними у мережі. Тому цифрову культуру з технологічного боку слід пов'язати з навичками роботи з цифровими засобами, які слід вважати системотвірним чинником цієї культури [12].

Актуальність розвитку цифрової культури та осмислення її основних компонентів (складових) наразі усвідомлюється на державному рівні, що підтверджує Аналітична записка «Питання розвитку цифрової культури українського соціуму» від відділу гуманітарної політики НІ стратегічних досліджень. В ній зазначається, що цифрову культуру слід сприймати як основу сучасної світової культури, а тому необхідною стає «цифрова» модернізація українського суспільства, до якої відносять: розвиток «цифрової» грамотності громадян; поширення відкритих освітніх ресурсів; «цифрові» зміни та оцифрування освітнього процесу тощо [47].

Усвідомлюючи зміни у психіці молодого покоління, яке виростає на повсякчасному використанні інформаційних технологій та живе більшою мірою віртуальним світом та його характеристиками, вважаємо необхідним урахувати це у процесі навчання математики на основі дистанційної технології. Вітчизняні педагоги-практики пропонують рекомендації щодо

організації навчання дітей покоління Z. Так, С. Попова [41], яка має досвід навчання молоді, найбільш наближеної до покоління Z, пропонує таке.

1. Приділяти більше часу на осмислення матеріалу після уроку:

- доступ учнів до матеріалів уроку, можливість переглянути матеріал;
- блоки вправ для розуміння тексту із невеликими тестовими завданнями та творчою роботою, де потрібно висловити власну думку з певного питання;

- завдання створити схему, яка буде виділяти ключові моменти уроку або встановлювати взаємозв'язок між поняттями теми.

2. Структурувати способи досягнення мети:

- надати алгоритм кроків;
- розробити рекомендації щодо оптимізації роботи, уникнення помилок тощо;

- доповнити теорію практикою.

3. Надати деяку свободу вибору дій:

- рекомендувати список використаної літератури та додаткових джерел інформації з теми;

- повідомити, на основі яких критеріїв буде відбуватися загальне оцінювання;

- розробити візуальний лічильник балів.

4. Залучити учнів до довгострокових проєктів.

Бізнес-журналіст О. Штурвало [29], який має досвід роботи з поколінням Z, запропонував принципи (рис. 1.8), що демонструють правильність постановки завдань для працівників, якщо керівники бажають їх швидкого виконання та адаптував ці принципи до освітнього процесу (додаток В).

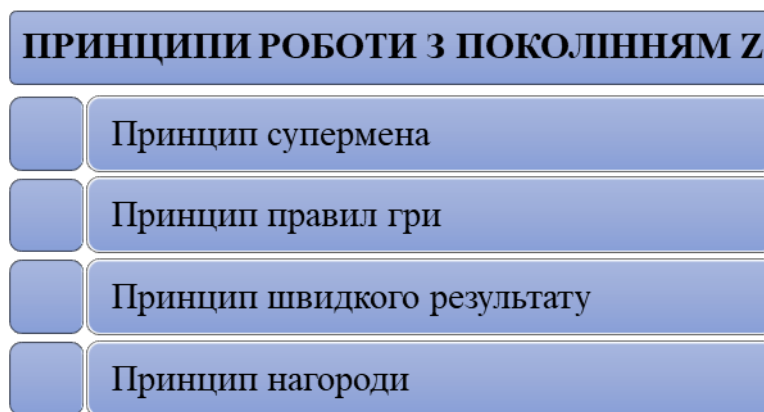


Рис.1.8. Принципи роботи з поколінням Z (за О. Штурвало)

Отже, слід звернути увагу вчителів на створення спеціальних освітніх умов у ході організації дистанційного навчання, а саме :

1. Із дітьми гаджетів необхідно спілкуватися «твітами», коротко і з переривами, завдання посилати на мобільні гаджети. Будь-яке завдання бажано поділяти на десяток більш маленьких і розписувати покроково, не сподіваючись на допитливість. Шаблони не обмежують, а заспокоюють покоління Z. Креативність виявляється, коли вони знаходять недоліки в шаблонах або шукають нові версії.

2. Діти покоління Z відгороджується від усього, що викликає не зовсім добрі емоції. Якщо їм цікаво і вони самі цього хочуть – готові гарувати. Як тільки з'являється слово «треба» – активність таких дітей знижується. Саме тому на уроці потрібно подавати матеріал цікаво, в ігровій формі та в комфортних умовах. Комфортні, стильні та модернізовані класи спонукають сучасних школярів поспішати на заняття. Якщо немає достатньої матеріальної бази, необхідно використовувати оригінальні роздруковані матеріали та нестандартне оформлення кабінету.

3. Сучасні учні все частіше збиваються у віртуальні «зграї». Належність до групи в соціальних мережах для них надзвичайно важлива. Тому вчителю необхідно виділяти час на уроці для зворотного зв'язку, обміну досвідом, роботи у малих групах. Варто завести в соціальній мережі або месенджері групу для класу, яку будуть вести саме учні.

4. Діти полюбляють вести блоги, які для них стали публічними особистими щоденниками. Тому процес навчання бажано організовувати як публічний, наприклад, запропонувати учням зняти деяке відео про виконання досліду. Вони зроблять це охочіше, ніж записуватимуть результати в зошит.

1.4. Особливості використання Google-сервісів та інших систем дистанційної освіти при навчанні математики учнів старшої школи

Щоб організувати дистанційне навчання, зокрема з математики, потрібно створити відповідне освітнє інформаційне середовище. Зробити це можна на основі спеціальних сервісів і комп'ютерних джерел інформації, призначених для навчання учнів.

Розглянемо сервіси Google, зокрема Google Classroom, оскільки це безкоштовний веб-сервіс, створений Google для закладів освіти, є вільно поширюваним та загальнодоступним з метою спрощення створення, поширення і класифікації завдань безпаперовим шляхом.

Навчати учнів старшої дистанційно можливо за допомогою відеозустрічей. Учитель може створити відеозустріч у Hangouts Meet і запросити весь клас. Або ж за допомогою функції "Запитання аудиторії" в Google Презентаціях учні зможуть ставити запитання в реальному часі. Також можливо використовувати пряму трансляцію уроку, яка заощаджує пропускну спроможність. Також можна записати урок і опублікувати його в Класі, щоб учні змогли переглянути його пізніше. Така форма роботи є зручною не лише для вчителя, але й для учнів, так як в математиці є складні теми, які буде корисно переглянути ще раз. [32]

Якщо немає можливості організувати і провести відеозустріч, то в цьому питанні допоможе Google Клас, де можна давати завдання, заохочувати учнів до спільної роботи та підтримувати з ними зв'язок навіть із дому.

Завдяки Google Сайтам можна легко створити власний веб-сайт і публікувати на ньому інформацію про уроки, таблиці, відеозаписи та багато іншого, що є незамінним при навчанні математики. [32]

Також варто створювати проміжні та підсумкові тести, щоб учні могли продемонструвати свій рівень знань, а вчитель – заощадити час на оцінювання. Для організації самотестування, тестування, створення опитувальників зручно використовувати досить потужну службу сервісу Google під назвою Google Forms (рис. 1.9).



Рис. 1.9. Служба сервісу Google для організації тестування

За допомогою коментарів у Google Документах можна швидко залишати відгуки, поки учні працюють над завданням. Для того, щоб полегшити роботу учнів і зацікавити їх у подальшому виконанні завдань можливо дозволити учням публікувати запитання та коментарі в Google Класі, щоб підтримувати між ними дискусію. [32]

Налаштування інтервалів для зустрічей у Google Календарі дозволяє учням резервувати час для персональних та групових зустрічей. Також дуже корисною і зручною є віртуальна дошка Jamboard, де можливо писати і малювати, показувати свій екран, заохотити учнів співпрацювати за допомогою карт думок, діаграм тощо. [32]

Отже, у додатку Г нами більш детально представлено основні можливості Google Classroom (рис.1.10).

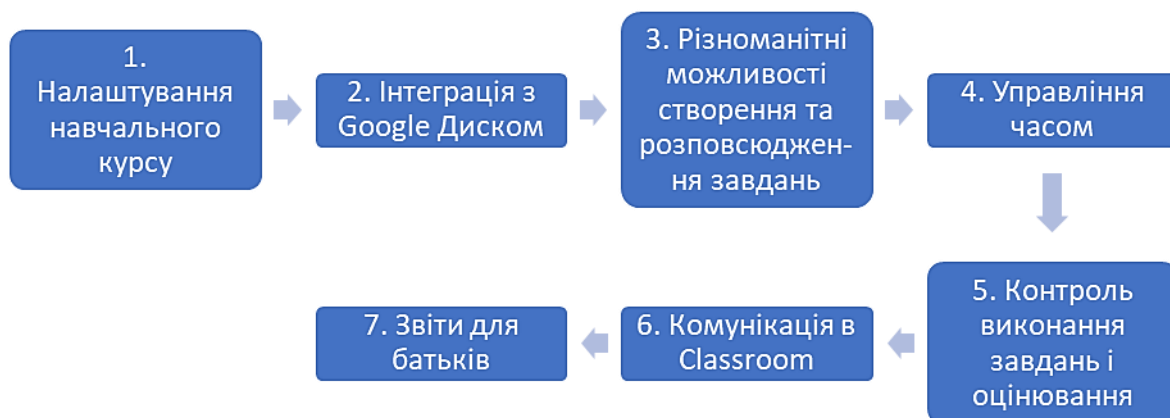


Рис.1.10. Основні можливості Google Classroom

Організація дистанційного навчання математики учнів основної школи можлива на основі освітньої платформи «Глобальна інноваційна онлайн школа. Математика» (GIOS). Освітня платформа «Глобальна інноваційна онлайн школа. Математика» – сучасний автоматизований (інноваційний) засіб навчання, спілкування (учнів з 150 учнями, учнів з вчителями, учнів з репетиторами чи т’юторами тощо), діагностики навчальних досягнень учнів (у різні проміжки часу з різних тем), підготовки до різного роду оцінювання (контрольні роботи, тематичне тестування тощо), здійснення самоконтролю та самокорекції, а також спосіб організації колективних дидактичних ігор [51].

Також нами виявлено певну кількість вебінарів для вчителів у порталах «Всеосвіта», «Educational Era», «Нова українська школа» та інших, мета яких – оновлення та удосконалення інформаційно-комунікаційної компетентності учителів, розширення та актуалізація знань, умінь та навичок використання електронних освітніх ресурсів, оволодіння сучасними методами забезпечення освітнього процесу інформаційними технологіями. Слухачі таких вебінарів отримують знання про види інноваційних ЕОР та шляхи їх використання в освітньому процесі Нової української школи, зможуть самостійно добирати ЕОР для формування та розвитку в учнів навичок ХХІ століття та інтегрувати інформаційно-комунікаційні технології в освітній процес.

На рисунку 1.11 представлено виявлені нами онлайн-ресурси, які допоможуть учителю початкової школи зробити урок інтерактивним.

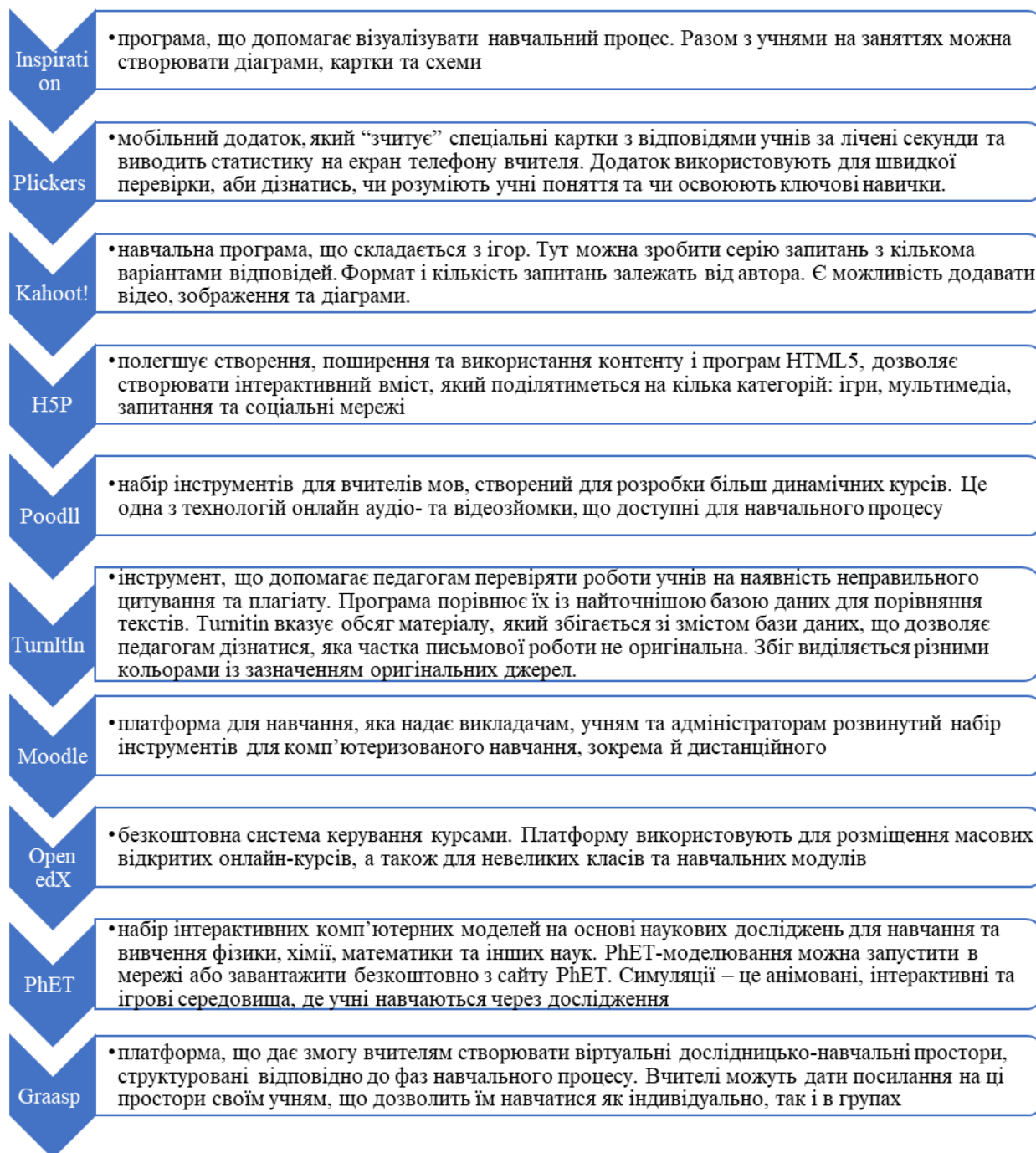


Рис. 1.11. Онлайн-ресурси для вчителів

Також учителі математики намагаються створювати за допомогою різних сервісів власні навчальні продукти, які певним чином допоможуть їм вирішити питання організації індивідуальної чи самостійної роботи учнів на відстані, але

при цьому виникає низка проблем. Для того, щоб дистанційна освіта стала затребуваною і поширеною в сучасному українському суспільстві, в першу чергу, необхідно вирішувати проблему розвитку системи технічного та програмного забезпечення. [32]

В Україні є сервіси для вивчення математики онлайн. Але перевагу краще надати тим, що відповідають українській програмі, мають гриф МОН, забезпечують зворотний зв'язок і доступ учителя до результатів виконання завдань [32]:

- платформа для дистанційних курсів Moodle;
- інтерактивна онлайн-презентація Zeetings, на слайди якої можна додати відео з YouTube, опитування, посилання на інші ресурси тощо;
- сервіси з готовим контентом як платформа: Khan Academy, EdEra, GIOS, LearningApps.

Варто звернути увагу, що тестові оболонки часто не дають можливість прописувати формули з математики, їх слід завантажувати їх як малюнки.

Отже, засобами дистанційного навчання можуть бути (рис.1.12).

навчальні книги (навчально-методичні посібники, довідники тощо);	мережеві навчально-методичні посібники;	комп'ютерні навчальні системи;	аудіо-навчально-інформаційні матеріали;
відеонавчально-інформаційні матеріали;	лабораторні дистанційні практикуми;	тренажери з віддаленим доступом;	бази даних та знань з віддаленим доступом;
електронні бібліотеки з віддаленим доступом;	засоби навчання на основі експертних навчальних систем;	засоби навчання на основі геоінформаційних систем;	засоби навчання на основі віртуальної та доповненої реальності.

Рис. 1.12. Засоби дистанційного навчання

Наведемо приклади засобів дистанційної освіти, які можна використовувати, зокрема, у процесі навчання математики:

- електронна пошта (e-mail);

- chat – листування у режимі реального часу;
- відеоконференції, що дозволяють передавати звук та зображення;
- навігація через Інтернет;
- активні канали для передплати веб-сайтів;
- веб-сервіс, веб-конференції, дошки оголошень, реєстраційні форми, тести, лічильники та ін;
- FTP-сервери та файлові архіви та інші.

Отже, запровадження технологій дистанційного навчання учнів ЗЗСО з використанням можливостей платформи управління навчальним контентом Google Classroom, сервісів Веб 2.0 як нових форм навчання вимагає визначення особливостей застосування технологій дистанційного навчання в системі середньої освіти та створення сучасного контенту, який використовуватимуть у процесі навчання математики учнів у ЗЗСО.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ

ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

2.1. Аналіз навчальних програм і підручників з теми

Процес навчання математики у старшій школі ЗЗСО регламентовано Листом МОН України № 1/11-5966 від 01.07.2019 року: «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 навчальному році» [34]. На рівні стандарту на вивчення алгебри і початків аналізу відводиться 54 години, а на геометрію 51 година. На профільному рівні учні мають 6 годин алгебри та початків аналізу і 3 години геометрії. Можливим є використання двох програм: для учнів, які вивчають математику на профільному рівні з 10-го класу, і для учнів, які вивчали математику поглиблено з 8-го класу. Навчальну програму представлено у формі таблиці, що містить дві колонки: очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів та зміст навчального матеріалу.

Навчання учнів на рівні стандарту покликане забезпечити оволодіння математичними знаннями, вміннями та навичками, необхідними для повсякденного життя, розв'язування практичних і прикладних задач, які ставлять сучасне виробництво, ринок праці і суспільне буття, отримання якісної професійної освіти, продовження навчання та фахового зростання на наступних етапах продуктивної діяльності.

Метою навчання за профільним рівнем є забезпечення «свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою». У

навчальній програмі цих рівнів деталізовано тактичні освітні завдання та критерії сформованості ключових та предметної компетентностей [49; 50; 51].

Навчання математики у старшій школі спрямоване на засвоєння математичних, предметних компетенцій та формування ключових компетентностей (додаток Д).

Навчальною програмою визначено чотири наскрізні лінії цієї діяльності: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність», які реалізуються через креативне навчальне середовище; змістове наповнення певного навчального рівня; спецкурси, факультативи, система позакласної роботи.

Головною змістовою лінією курсу «Алгебри і початків аналізу» є функціональна лінія. Набувають розвитку й інші змістові лінії: обчислення, вирази і перетворення, рівняння та нерівності, елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики.

Тема «Похідна та її застосування» вивчається у 10 класі, на неї умовно відводиться 42 години. У пояснювальній записці зазначено, що дана тема була перенесена до 10 класу нещодавно, тому за відсутності можливості забезпечити учнів матеріалами вчителю дозволено перенести її до 11 класу, але з 1 вересня 2018 року тема вивчається в 10 класі протягом близько 50 годин, у резерві на навчальний рік знаходиться 22 години і вчитель за потреби може збільшити час вивчення [49,50,51].

Також, зазначено, що основною метою вивчення теми «Похідна та її застосування» у класі з поглибленим вивченням математики є ознайомлення учнів з використанням поняття і властивостей похідної для розв'язування задач, зокрема визначення властивостей функції, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Після вивчення даної теми учні повинні[51]:

- формулювати означення похідної та пояснювати її геометричний і фізичний зміст;

- знаходити кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції; знаходити похідні функцій;
- застосовувати похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції;
- знаходити найбільше і найменше значення функції на проміжку;
- розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень;
- застосовувати результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та доведення тотожностей і нерівностей;
- описувати поняття опуклості функції та точок перегину;
- застосовувати другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину;
- досліджувати функції за допомогою першої та другої похідних і використовувати одержані результати для побудови графіків функцій.

Міністерство освіти і науки (МОН) у переліку навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників для вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглиблену рівні в 10 класі пропонує підручник А.Г.Мезляка, Д.А. Номіровського, В.Б. Полонського, М.С. Якіра для 11 класу, оскільки навчальна програма була оновлена, а старі підручники залишились дійсними [49,50,51]. У даному підручнику теоретичний матеріал по введенню понять математичного аналізу запропоновано на доступному для учнів рівні при поглибленому вивченні математики. У навчальному тексті кожного параграфа запропоновані приклади розв'язування однієї або кількох типових задач. Для полегшення роботи з підручником, автори вводять умовні позначення, згідно яких можна з'ясувати, що в підручнику присутня рівнева диференціація завдань, вони містяться в досить великій кількості, і для їх розв'язання в повному обсязі не вистачить часу відведеного на тему, але з іншого боку завдяки цьому у вчителя завжди є широкий вибір задач, які можна запропонувати школярам на уроці і в домашньому завданні [41].

Деякі параграфи містять рубрику «Коли зроблено уроки», в якій для ознайомлення пропонуються доведення теорем, завдяки цьому можна спонукати учнів до самостійної роботи або використовувати матеріал для навчання учнів у математичних гуртках. Також у підручнику знаходяться короткі відомості про вчених-математиків, що може послугувати у якості мотивації учнів.

Тема «Похідна та її застосування» представлена в другому розділі підручника в параграфах з 8 по 17 (табл. 2.1).

Таблиця 2.1.

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника

Види вправ	Номери з підручника			
	1 рівень	2 рівень	3 рівень	4 рівень
Вправи для створення мотивації	11	22	45	
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	7, 8	16, 17, 20, 21, 28	32, 33, 34, 35, 36, 45	53
Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей			39, 40, 41, 42, 43, 44	
Вправи на базі яких відбувається ілюстрація понять, що вводяться	12, 13, 14, 15	24, 25, 26		
Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нових понять			37, 38, 46	49, 50, 51, 52
Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння нових понять	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10	18, 19, 23, 27, 29, 30	45, 47	48, 53

Розглянувши зазначений підручник, можна зробити висновок, що він містить велику кількість задач різного рівня складності, що дозволяє реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні, формувати пізнавальний інтерес до математики.

З 2018-2019 навчального року почав набувати поширення новий підручник авторів А.Г. Мезляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір [42]. Оскільки у концепцію профільного навчання з 2018-2019 року були внесені зміни і вивчення математики відбувається на двох рівнях – базовому та профільному, то зазначено, що для учнів, які навчалися у 8-9 класах за програмою поглибленого рівня, розроблено навчальну програму з математики для продовження поглибленого вивчення. Тому зазначений підручник [42] рекомендований для профільного рівня, але надано уточнення, що за ним можуть навчатись учні, які починали вивчення математики на поглибленому рівні з 8 класу, тому він містить більший обсяг теоретичного та практичного матеріалу, ніж звичайний підручник профільного рівня.

При вивченні теми «Похідна та її застосування» також можна користуватись підручниками профільного рівня колективу авторів А.Г. Мезляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір [43]; Є.П. Нелін, О.Є. Долгова [54], але в такому разі вчитель повинен буде використовувати більшу кількість додаткових дидактичних матеріалів.

Розглянемо особливості викладання теми «Похідна та її застосування» на профільному та поглибленому рівні.

У 2017-2018 навчальному році програмою з математики пропонувалося вивчати предмет алгебри і початків аналізу на профільному рівні у двох варіантах. Перший передбачав всього 350 годин на рік, 175 годин на семестр, тобто 5 уроків алгебри і початків аналізу на тиждень, при умові, що геометрія буде викладатись 4 години на тиждень. Згідно з другим варіантом - на алгебру виділялося 420 годин на рік, а це 210 годин в семестр і 6 годин на тиждень та 3 години на тиждень – на геометрію. Похідна вивчалася як частина теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» протягом 36

або 48 годин [49; 50; 51]. Програмою з математики на 2018-2019 та подальші навчальні роки передбачено, що на курс 10-х і 11-х класів відведено по 210 годин, тобто 6 уроків на тиждень, а також резерв часу у кількості 24 годин. На тему «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» збільшено час до 54 годин. Зміст навчального теоретичного матеріалу профільного рівня менший у порівнянні з поглибленим рівнем, це прослідковується і при перегляді підручників [49; 50; 51]..

Розглянемо підручник А.Г. Мерзляка, Д.А. Номіровського, В.Б.Полонського, М.С. Якіра [43] /профільного рівня /для визначення відмінностей. Задачний матеріал підручника теж має чотири рівні складності, але в порівнянні з поглибленим рівнем пропонується менша кількість творчих завдань, прикладів на доведення, вправ спрямованих на виділення суттєвих властивостей. Деякі теореми вводяться без доведення, але автори роблять зауваження, що з доведенням учні можуть ознайомитись у підручнику поглибленого рівня для 11 класу. У даному підручнику[43] також доступно вводиться теоретичний матеріал та пропонуються приклади вправ для самостійного опрацювання, на ознайомлення з темою, надана велика кількість задач, але у деяких випадках недостатня для викладання на рівні поглибленого вивчення.

Зазначимо, що більша кількість годин на профільному рівні обумовлена тим, що в тему «Похідна та її застосування» входить матеріал про границю та неперервність функції, а на поглибленому рівні на вивчення границі відводиться окрема тема обсягом 18 годин (додаток Е)[6].

Отже, на профільному рівні учням не пропонується вивчати похідну оберненої функції (похідну обернених тригонометричних функцій), основні теореми диференціального числення, нерівність Йенсена та її застосування, також не розглядаються способи застосування похідної для розв'язування тотожностей та не передбачено роботу з похідними порядком вищим за другий[50].

При вивченні теми вчитель повинен обрати правильну мотивацію для учнів, яка безперечно буде викликати інтерес і спонукати дітей до активної праці на уроці та вдома. Такою мотивацією також може стати інформація про те, що вміння «працювати» з похідною знадобиться при складанні державної підсумкової атестації (ДПА), оскільки з 2020 року математика знаходиться у списку обов'язкових предметів що виносяться на ДПА учнів старшої школи. Учні, які навчаються за математичним профілем скоріш за все будуть обирати у вищих навчальних закладах спеціальності пов'язані з математикою, і їм необхідний буде сертифікат ЗНО з цієї дисципліни. Високий сумарний тестовий бал визначає місце абітурієнта в рейтингу вступників, а значить, надає можливість навчатись за державним замовленням. Тому варто на уроках математики приділяти увагу вправам, які можуть зустрітись в зовнішньому незалежному оцінюванні.

Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики[63] містить вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учасників з цього навчального предмета, а також конкретизує, що повинен знати та вміти випускник навчального закладу в межах визначених тематичних розділів. Проаналізуємо програму зовнішнього незалежного оцінювання з математики 2019 року, затверджену Міністерством освіти і науки України (наказ МОН від 04.12.2019р. №1513), та виділимо вміння з теми «Похідна та її застосування», якими учень повинен володіти на момент складання ЗНО (додаток Ж). Бачимо, що вимоги не містять усього матеріалу з теми «Похідна та її застосування», але від учня все ж таки знадобиться значна кількість вмінь, якими він повинен оперувати[61]. Тому при вивченні теми вчителю доречно звертати увагу учнів на ті знання і вміння, які застосовуються в більш складних задачах, як, наприклад, на дослідження функції. Звичайно немає гарантії, що завдання відповідні до тих, які зазначені в програмі будуть зустрічатись у самому ЗНО. Проаналізувавши завдання[63], які зустрічались на зовнішньому незалежному оцінюванні з 2010 по 2021 рік, з'ясували, що вправи на застосування похідної обов'язково зустрічаються на рівні відкритої форми з короткою або

розгорнутою відповіддю, тобто якщо учень претендує на високий бал, то він повинен приділити увагу темі «Похідна та її застосування». Треба також зазначити, що тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді можуть містити вправи на знаходження похідної функції.

Так, наприклад, програма ЗНО 2017 року містить наступне завдання:

Задано функцію $f(x) = x^2 + 3x - 10$.

- 1** Визначте координати точок перетину графіка функції f з осями координат.
- 2** Побудуйте графік функції f .
- 3** Знайдіть похідну функції f .
- 4** Визначте кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Як бачимо, щоб виконати дане завдання необхідно знати таблицю похідних, правила обчислення похідної, бути ознайомленим з геометричним змістом похідної та вміти знаходити кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці. Крім цього також зустрічаються задачі на знаходження похідної від складеної функції та застосування правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій; на обчислення значення похідної у точці; складання рівняння дотичної до функції у заданій точці [44].

Отже, ми проаналізували навчальні програми з математики та основні підручники, які використовуються при вивченні курсу алгебри та початків аналізу в 10 класі, порівняли особливості викладання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому та профільному рівнях, розглянули програму ЗНО та виділили завдання, які розв'язуються за допомогою похідної.

2.2. Основний зміст навчального матеріалу з теми

Проведемо логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» з точки зору реалізації компетентнісного підходу, використовуючи підручник А.Г. Мезляка, Д.А. Номіровського, В.Б.Полонського, М.С. Якіра [41] поглибленого рівня навчання.

Існує декілька методів введення поняття «похідна». Наприклад: спочатку вводяться поняття приросту функції і приросту аргументу, або вивчення похідної починається з введення границі послідовності і границі функції в точці, або підведення до визначення похідної починається з розгляду руху матеріальної точки і визначення її миттєвої швидкості.

У підручнику А.Г. Мерзляка та інших [41] спочатку вводиться поняття приросту функції та її аргументу, тож розглянемо цей спосіб.

Уводиться функція $y = f(x)$ та довільна фіксована точка x_0 , яка належить області визначення даної функції. Також зазначають, що x – довільна точка, що лежить в деякому околі точки x_0 , а різниця $(x - x_0)$ називається приростом незалежної змінної (аргументу) в точці x_0 , і позначається Δx , тобто:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Звідки отримується рівність $x = \Delta x + x_0$. Кажуть також, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx . Унаслідок цього значення функції f зміниться на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ця різниця називається приростом функції f в точці x_0 , і позначається Δf , отже маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для більшої наочності учням пропонується рисунок (рис. 2.1).

Для закріплення та кращого розуміння матеріалу розглядаються задачі на знаходження приросту деякої елементарної функції із даним приростом аргументу і фіксованою точкою. Найчастіше для прикладу використовують функції $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$ або функції виду $f(x) = kx + b$.

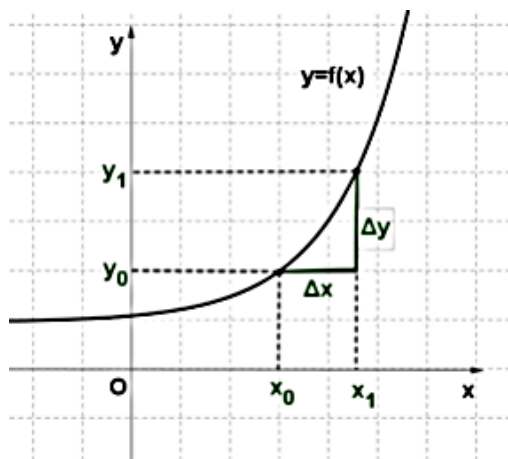


Рис. 2.1. Приріст функції

Перед введенням поняття «похідна» розглядають задачі про миттєву швидкість нерівномірного прямолінійного руху матеріального об'єкта та про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці.

Розглянемо задачу[43] про миттєву швидкість діючи за алгоритмом.

Умова задачі. Нехай автомобіль, рухається прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку зі змінною швидкістю, протягом часу t (тобто на проміжку часу $[0; t]$) за законом $s = s(t)$, який дозволяє визначити положення автомобіля в будь-який момент часу t_0 . Потрібно визначити швидкість автомобіля в будь-який момент часу.

Розв'язання.

- 1) В заданий момент часу t_0 задають приріст часу Δt , тобто розглядають проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$.
- 2) Обчислюють приріст відстані Δs , яку проїде автомобіль за час Δt :

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

- 3) Обчислюють середню швидкість v_c руху автомобіля протягом часу Δt :

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

- 4) Обчислюють миттєву швидкість руху, яка відповідає часу $t = t_0$:

$$v(t_0) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ (t \rightarrow t_0)}} v_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

За допомогою такого алгоритму учні вже зможуть брати активну участь у розв'язанні задачі про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці, оскільки матимуть майже готову схему пошуку кутового коефіцієнту дотичної. Завданням вчителя на даному етапі є постановка задачі, розгляд графіка довільної функції та дотичної до неї. Цю задачу ми представили у додатку 3.

Після розгляду даних задач, що є різними за змістом та призначенням задачі, робиться висновок про те, що отримані відповіді до них свідчать про те, що з математичної точки зору вони ідентичні, тобто базуються на певному загальному понятті, цим поняттям є поняття похідної функції. Під час розв'язування задач, вчитель наголошує учням на важливість використання символів, що стосуються приросту функції та відношень її до приросту аргументу, для цього розглядаються відповідні вправи.

Означення. Похідною функції f в заданій точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f в точці x_0 до відповідного приросту аргумента, за умови, що приріст аргумента прямує до нуля. Похідну функції f в заданій точці x_0 позначають за допомогою штриха $f'(x_0)$, знаючи це учні можуть записати подане означення символічною мовою[39]:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

У підручнику А.Г. Мезляка, Д.А. Номіровського, В.Б. Полонського, М.С. Якіра [36, с. 81] надається схема обчислення похідної, але кроки 1) – 4), які були розглянуті в задачах, що приводять до означення похідної, вже задають правила обчислення похідної і учні можуть працювати за цими кроками.

Отже, коли означення було введене, за його допомогою та використовуючи кроки 1) – 4) тренуються знаходити похідні найпростіших функцій в точці, при чому зазначають, якщо функція f має похідну в точці x_0 , то цю функцію називають диференційованою в цій точці, а з диференційованості слідує неперервність.

З метою глибшого усвідомлення означення похідної разом з учнями роблять висновок про геометричний та механічний, зміст похідної, на основі розглянутих задач (додаток И).

Після того, як був розглянутий спосіб знаходження похідної за допомогою означення, починають вивчати таблицю похідних (додаток К).

Правила, за якими прийнято обчислювати похідні суми (різниць), добутку або частки функцій у підручнику [36] сформульовані у наступних теоремах (додаток Л): теорема 1 [про похідну суми (різниць) функцій], теорема 2 [про похідну добутку функцій], теорема 3 [про похідну частки функцій], теорема 4 [про похідну складеної функції], теорема 5 [про похідну оберненої функції]. Учителя намагаються приділяти достатню кількість часу правилам обчислення похідних і, відповідно, застосуванню даних правил на практиці.

Перед початком введення основних теорем диференціального числення актуалізуються знання геометричного змісту похідної та рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0 [4].

Теорема [Ферма] [39]. Нехай функція f , визначена на проміжку $[a; b]$, у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційованою в точці x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

Далі ілюструють графіки функцій неперервних на відрізку $[a; b]$ і диференційованих на інтервалі $(a; b)$ таких, що функція у точках a і b набуває однакових значень, і на яких видно, що існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a; b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$. Цей висновок підтверджує теорема.

Теорема [Ролля] [39]. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована на інтервалі $(a; b)$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$. Після розгляду теореми Ролля, за допомогою рисунка роблять перехід до теореми Лагранжа.

На рисунку зображають графік функції, неперервної на відрізку $[a; b]$ і диференційованої на інтервалі $(a; b)$. Розглядається трикутник AMB , з якого можна знайти кутовий коефіцієнт прямої AB :

$$\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

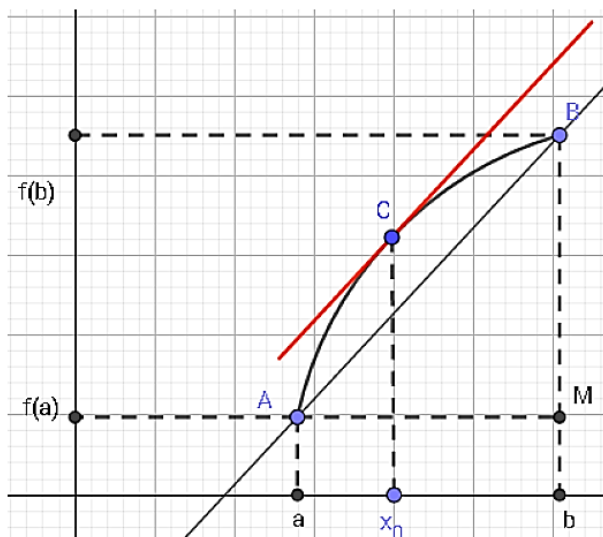


Рис. 2.2. Ілюстрація до теореми

З рисунка 2.1. видно, що на дузі AB існує така точка C , що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB . Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB , тобто існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема [Лагранжа] [39]. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована на інтервалі $(a; b)$ то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Зазначені теореми потребують доведення, що як свідчить З. І. Слєпкань [74] не викликає в учнів труднощів, тому зазвичай пропонують їм розглядати доведення самостійно.

У шкільному курсі алгебри та початків аналізу на поглибленому рівні за допомогою похідної, функції досліджують на:

- 1) монотонність (зростання і спадання);
- 2) точки екстремуму і екстремуми функції;
- 3) досягнення найбільших і найменших значень на відрізку;
- 4) опуклість.

Пояснення ознак зростання, спадання та сталості функцій розпочинають з ілюстрацій графіків відомих учням функцій, таких як парабола, гіпербола, пряма, паралельна вісі Ox . Властивості монотонності цих функцій вже були доведені раніше, тому їх тільки пов'язують з використанням похідної. Якщо розглядають графік функції $y = x^2$, то показують, що на проміжку $x \in (0; \infty)$, де, як відомо, функція зростає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює гострий кут з додатнім напрямом вісі Ox , тобто похідна у цих точках додатна, аналогічно показують, що на проміжку $x \in (-\infty; 0)$ похідна від'ємна. У випадку розгляду прямої, паралельної вісі Ox , яка задається функцією виду $y = b$, отримують, що похідна в будь-якій точці буде дорівнювати нулю [25].

Дані спостереження підтверджують наступними теоремами [42]:

Теорема [ознака зростання функції]. Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема [ознака спадання функції]. Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Теорема [ознака сталості функції]. Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) = 0$, то функція f константна на цьому проміжку.

Існують інші методичні підходи введення достатніх умов монотонності функцій. Наприклад, у підручнику М. І. Башмакова [3] учнів підштовхують до теорем за допомогою механічного змісту похідної, даний метод використовується і в підручнику А. Г. Мерзляка та інших [53; 55], але тільки для виведення ознаки сталості функції.

Теорема [властивість зростаючої (спадної) функції]. Якщо диференційована на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) [42].

Дослідження функцій на монотонність є алгоритмічною справою, тому зазвичай виокремлюють кроки дослідження на прикладі декількох функцій. Подібний алгоритм виклала у своєму посібнику З.І. Слєпкань [75].

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно [42]:

- 1) знайти область визначення функції та точки розриву;
- 2) знайти похідну;
- 3) записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції;
- 4) записати і розв'язати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції.

Також показують учням, що теорему про ознаку сталості функції можна використовувати і для доведення тотожностей.

Так, якщо вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x_0 \in I$ виконується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) = A$ для всіх $x \in I$ [42].

При роботі з точками екстремуму і екстремумами функції учням наголошують, що точки максимуму і мінімуму – це точки екстремуму, а значення функції в цих точках максимуму і мінімуму – це екстремум функції. Учні часто плутають ці поняття та допускають помилки. Перед введенням означення точок максимуму і мінімуму, говорять про окіл точки [42].

Означення. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0 , називають околом точки x_0 . Далі вводять означення точок максимуму і мінімуму та демонструють їх на графіках [42].

Похідну і точки екстремуму поєднує наступна теорема.

Теорема [про точки екстремуму]. Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f , то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0 [42].

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції [12].

Беручи до уваги дане означення роблять висновок, що точки екстремуму слід шукати серед критичних точок. Далі розглядають теореми, які є достатніми умовами, що показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції [12].

Теорема [ознака точки максимуму функції]. Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f [21].

Теорема [ознака точки мінімуму функції]. Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f [21].

При переході до знаходження максимуму і мінімуму функції звертають увагу на те, що екстремуми характеризують поведінку функції в деякому околі точки x_0 , а не на всій області визначення чи на її частині.

На цьому етапі, після вивчення необхідних і достатніх умов існування точок екстремуму, вводять алгоритм дослідження функцій на екстремум.

- 1) Знайти область визначення функції $f(x)$.
- 2) Знайти похідну даної функції $f'(x)$ та визначити критичні точки.
- 3) Розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання та дослідити знак похідної в околах цих точок, зробити висновки щодо точок максимуму і мінімуму.
- 4) Обчислити максимуми та мінімуми функції, підставивши у формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і мінімуму.

Для функції f неперервної на відрізку $[a; b]$ пошук найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку проводять, користуючись такою схемою.

1) Знайти похідну функції $f(x)$.	2) Знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать відрізку $[a; b]$.
3) Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.	4) З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Неперервна функція обов'язково набуває найбільшого і найменшого значень і вони можуть досягатись лише у стаціонарних точках і на кінцях відрізка тому не перевіряють достатні умови існування екстремуму функції в стаціонарних точках.

Також учням зазначають, що за допомогою знань про екстремуми вони можуть розв'язувати задачі, пов'язані з життєвими ситуаціями. Деякі з них виділені у підручнику [36]: яку кількість продукції має випустити підприємство, щоб отримати найбільший прибуток, як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час, як організувати доставку товару по торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими. Запропоновані текстові задачі мотивують учнів до вивчення теми та узагальнять їх знання.

Перед тим, як учні починають працювати з поняттям «опуклість функції», їх вчать визначати другу похідну. Для цього розглядають задачу про миттєву швидкість, яка застосовує фізичні поняття.

Задача [2]. Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Учням вже відомо, що миттєва швидкість $v(t)$ у момент часу t визначається за формулою $s'(t) = v(t)$, тоді розглянемо функцію $y = v(t)$, її похідну в момент часу t називають прискоренням руху і позначають $a(t)$,

тобто $v'(t) = a(t)$. Таким чином, функція прискорення руху – це похідна функції швидкості руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто: $a(t) = v'(t) = (s'(t))'$. У таких випадках говорять, що функція прискорення руху є другою похідною функції $y = s(t)$. Пишуть: $a(t) = s''(t)$.

Далі, зазвичай, наводять декілька графічних прикладі, на яких функції опуклі вгору та вниз на певних проміжках, щоб учні мали змогу розуміти про що йде мова. Показують, якщо графік функції на проміжку розміщений не вище будь-якої своєї дотичної, то функцію називають опуклою вгору на проміжку; якщо графік на проміжку розміщено не нижче від кожної своєї дотичної – опуклою вниз на проміжку. Також розглядають приклади графіків функцій на яких існує точка x_0 , яка володіє властивістю, що при переході через неї крива функції переходить з однієї сторони дотичної на іншу, то таку точку називають точкою перегину.

Зв'язок між похідною та визначенням опуклості функції встановлюють наступні теореми [42].

Теорема [ознака опуклості функції вниз]. Якщо для всіх x з деякого проміжка функції $f(x)$ виконується нерівність $f''(x) > 0$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на даному проміжку.

Теорема [ознака опуклості функції вгору]. Якщо для всіх x з деякого проміжка функції $f(x)$ виконується нерівність $f''(x) < 0$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на даному проміжку.

Теорема [про точку перегину]. Якщо x_0 , є точкою перегину функції $f(x)$ і в цій точці функція двічі диференційована, то $f''(x) = 0$.

Для учнів також вводять алгоритм знаходження точок перегину [42].

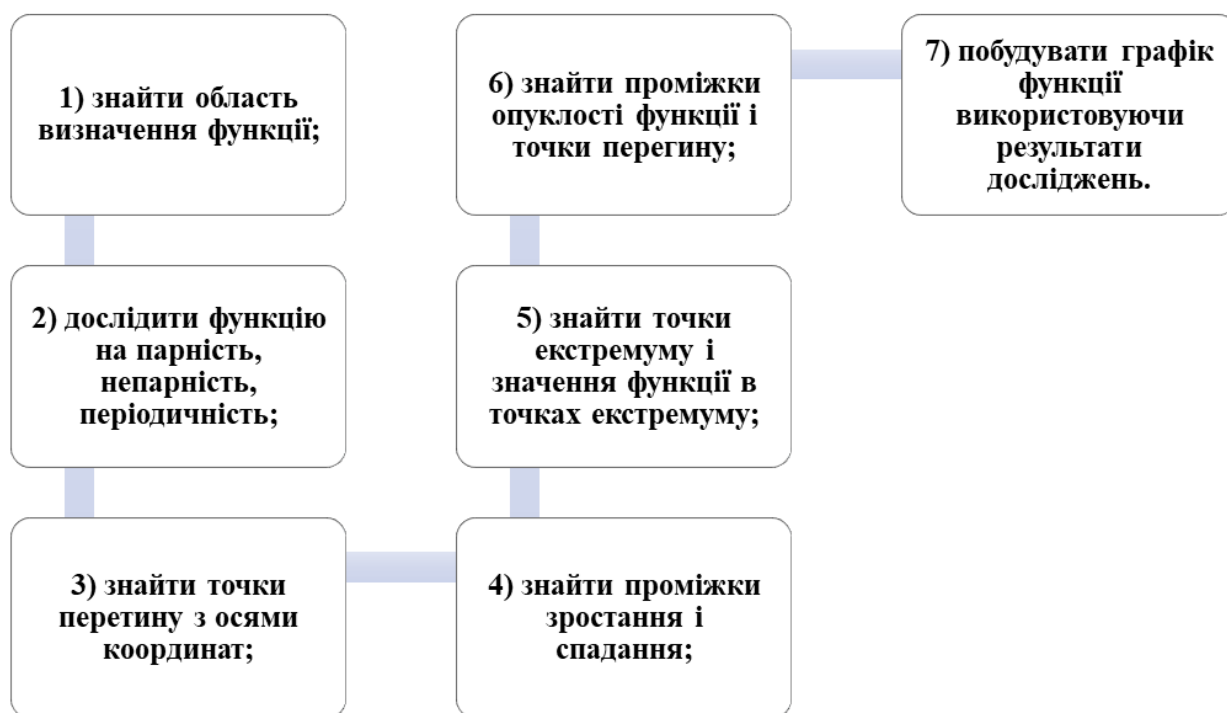
- 1) Знайти область визначення та інтервали на яких функція неперервна.
- 2) Визначити другу похідну функції.
- 3) Знайти внутрішні точки області визначення, в яких друга похідна дорівнює нулю.

4) Нанести знайдені точки на координатну пряму і знайти знак другої похідної та характер поведінки функції на кожному інтервалі.

5) Зробити висновки користуючись теоремами.

Після розгляду даних властивостей переходять до задачі, яка потребує всіх знань, умінь і навичок, що учень отримав вивчаючи похідну – до побудови графіка функції. Учня пояснюють, що існують функції, графіки яких є невідомими, але їх можна побудувати дослідивши ці функції.

Дослідження функції за допомогою похідної виконують за алгоритмом:



Отже, ми розглянули основні теоретичні відомості з теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні в курсі алгебри і початків аналізу.

2.3. Методичні рекомендації щодо проведення уроків з теми «Похідна та її застосування» при дистанційній формі навчання

До кожного уроку в електронному вигляді доцільно готувати план уроку, де зазначається тема, мета і очікувані результати, а також пропонується можлива послідовність дій з урахуванням специфіки даної теми, мети заняття та наявності навчальних матеріалів. До назви файлу варто додавати дату заняття.

Для вивчення нового матеріалу у нагоді стануть відеоресурси, які можна знайти в мережі Internet або створити власні. До вибору відеоуроків треба підходити ретельно. Для віртуального спілкування з учнями можна використати сервіси Zoom або Google Meet. При вивченні теми «Похідна та її застосування» можна обмежитися сервісом Microsoft Math Solver та динамічним геометричним середовищем GeoGebra [71].

Дистанційна підтримка навчання безпосередньо пов'язана з організацією освітнього простору, що включає в себе наступне:

- підбір освітніх ресурсів (навчальних матеріалів);
- організацію сторінок для пред'явлення робіт учнів;
- адміністрування ресурсів (організацію доступу учнів, оновлення матеріалів, моніторинг затребуваності та достатності навчальних матеріалів, з погляду учнів);
- вибір засобів організації зворотного зв'язку з учнями проведення консультацій, відповіді питання та ін.

Організуючи освітній простір та навчальний процес з застосуванням дистанційного навчання вчитель повинен продумати, яким чином учні отримають доступ до навчальних матеріалів, де будуть опубліковані самі навчальні матеріали та завдання до них, як організувати навчальну діяльність учнів у мережі, які засоби забезпечать ефективну взаємодію вчителя та учнів, як організувати контроль виконання завдань та навчальних досягнень учнів.

Таким чином, вчитель виступає як організатор навчальної діяльності учнів. На різних етапах вчитель виконує ролі проектувальника, організатора, фасилітатора (викладач який не тільки читає лекції, але й є активним та об'єктивним учасником процесу навчання), члена мережевої команди. При виборі методики викладання із застосуванням дистанційних технологій слід звернути увагу на методи, що активізують комунікативну та пізнавальну діяльність учнів, та спрямовані на самостійне та спільне групове вирішення навчальних завдань. Особливо ретельно слід продумати траєкторію вивчення навчального матеріалу учнями при обов'язковому спілкуванні з учителем,

форми консультацій, обговорень тощо. Освітній процес, що реалізується у дистанційній формі, має задовольняти класичні принципи дидактики, бути спрямованими на досягнення поставленої мети

Далі зупинимося на навчальних матеріалах.

Перше з чим зустрічаються учні перед введенням означення похідної – це приріст функції, тому ми розробили завдання, які сприяють більш глибокому розумінню даного поняття [44]. Наприклад, у наступній вправі (рис. 2.3) учням потрібно вказати, де з відмічених областей знаходиться приріст функції, а де – приріст аргументу.

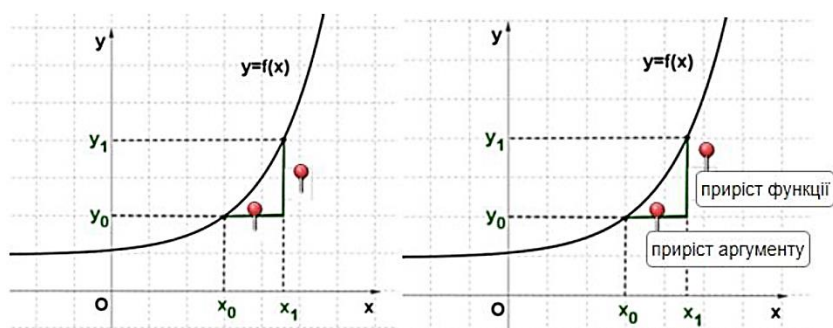


Рис. 2.3. Ілюстрація до завдання

Дана вправа є нескладною, але з її допомогою можна вирахувати тих учнів, кому є незрозумілими поняття приросту. Також можна запропонувати завдання більш практичного характеру[2] на знаходження приросту функції в заданій точці за графіком при вказаному прирості аргументу, як показано на рисунку 2.4.

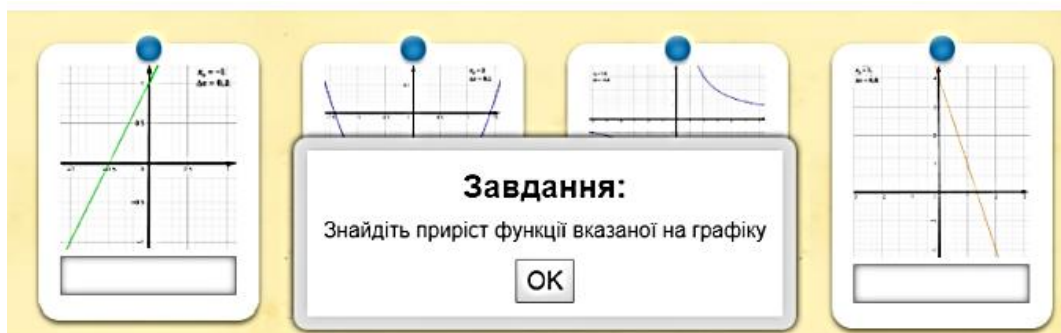


Рис. 2.4. Ілюстрація до завдання

Далі продовжуємо вивчення теми «Похідна та її застосування» за допомогою розгляду завдань, що призводять до поняття похідної (про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції), вони базуються на поняттях приросту аргументу і приросту функції, тому треба прослідкувати щоб діти орієнтувалися у цих питаннях.

В умовах дистанційного навчання можна також вийти за межі шкільного підручника та запропонувати учням економічну задачу про продуктивність праці або біологічну задачу про популяцію мікроорганізмів [32].

Розглянемо задачу про продуктивність праці.

Умова задачі. Нехай функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції за час t , і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0 .

Розв'язання.

1) В заданий момент часу t_0 задамо приріст Δt і одержимо нове значення $t_0 + \Delta t$.

2) Обчислюємо приріст кількості виробленої продукції Δu за час Δt :

$$\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$$

3) Знайдемо середню продуктивність праці:

$$z_c = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}$$

Умова задачі. Нехай залежність між кількістю особин популяції мікроорганізмів y та часом її розмноження t задана функцією $p = p(t)$. Необхідно знайти нове значення чисельності популяції, у момент t_0 .

Розв'язання.

1) В заданий момент часу t_0 задамо приріст часу Δt , тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$

2) Обчислюємо приріст чисельності популяції Δp за час Δt :

$$\Delta p = p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)$$

3) Знайдемо середню продуктивність життєдіяльності популяції:

$$r_c = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)}{\Delta t}$$

- 4) Продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при Δt прямує до нуля, тобто:

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}$$

Отже, дана задача розв'язана, розглянемо задачу про популяцію мікроорганізмів.

- 4) Продуктивність життєдіяльності популяції в момент часу t_0 можна визначити за допомогою наступної границі:

$$r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)}{\Delta t}$$

Додатковий зміст похідної

Економічний зміст похідної $u(t)$ – кількість виробленої продукції $z(t)$ – продуктивність праці $u'(t_0)=z(t_0)$	Продуктивність праці в момент часу t_0 дорівнює похідній від обсягу виробленої продукції в момент t_0 .
Біологічний зміст похідної $p(t)$ – кількість особин популяції $r(t)$ – Продуктивність життєдіяльності популяції $p'(t_0)=r(t_0)$	Продуктивність життєдіяльності популяції в момент часу t_0 дорівнює похідній від чисельності популяції в момент часу t_0 .

Тема «Похідна та її застосування» доволі складна для розуміння учнів, саме тому вона повинна мати високий рівень наочності, передбачати використання інтерактивних вправ, новітніх методів та засобів навчання. Тому впровадження інформаційно-комунікаційних технологій під час навчання учнів старших класів на сьогоднішній день є однією з умов ефективності освітнього процесу [19]. Беручи до уваги вище сказане доцільно комп'ютеризувати одну з

задач, які приводять до означення похідної, наприклад задачу про дотичну до графіка функції, а саме відтворити рух точки по параболі.

Учитель може не встигнути ознайомити учнів зі всіма задачами на уроці і виникає потреба обрати найбільш вдалий приклад, стосовно цього З.І.Слепкань [75] рекомендує перш за все надавати перевагу задачі про миттєву швидкість, аргументуючи це тим, що учнів вже знайомили з цим прикладом на уроках фізики, а вчителю математики залишається оформити розв'язання задачі в термінах і символах математики.

Поняття похідної функції є одним з найважливіших понять курсу алгебри і початків аналізу, оскільки це поняття є основним в диференціальному численні, тому необхідно створити умови для того, щоб учні досконало володіли означенням похідної та розуміли його зміст. При вивченні означення похідної учні іноді губляться і не можуть згадати, наприклад, що похідною функції в заданій точці є число, а не функція, саме тому для відпрацювання означення ми розробили вправу, яка робить акценти на так званих «крихких» моментах, в яких учні допускають помилки [25].

Як ми бачимо на рисунку 2.5, в означенні пропущені слова та учням потрібно заповнити пропуски дібравши потрібні слова. Дана вправа сприяє запам'ятовуванню означення похідної функції в точці, її можна задавати у якості домашнього завдання, щоб учні звернули увагу на потрібні моменти, або на етапі актуалізації знань. Можливо використання подібного типу завдань на самостійній роботі, але вже не в інтерактивній формі.

Завдання:
Заповніть пропуски
OK

Похідною функції f в заданій точці x_0 називають , що дорівнює відношення приросту функції f в точці x_0 до відповідного приросту аргумента, за умови, що прямує до .

Рис. 2.5. Ілюстрація до завдання

Після того, як учні розглянули знаходження похідної за допомогою означення, треба пояснити їм, що даний спосіб не завжди раціональний, і перейти до вивчення таблиці похідних. З метою формування дослідницької компетентності, як предметно-галузевої математичної компетентності, даний перехід можна здійснити дослідницьким шляхом, послідовно доводячи похідні. Але перед цим необхідно ввести означення функції диференційованої на проміжку і розмежувати, що коли похідну шукають у деякій точці, то вона як границя є певним числом, а якщо функція має похідну в кожній точці проміжку, то кожному значенню аргументу відповідає певне значення похідної [81].

Для вивчення таблиці похідних і правил обчислення похідних можна використовувати широкий спектр різноманітних інтерактивних вправ, наприклад, у формі вікторини з варіантами відповідей, за допомогою завдань на знаходження відповідностей чи вправ на пошук помилок у запропонованих рівняннях (рис. 2.6). Вправи на знаходження відповідностей не тільки сприяють вивченню та закріпленню таблиці похідних, а й розвиває уважність, виховує наполегливість, не кажучи вже про інформаційну культуру [61].

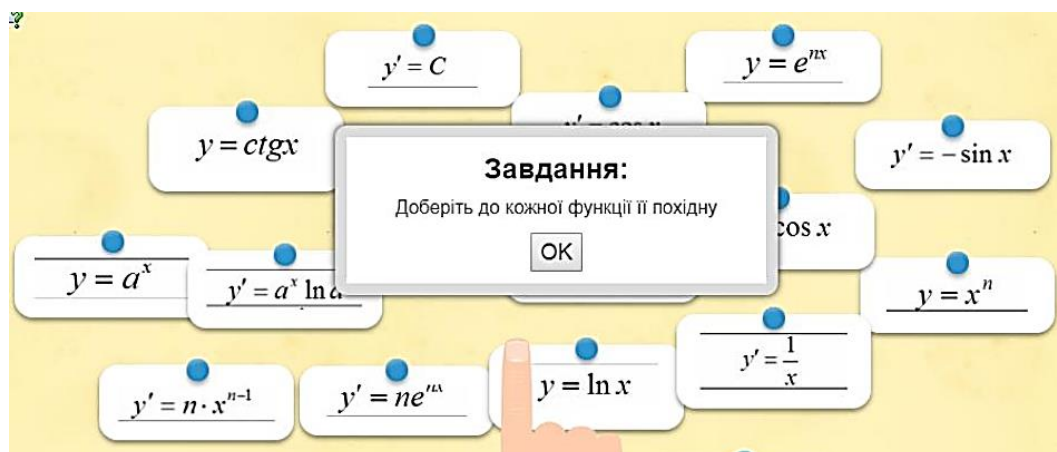


Рис. 2.6. Ілюстрація до завдання

Починати опрацювання похідних від складеної функції потрібно з представлення прикладів складових функцій, потім навчити учнів самостійно визначати зовнішню і внутрішню функції, а вже після цього формулювати правило відшукування похідної [61]. Треба сказати, що таблиця похідних вивчається не вся одразу, а по мірі вивчення правил обчислення похідних (рис. 2.7).

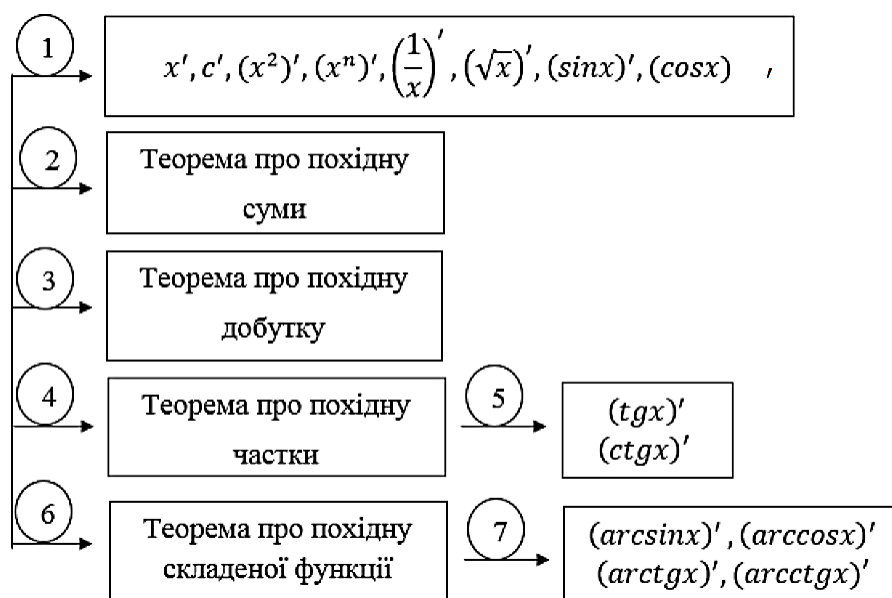


Рис. 2.7. Схема вивчення таблиці похідних

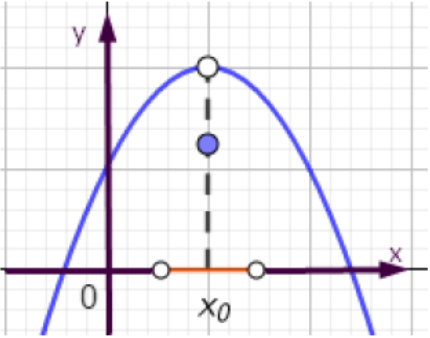
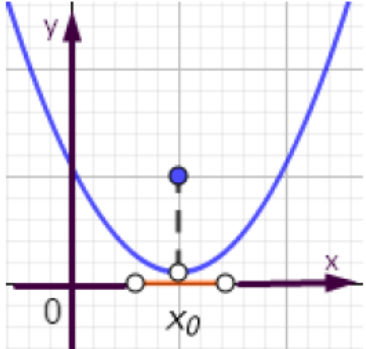
Дана послідовність вивчення обумовлена тим, що істинність деяких похідних доводиться не тільки за допомогою означення, а й за допомогою

розглянутих теорем, наприклад, похідну від тангенсу можна вивести з теореми про похідну частки, а похідну арксинусу за теоремою про похідну складеної функції [62].

Перед тим, як розпочинати вивчати способи застосування похідної до дослідження функції, необхідно провести актуалізації знань та умінь, щоб в учнів не виникало труднощів при роботі з теоремами про зростання і спадання функції, точки екстремуму, екстремуми функції, найбільше і найменше значення на відрізку, опуклість функції [44]. Так, наприклад, пригадати означення точок максимуму і мінімуму можна за допомогою таблиці (табл. 2.2).

Таблиця 2.2.

Точки екстремуму

Точка мінімуму	Точка максимуму
<p>Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \leq f(x)$.</p>	<p>Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \geq f(x)$.</p>
 <p>$x_{min} = x_0$ – точка мінімуму $y_{min} = f(x_{min})$ – мінімум</p>	 <p>$x_{max} = x_0$ – точка максимуму $y_{max} = f(x_{max})$ – максимум</p>

Після формулювання зазначених теорем, необхідно скласти алгоритми пошуку точок екстремуму, найбільшого і найменшого значення функції на відрізку, проміжків опуклості функції та обов'язково запропонувати кілька прикладів закріплення цих алгоритмів.

Доцільно після опрацювання теоретичного матеріалу про точки екстремуму функції подати учням узагальнений матеріал у вигляді таблиці (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму

Необхідна умова	Достатня умова
<p>В точках екстремуму похідна або не існує, або дорівнює нулю.</p> <div style="text-align: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 150px;"> x_0 – точка екстремуму </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> $f'(x_0) = 0$ </div> </div> <div style="text-align: center;"> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> $f'(x_0)$ не існує </div> </div> </div> </div>	<p>Якщо при переході через точку x_0, у якій функція є неперервною:</p> <p>1) похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – точка максимуму;</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> $\xrightarrow{\quad + \quad \bullet \quad - \quad}$ x_{max} </div> <p>2) якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> $\xrightarrow{\quad - \quad \bullet \quad + \quad}$ x_{min} </div>

У підручнику А.Г. Мезляка, Д.М. Номіровського, В.Б. Полонського, М.С. Якіра поглибленого рівня [45] останній параграф теми «Похідна та її застосування» має назву «Побудова графіків функцій», де потрібними стануть всі набуті знання з даної теми. Головне – це сформулювати разом з учнями алгоритм дослідження функцій за допомогою похідної та на конкретному прикладі показати суть кожного з пунктів, а також досягти послідовності їх виконання. Далі доцільно зробити акцент на розв’язуванні практичних завдань, оскільки з цим матеріалом в учнів можуть виникнути певні труднощі.

Приклади таких завдань наведено у додатку М.

Після вивчення кожної нової теми необхідно розв’язувати різнорівневі завдання (початкового, середнього, достатнього і високого рівнів), а також завдання, які допоможуть закріпити новий і дадуть можливість повторити попередній матеріал, мотиваційні задачі та задачі, які допоможуть продемонструвати міжпредметні зв’язки [46].

Приклади задач прикладного змісту [24].

Задача. Сашко вирішив зробити своїй мамі подарунок до 8 березня і замовив у друга Дениса шкатулку з дорогоцінного металу. В майстерню він приніс шматок листа з цього металу розміром 32 см. на 20 см. Потрібно виготовити відкриту зверху коробку найбільшої місткості, вирізаючи по кутах квадрати і загинаючи кромки, що залишилися. (Відповідь: при $x = 4$ см об'єм шкатулки буде найбільший).

Задача. Легенда про заснування Карфагена свідчить, що коли фінікійський корабель пристав до берега, місцеві жителі погодилися продати прибулим стільки землі, скільки можна застелити шкурою бика. Але хитра фінікійська цариця Дідона розрізала цю шкуру на ремінці, зв'язала їх і відгородила ременем велику ділянку землі, що примикала до моря. Вважаючи берег моря прямолінійним, а огорожену ділянку прямокутною, спробуйте приблизно визначити, яку площу мала змогу, зайняти Діодона, якщо розмір шкури 4 м^2 , а ширина ремінців, на які Дідона її розрізала, 1 мм. (Відповідь: 1 км^2).

Задача. Паперовому змію, який має форму кругового сектора, бажають надати таку форму, щоб він вмщав в даному периметрі $P = 80$ см найбільшу площу. Якими мають бути розміри паперового змія? (Відповідь: 20, 40).

Важливим є впровадження ігор у навчальний процес [15], то актуально буде виділяти час на уроці для «ігрових хвилинок», наприклад цікава для учнів інтерпретація гри «Хто хоче стати мільйонером» на математичний лад, як показано на рисунку 2.8. Учням пропонуються питання з варіантами відповідей, при чому питання з рівневою диференціацією, тобто чим далі тим складніші завдання.

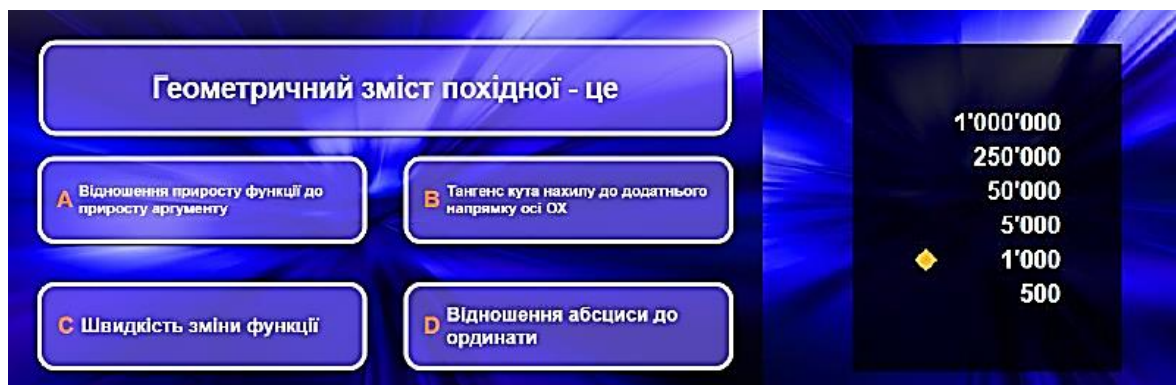


Рис. 2.8. Фрагмент дидактичної онлайн-гри

Для того, щоб учні мали змогу підготуватись до тематичного оцінювання, доцільно у Google Класі викладати самостійні роботи у формі тестів ЗНО (рис. 2.9.), але оскільки в електронній формі ми не можемо перевірити виконання завдання з відкритою формою, то останнім завданням кожного тесту є створення доповіді.



Рис. 2.9. Завдання для учнів в системі Google Клас

Отже, підсумовуючи вищесказане, проілюструємо у розробці конспекту уроку приклади використання додатку GeoGebra на дистанційних уроках.

Конспект уроку

Тема: Вивчення таблиці похідних.

Мета: навчальна: повторити і узагальнити застосування техніки диференціювання за допомогою означення похідної, організувати діяльність

учнів на виведення похідних елементарних функцій; розвивальна: розвивати аналітичне та критичне мислення, увагу, вміння працювати самостійно, інформаційну культуру учнів; виховна: виховувати пізнавальний інтерес до математики, наполегливість, працелюбність.

Підручник: А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики.

Тип уроку: комбінований урок.

Засіб проведення: Google Meet

Хід уроку

1. Організаційний момент.
2. Актуалізація опорних знань.

Пригадати означення похідної (вправа на LearningApps – <https://learningapps.org/5559666>)

Як називається математична операція знаходження похідної функції?

У чому полягає геометричний зміст похідної функції?

У чому полягає фізичний зміст похідної функції?

3. Спільна онлайн-робота вчителя та учнів

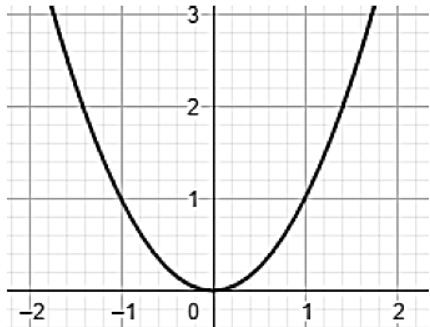

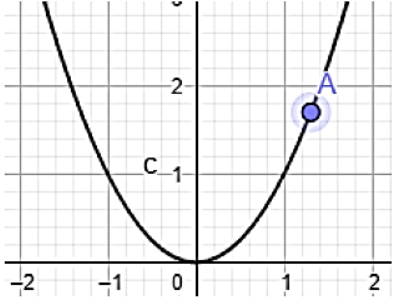

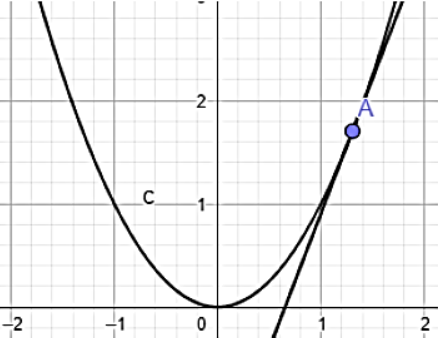

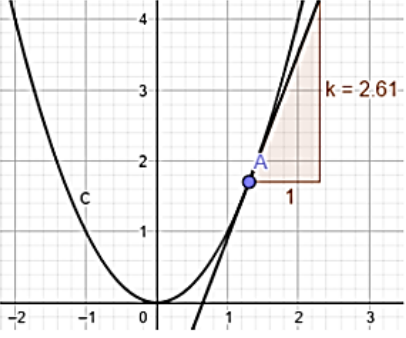
Похідна функції в точці – це число, а похідна функції в довільній точці з області визначення функції – це функція. Знаючи це, похідну функції можна обчислювати простіше, треба тільки зробити узагальнення щодо деяких елементарних функцій. Розглянемо функцію $y = kx + b$ та знайдемо її похідну за означенням.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(kx + k\Delta x + 2b) - kx - b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\Delta x + b}{\Delta x} = k$$

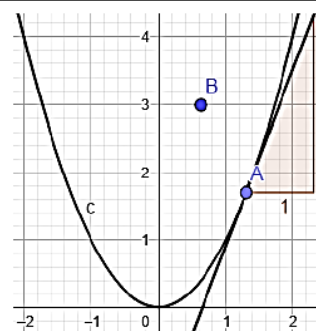
Якщо припустити, що $k = 0$, $b = C$, де C – довільна постійна, то одержимо, що $C' = 0$, тобто похідна сталої дорівнює нуль.

Якщо у формулі $(kx + b)' = k$ припустити, що $k = 1$, $b = 0$, то одержимо $x' = 1$.

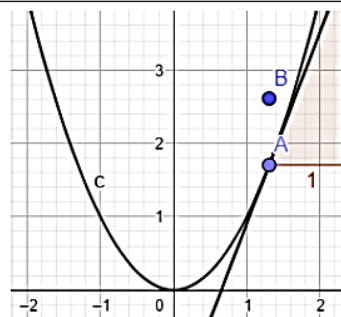
Доведемо, що похідна функції $y = x^2$ дорівнює $y' = 2x$ (побудови демонструються та виконуються вчителем у GeoGebra, учні записують у зошитах).


<p>Відкриваємо GeoGebra та вгорі зліва, в рядку введення формул, записуємо функцію $y = x^2$. Вона автоматично будується.</p>	
<p>За допомогою інструменту  Точка нанесемо на отриманий графік довільну точку.</p>	
<p>Використовуємо інструмент  Дотична та будуємо через отриману точку A дотичну. Для цього обираємо інструмент та натискаємо по-черзі на точку і функцію.</p>	
<p>Визначаємо кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис. Обираємо  Нахил прямої та клікаємо по дотичній. Спеціально підібрано так, що горизонтальний катет дорівнює 1, а вертикальний катет може змінюватися в залежності від величини кута. Для нас важливо позначення k.</p>	

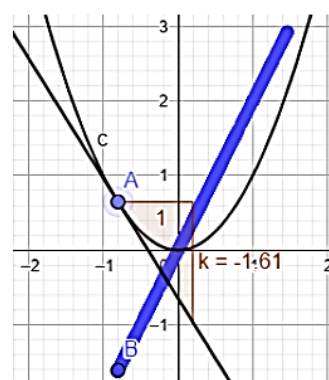
Обираємо довільну точку B за межами параболі.




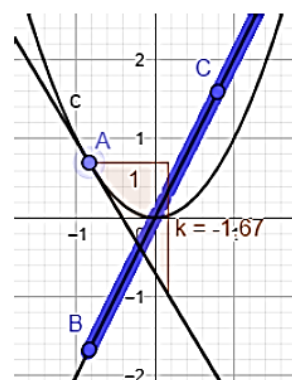
У рядку формул записуємо нові координати для цієї точки. Видаляємо попередні координати, пишемо $B = (x(A), k)$ та натискаємо кнопку Enter.



Вказуємо мишкою на точку B і натискаємо праву клавішу мишки, обираємо команду  Залишити слід. Вказуємо на точку A і зажимаючи ліву кнопку миші, рухаємо точку A вгору і вниз по параболі.



Обираємо інструмент  Прямая та проводимо пряму через слід, що залишила точка B .



У рядку вводу бачимо рівняння прямої, що залишила точка B і робимо висновки.

$$g : \text{Прямая } (B, C) \\ \rightarrow y = 2x$$

За допомогою даного прикладу ми довели, що $(x^2)' = 2x$. А в домашньому завданні ви повинні були дізнатись, використовуючи означення похідної, що $(x^3)' = 3x^2$

Отже, можна помітити закономірність, а саме: показник степеня зноситься наперед як коефіцієнт, а у степені він зменшується на одиницю:

$$x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Тоді для степеневі функції $y = x^n$ з будь-яким натуральним показником справедлива формула $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ми можемо записати функції та їх похідні до таблиці і застосувати на наступних уроках за потреби.

4. Розв'язування задач

Задача 1. Знайти похідні функцій використовуючи таблицю похідних.

1) $y = x^4$

6) $y = 9$

2) $y = x^{-15}$

7) $y = \frac{1}{x^{17}}$

3) $y = x^{-2.8}$

8) $y = \frac{1}{x^{-1}}$

4) $y = x^{20}$

9) $y = \frac{1-x}{3}$

5) $y = 5x - 6$

Розв'язання:

1) $y' = 4x^3$

5) $y = 5$

2) $y = -15x^{-16}$

6) $y = 0$

3) $y = -2.8 \cdot x^{-3.8}$

7) $y = -\frac{17}{x^{18}}$

4) $y = 20x^{19}$

8) $y = 1$

9) $y = -\frac{1}{3}$

Задача 2. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$

2) $y = 4 - x^2$

Розв'язання:

1) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$

2) $f'(x) = -2x$

5. Підведення підсумків

Рефлексія.

Домашня робота. Почати оформлювати таблицю похідних та вивчити

- ii. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$ за допомогою означення та використовуючи GeoGebra.

Отже, нами розглянуто приклади використання різних інструментів для забезпечення взаємодії учасників навчального процесу у ході вивчення теми «Похідна та її застосування» в умовах дистанційного навчання. Тому в якості методичних рекомендацій виділимо основні групи та інструменти, які можуть бути використані на різних етапах організації вивчення теми (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Приклади інструментів для дистанційного навчання

Групи	Інструменти
Комунікація з групою	Flowdock (https://www.flowdock.com/) Slack (https://slack.com/) GoToMeeting (https://www.gotomeeting.com/) WebEx (https://www.webex.com/) Appear.in (https://appear.in/) Yammer (https://www.yammer.com/) Skype (https://www.skype.com/uk/) Hipchat (https://www.stride.com/)
Управління проектом та завданнями	Asana (https://asana.com/) Jira (https://ru.atlassian.com/software/jira) Trello (https://trello.com/)
Спільна робота	Google Docs (https://www.google.com/intl/uk_ua/docs/about/) Office Online (https://www.office.com/) Wiki (https://www.wikipedia.org/) Quip (https://quip.com/) Concept Inbox (http://conceptinbox.com/)
Інструменти спільної візуалізації	Padlet (https://uk.padlet.com/) RealtimeBoard (https://realtimeboard.com/) Mural (https://mural.co/) MindMaps (https://mindmup.com/)
Інтерактивні вправи	LearningApps (https://learningapps.org/) Playbuzz (https://playbuzz.com/)
Спільне використання файлів	Google Drive (https://gsuite.google.com/) Dropbox (https://dropbox.com/)

2.4. Організація перевірки знань учнів з теми в умовах дистанційної форми навчання. Організація самостійної роботи учнів

Вивчення теми має супроводжуватися питаннями або тестами, що допомагають учню повніше вивчити навчальний матеріал і оцінити ступінь його засвоєння.

Контролюючі завдання з цільових завдань класифікують на:

- тренувальні (тренажери), призначені для осмислення та закріплення матеріалу, формування знань, умінь та навичок;
- контролюючі, призначені для оцінки рівня засвоєння знань після вивчення певного фрагмента курсу.

Контроль знань з функцій класифікують так:

- для попереднього або початкового контролю – встановлення індивідуального рівня навчання;
- для поточного контролю або контролю за ходом засвоєння матеріалу (поточне тестування) – дозволяє отримувати відомості про перебіг процесу засвоєння знань протягом певного проміжку часу, наприклад, після вивчення теми чи параграфа;
- для проміжного контролю (наприклад, це тестування після вивчення великих розділів вченого курсу);
- для підсумкового контролю (наприклад, підсумкове тестування) – закінчується оцінкою знань з усього курсу.

Найбільш популярними стосовно поточного та підсумкового контролю в умовах дистанційного навчання є такі форми: тести; відкриті питання; контрольні-діагностичні завдання; різноманітні задачі і завдання, у тому числі робота з додатковими джерелами інформації [60].

Система контролю у процесі дистанційного навчання математики може здійснюватися у вигляді:

- письмових опитувань (проведення їх у режимі синхронного взаємодії);

- тестів, призначених для контролю за засвоєнням кожного навчального елемента (виконання та перевірка в режимі on-line);
- самостійних робіт, що доповнюють систему тестів та призначених для контролю сформованості умінь застосовувати вивчені математичні факти для розв'язування завдань;
- домашніх завдань, індивідуалізованих залежно від індивідуальних цілей навчання математики;
- контрольні роботи, які забезпечують комплексний контроль рівня засвоєння системи знань із вивченої теми.

У середовищах дистанційного навчання саме тестування розроблене найбільше повно. Це обумовлено тим, що програмне середовище для цього проведення тестування, зазвичай, вже існує як підсистема у системі дистанційного навчання. Зазначимо, що тести, найчастіше, містять завдання та еталони – зразки правильного виконання завдання. Еталон для завдання творчого характеру розробити досить важко, тому тести вкрай рідко використовують для перевірки знань і умінь на вищих рівнях засвоєння [22].

У вчителя є можливість взаємодії та управління роботою окремого учня через індивідуальні засоби комунікації. Крім цього, вчитель може у віддаленому режимі розміщувати інформацію та контролювати хід виконання робіт, заданих учням.

Тому для організації перевірки знань учнів з теми «Похідна та її застосування» в умовах дистанційної форми навчання нами розроблено інтерактивні та тренувальні вправи, система рівневих завдань з теми, самостійні і контрольні роботи, приклади яких подано через виконання вправ у LeaningApps (додаток Н).

Звісно, вчитель повинен наголошувати коли саме учні мають змогу проходити той чи інший тест, але для зручності, у блоці кожної самостійної роботи учні можуть ознайомитись з рекомендаціями, де зазначено, що саме

вони повинні знати на момент проходження тестування та надані корисні зауваження.

Тестові вправи перевіряються автоматично, а дослідницьке завдання вимагає перевірки вчителем, після якої останній затверджує оцінку та програма зберігає її. Результати своєї діяльності учні можуть побачити в «Журналі оцінок» у Google Класі [22]..

Отже, необхідність упровадження дистанційного навчання пов'язана з вимогами, які диктує сучасне суспільство. Поява нових форм переробки та отримання інформації, розширення і ускладнення соціального досвіду зумовили значущість даної проблеми. Завдання самого вчителя – організувати онлайн діяльність учня, навчити його самостійно здобувати інформацію з теми. Варто відзначити, що в науковій літературі з методики навчання математики проблема дистанційного навчання ще обговорюється, пропонуються нові шляхи її вирішення, що ми і показали у даній роботі.

ВИСНОВКИ

Проведено дослідження особливостей дистанційної форми навчання математики учнів старшої школи, зокрема, теми «Похідна та її застосування».

У кваліфікаційній роботі описано технологію організації дистанційного навчання математики школярів 10-11 класів та нормативно-правове регулювання навчального процесу ЗЗСО під час дистанційної форми навчання, охарактеризовані основні форми організації діяльності школярів при дистанційній освіті; з'ясовано психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи, що виникають під час дистанційного навчання математики; виявлено специфіку використання Google-сервісів та інших систем дистанційної освіти при навчанні математики учнів старшої школи. У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості дистанційного навчання учнів теми «Похідна та її застосування», зокрема, проаналізовано навчальні програми, підручники та основний зміст навчального матеріалу з теми; розкрито організаційні форми проведення уроків під час дистанційного навчання та перевірки знань учнів; наведені практичні розробки з теми дослідження.

Спираючись на напрацьований педагогічний досвід освітян, ми означили методи і форми, які сприяють розвитку мислення учнів старшої школи у ході вивчення теми в умовах дистанційного навчання; підібрали систему завдань як засобу педагогічної діагностики успішності і розвитку учнів класів різних профілів навчання у ході навчання математики, проаналізували можливості комп'ютерної підтримки вивчення теми. Розробили та запропонували форми роботи із динамічною математичною програмою GeoGebra, виділили способи застосування цифрових технологій та різноманітних онлайн-ресурсів на уроках з теми «Похідна та її застосування» в умовах дистанційного навчання.

Робота буде корисна для використання у практично-педагогічній діяльності вчителям математики закладів загальної середньої освіти, методистам, викладачам, учням, усім, хто цікавиться вивченням математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів. Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Педагогічні науки : зб. наук. пр. 2014. Вип.1. С. 12–23.
2. Алгебра 11кл.: збірник задач і контрольних робіт/А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 96 с.: іл.
3. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів : монографія. Київ : НПУ ім. Драгоманова, 2005. 360 с.
4. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : навч. посіб. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. 312 с.
5. Бевз Г. П. Методика розв’язування стереометричних задач. Київ : Рад. школа, 1988. 192 с.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
8. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
9. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. М. : Наука, 1971. 736 с.
10. Боднар Г. Я. Навчально-виховний проект «Похідна у нашому житті». URL: http://bibrkaschool.org.ua/script/regis/upload/files/Zastosuvannya-_pokhiidnoi.docx (дата звернення : 14.03.2021).
11. Бугай А. С. Короткий тлумачний математичний словник. Київ : Рад. школа, 1964. 428 с.

12. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І, Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
13. Ващуленко О. П. Формування предметних і ключових компетентностей учнів основної школи у процесі навчання геометрії. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі : метод. посіб. / О. І. Глобін та ін. Київ : Педагогічна думка, 2015. С. 167–206.
14. Видатні особистості. Ал-Хорезмі. URL : http://novopetrivske-osoba.edukit.mk.ua/vidatni_matematiki/al-horezmi/ (дата звернення : 14.03.2021).
15. Використання ігрових ситуацій в процесі навчання математики URL: <https://vseosvita.ua/library/vikoristanna-igrovih-situacij-v-procesi-navcanna-matematiki-34095.html>
16. Воєвода А. Л., Струк С. М. Застосування методу проектів у процесі навчання алгебри і початків аналізу. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми. 2014. Вип. 38. С. 213–217.
17. Гоменюк Г. В. Концептуальна модель компетентісно орієнтованого навчання алгебри учнів основної школи. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі. 2014. Вип. 14. С. 87–93.
18. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти (чинний від 2011–11–23). URL: <http://old.mon.gov.ua/ua/queste/often-red/state-standards/> (дата звернення : 14.03.2020).
19. Дереза І. С. Використання СКМ GeoGebra під час навчання учнів теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні вивчення математики / І. С. Дереза, О. А. Іванова // Новітні комп'ютерні технології. – Кривий Ріг: Видавничий центр ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2018. – Том XVI. – с. 269-274.

20. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навч. посіб. Київ : Академвидав, 2004. 352 с.
21. Дослідження функції URL: <https://yukhym.com/uk/doslidzhennya-funktsiji.html>
22. Дистанційне навчання як сучасна освітня технологія [Електронний ресурс] : матеріали міжвузівського вебінару (м. Вінниця, 31 березня 2017 р.) / відп. ред. Л.Б.Ліщинська. – Вінниця : ВТЕІ КНТЕУ, 2017. – 102 с.
23. Зіненко І. М. Особливості вивчення математики в старшій профільній школі за умов впровадження компетентнісного підходу. Проблеми сучасної педагогічної освіти. Педагогіка і психологія. 2013. Вип. 40(1). С. 135–140.
24. Збірник прикладних задач URL : <https://vseosvita.ua/library/zbirnik-prikladnih-zadac-51690.html>
25. Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 384 с.
26. Колмогоров А. М. та ін. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10–11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 1994. 350 с.
27. Коменський Я. А. Велика дидактика. Закони добре організованої школи. Історія зарубіжної педагогіки : хрестоматія / Є. І. Коваленко. Київ : Центр учбової літ-ри, 2006. С. 155–185.
28. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики : метод. посіб. для вчителів / автор-упор. Г. Ф. Зверєва. Харків, 2009. 81 с.
29. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі : метод. посіб. / О. І. Глобін та ін. Київ : Педагогічна думка, 2015. 245 с.
30. Кучеренко І. Класно-урочна система Я. Коменського: становлення й історія розвитку. Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету. 2012. Ч. 3. С. 158–165.

31. Лекція № 7. Тема: Поняття функціональної залежності. Способи задання та властивості функцій. URL: <https://aekmatem.pl.ua/wp-content/uploads/2015/06/L7.pdf> (дата звернення : 14.09.2021).

32. Липа Тетяна. Дистанційне навчання математики учнів основної школи / Т. Липа // Актуальні проблеми математики, фізики і технологій : зб. наук. пр. / ред. кол.: С. В. Подолянчук (голова) [та ін.] ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця: ТОВ «Меркьюрі-Поділля», 2020. – Вип. 17. – С. 148-151

33. Лист № 1/11-5966 від 01.07.2019 року: «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 навчальному році». URL: http://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/65024/ (дата звернення : 14.03.2020).

34. Лист № 1/11-5966 від 01.07.2019 року: «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 навчальному році». URL: http://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/65024/ (дата звернення : 14.09.2021).

35. Лист МОН № 1/9-415 від 03.07.18 року: «Щодо вивчення у закладах загальної середньої освіти навчальних предметів у 2018/2019 навчальному році». URL: https://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/61466// (дата звернення : 14.09.2021).

36. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений : в 5 т. М., Л. : Гостехиздат, 1951. Т.V. 535 с.

37. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект : монографія. Черкаси : Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. 368 с.

38. Маланюк М. П., Возняк Г. П. Стежини до коренів істини. Тернопіль, 1993. 62 с.

39. Математика. Ґрунтовна підготовка до ЗНО URL: https://subject.com.ua/mathematics/zno_2017/26.html

40. Мерзляк А. Г. та ін. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.

41. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А, Полонський В. Б, Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 256 с.

42. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 512 с.: іл.

43. Мерзляк А. Г. Алгебра: підручник для 11 класу для профільного та академічного рівня вивчення математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 431 с.: іл.

44. Методика вивчення теми «Похідна» в шкільному курсі математики URL: <https://infopedia.su/2x13ab.html>

45. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – Ч. 1. – 256 с.: іл.

46. Методичні рекомендації URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/metodichni%20recomendazii/1_9-415.docx

47. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка : навч. посібник. Київ : ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика», 2009. 656 с.

48. Моріна Н. Конспект уроку на тему «Найбільше і найменше значення функції на відрізку». URL: <https://academia.in.ua/конспекти/конспект-уроку-на-тему-найбільше-і-найменше-значення-функції-на-відрізку> (дата звернення : 14.09.2021).

49. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень

стандарту. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення : 14.09.2021).

50. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення : 14.09.2021).

51. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 14.09.2021).

52. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.

53. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 204 с.

54. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.: іл.

55. Онищук В. А. Урок в современной школе. Москва : Просвещение, 1981. 191 с.

56. Оновлення програм для базової середньої освіти URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/kolegiya-mon-26-travnnya.pdf> (дата звернення : 14.09.2021).

57. Онопрієнко О. В., Листопад Н. П., Скворцова С. О. Компетентнісний підхід до навчання математики. Київ : Редакції газет з дошкільної та початкової освіти, 2014. 128 с.

58. Онопрієнко О. Проекти на уроках математики. Учитель початкової школи. 2017. № 2. С. 7–9.

59. Островерхова Н. М. Урок як соціально-педагогічна система. Освіта та розвиток обдарованої особистості. 2014. № 2. С. 9–14.
60. Подласый И.П. Педагогика. Новый курс. М : ВЛАДОС, 2000. 574 с.
61. Похідна функції URL: <https://yukhym.com/uk/diferentsiyuvannya-funktsij.html>
62. Похідна та її застосування [Текст]: навчальний посібник / В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, Т. А. Агошкова, І. В. Клименко, Н. В. Міхєєва; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с.
63. Програма ЗНО з математики з 2007 по 2021 рік. URL: <https://zno.osvita.ua/mathematics/>
64. Про затвердження Положення про дистанційне навчання : Наказ від 25.04.2013 р. № 466. Міністерство освіти і науки України. URL: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13>.
65. Про освіту : Закон України від 05.09.2017р. № 2145-19. Відомості Верховної Ради України. 2017. № 38–39. Ст. 380.
66. Прошкін В. В., Панішева О. В. Застосування системи формування готовності майбутніх учителів математики до роботи в класах гуманітарного профілю. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2015. № 9 (53). С. 399–409.
67. Пруднікова Л. О. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків. URL: http://osvita.ua/school/lessons_summary/math/39839/ (дата звернення : 14.09.2021).
68. Прус А. В., Сверчевська І. А. Вчимося розв'язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях : навч. посіб. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. 32 с.
69. Прус А., Швець В. Прикладна спрямованість стереометрії: 10–11 кл. Київ : Шк. світ, 2007. 128 с.
70. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.

71. Ріжняк Р. Моделювання розв'язування текстових математичних задач: інноваційний підхід. Наукові записки КДПУ ім. В. Винниченка. Серія : Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2015. Вип. 7. С. 80–87.
72. Савицька О. С. Особливості впровадження елективних курсів в систему профільної технологічної освіти. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки : реалії та перспективи. 2012. Вип. 31. С. 217–222.
73. Семенець С. П. Теорія задач розвивальної математичної освіти. Евристика і дидактика точних наук. 2008. № 30. С. 130–134.
74. Сікорський П. Проблема диференційованого навчання математики у ПТНЗ. Дидактика, методика і технології навчання. Педагогіка і психологія професійної освіти. 2013. №3. С. 31–38.
75. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
76. Словник української мови : в 11 т. / гол. ред. І. К. Білодід. Київ : Наук. думка, 1970–1980. Т. 1–11.
77. Субін Ю. П. Реалізація компетентнісного підходу на уроках математики. URL: <https://vseosvita.ua/library/realizacia-kompetentnisonogo-pidhodu-na-urokah-matematiki-materiali-auditornoi-praktiki-7385> (дата звернення : 14.09.2021).
78. Томусяк А. А., Трохименко В. С. Математичний аналіз. Вінниця, 1999. 488 с.
79. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М. : Наука, 1968. Т. 1. 440 с.
80. Фіцула М. М. Педагогіка : навч. посіб. Тернопіль : «Навчальна книга – Богдан», 1997. 192 с.
81. Формування ключових компетентностей на уроках математики URL: <https://naurok.com.ua/formuvannya-klyuchovih-kompetentnostey-na-urokah-matematiki-osnovna-shkola-27697.html>

82. Хмельницька Л. К. Похідна. URL:
http://osvita.ua/school/lessons_summary/math/25459/
(дата звернення : 14.09.2021).

ДОДАТКИ

Додаток А

Документи, що регламентують інформатизацію системи освіти

- Закону України «Про освіту» від 01.01.2019, №1556-VII;
- Закону України «Про Національну програму інформатизації» від 1.08.2016, №74/98-ВР;
- Указу Президента «Про заходи щодо розвитку національної складової глобальної інформаційної мережі Інтернет та забезпечення широкого доступу до цієї мережі в Україні» від 31.07.2000, № 928/2000;
- Розпорядження Кабінету Міністрів України «Про схвалення Стратегії розвитку інформаційного суспільства в Україні» від 15.05.2013, № 386-2013-р;
- Наказ Міністерства освіти і науки України «Про затвердження Положення про дистанційне навчання» від 21.08.2015, № з0703-13;
- Постанова Верховної Ради України «Про Рекомендації парламентських слухань на тему: «Реформи галузі інформаційно-комунікаційних технологій та розвиток інформаційного простору України» від 31.03.2016, №1073-VIII;
- Державній національній програмі «Освіта» («Україна XXI століття») від 3.11.1993, № 896,
- Національній доктрині розвитку освіти від 17.04.2002, № 347/2002,
- Концептуальних засадах розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в Європейський освітній простір від 13.12.2004, № 998,
- Національній стратегії розвитку освіти в Україні на період до 2021 року від 25.06.2013, № 344/2013,
- Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року від 14.12.2016, № 988-р,
- Концепції розвитку неперервної педагогічної освіти від 16.07.2018, № 776,
- Проєкті «Дорожня карта освітньої реформи (2015-2025)» від 08.10.2015,
- Дорожній карті інтеграції України до Європейського дослідницького простору (ERA-UA) від 23.03.2018,
- Європейській стратегії «Цифровий порядок денний для Європи» до 2020 року від 19.05.2010,
- Концепції розвитку цифрової економіки та суспільства України на 2018-2020 рр. та план заходів щодо її реалізації від 17.01.2018, № 67-р;
- Концепції «Здоров'я 2020: український вимір» від 31.10.2011, № 1164-р,
- Цільовій соціальній комплексній програмі розвитку фізичної культури і здоров'я від 1.03.2017, № 115,
- листі Міністерства освіти і науки України «Щодо організації фізичного виховання у вищих навчальних закладах» від 25.09.2015, № 1/9-454,
- Постанові Верховної Ради України «Про забезпечення сталого розвитку сфери фізичної культури і спорту в Україні в умовах децентралізації влади» від 19.10.2016, № 1695-VIII,
- інших державних програмах і документах.

Компоненти цифрової компетентності (Dig Comp 2.0)

№	Компоненти	Компоненти цифрової компетентності та їх опис
1	інформаційно цифрові дані	Досліджувати інформаційні потреби суб'єктів навчання, визначати джерела цифрової інформації, оцінювати інформацію та її зміст; мати банк джерел та їх зміст для зберігання, уміти використовувати цифрові дані, інформацію та контент у освітньому просторі
2	комунікація засобами співпраці	Визначати засоби цифрової взаємодії, спілкування за допомогою цифрових технологій, через навчання іноземним мовам розуміти культуру поколінь; брати участь у житті суспільства через публічні та приватні цифрові служби та громадянське співтовариство; для управління цифровою ідентифікацією та репутацією
3	цифровий контент	Поняття цифрового контенту, створення та його редагування; вдосконалення засобів інтеграції інформації, контент знань та його розуміння, авторські права та ліцензії
4	кібербезпека	Знання чинного законодавства, фізичні умови захисту інформації та пристроїв її зберігання, конфіденційність в цифрових середовищах; фізичне та психологічне здоров'я й цифровізація, Роль цифровізації для соціального добробуту та соціальної інтеграції; вплив розвитку цифрових технологій на навколишнє середовище та їхнє використання
5	способи розв'язання проблем	Залучення суб'єктів навчання до суспільно значимих проблем, уміння визнати глобалізовані проблеми та знати шляхи їх розв'язання, окреслювати проблемні ситуації в цифрових середовищах; використовувати цифрові інструменти для реалізації інноваційних процесів

Додаток В**Принципи роботи з поколінням Z (за О. Штурвало)**

Принцип супермена. Основою мотивації покоління Z є інтерес. Відсутність нудьги та наявність завдань, що захоплюють, – частина їх комфортного стану. Учень може швидко виконати декілька завдань чи рухів одночасно без втрати якості. Але він ще не готовий виконувати завдання, сутності якого не розуміє. Йому важливо знати: що він робить, чому, навіщо і як це узгоджується з метою. Тому вчитель фізичної культури має детально пояснювати вплив кожної вправи, рухової дії, кожного завдання на стан здоров'я чи фізичний стан організму. Також правильне формулювання завдання вчителем передбачає займенник «ми», наприклад, «Ми виконаємо три різні варіанти вправи...», «Ми хочемо виконати спільно таку дію», «За допомогою цієї вправи ми зможемо показати важливість розвитку...».

Принцип правил гри. Представники покоління Z можуть виконувати завдання якісно і вчасно. Однак їм важливо бачити в особі вчителя не керівника, а консультанта, порадника, помічника; знати конкретний термін виконання роботи; розуміти, що не виконання супроводжується покаранням. Тому важливо, аби вчитель фізичної культури демонстрував виконання рухових дій та допомагав учням їх виконувати.

Принцип швидкого результату. Покоління Z жадають перемоги, а тому їм важливо знати, що певна діяльність їм посильна. Тому важливо, аби вчитель фізичної культури пояснював значущість виконання вправ, наводив приклади, що ілюструють межу фізичних можливостей людини, популяризують спортивні досягнення, здоровий спосіб життя тощо.

Принцип нагороди. Учні покоління Z не можуть довго чекати; вони бажають, щоб їхні мрії здійснювалися швидко. Тому потрібно вказати не тільки термін виконання завдань, але й час досягнення першої перемоги. Це означає, що мета «бути здоровим» має формулюватися не як віддалена, загальна перспектива, а через конкретні завдання, конкретні впливи певної

фізкультурної діяльності на фізичний стан, психічне, духовне та соціальне здоров'я учня.

Основні можливості Google Classroom

1. Налаштування навчального курсу. Для кожної дисципліни створюється свій ключ доступу, який учні та вчителі використовують для приєднання до навчального курсу. Або викладач може розіслати запрошення до свого навчального курсу, використовуючи розсилку на пошту кожного і вони відкриваючи отриманий лист натискають кнопку «Приєднатися» і автоматично стають учасниками курсу.

2. Інтеграція з Google Диском. Коли викладач використовує Google Classroom, папка «Classroom» автоматично створюється на його робочому Google Диску. Для учнів також створюється папка «Classroom» із вкладеними папками для кожного навчального курсу, до якого вони приєднуються.

3. Різноманітні можливості для створення та розповсюдження завдань. Усі записи в Classroom відображаються як у блозі, рядком. Учитель отримує можливість використовувати в навчальному курсі дописи 4-х типів: «Створити оголошення», «Створити завдання», «Створити запитання» та «Використати наявний допис». Допис «Створити запитання» призначений для створення запитання з короткою відповіддю або запитання, що має варіанти відповіді. Допис «Створити завдання» призначений для створення індивідуальних завдань. Допис «Використати наявний допис» дає можливість викладачеві використати завдання чи запитання, створене в іншому навчальному курсі (в своєму чи тому до якого він має доступ). Усі чотири типи дописів дають можливість використовувати посилання на файли будь-якого виду з Google-диска, зовнішнє посилання та посилання на відео з YouTube. Таким чином, забезпечуються умови для доступу учнів до навчального матеріалу (презентації, лекції, демонстрації, інтерактивні завдання, тестування, додаткова література та відео-уроки), при створенні завдання у вигляді Google-документа, платформа буде створювати і поширювати індивідуальні копії документа для кожного учня навчального курсу з назвою типу – копія – .doc. Це дає можливість давати завдання на відновлення записів, вставлення пропущених і

завдання, що вимагають розгорнутої відповіді. Також є можливість надання доступу для одночасної роботи над одним документом кільком користувачам. Спільна робота розширює можливості навчання, учні можуть допомагати один одному.

4. Управління часом. При створенні завдань викладач може вказати термін здачі роботи. Коли учень здає завдання до завершення терміну виконання, на його документі з'являється статус «Перегляд», що дозволяє викладачеві перевірити роботу. Після перевірки вчитель може повернути завдання учню для доопрацювання. Воно автоматично переходить у статус «Редагування» і учень продовжує роботу над документом. Крім того, є можливість запланувати публікацію завдання на потрібну дату і час, використовуючи опцію «Запланувати».

5. Контроль виконання завдань і оцінювання. За усіма завданнями можна спостерігати одночасно і контролювати роботу над окремим завданням відразу в декількох класах. Оцінювання можна виконувати вручну або автоматизовано, наприклад, використовуючи додаток Flubaroo. Система оцінювання може бути адаптована під будь-яку кількість балів (автоматично 100 балів). Після оцінювання за допомогою кнопки «Повернути» оцінка відправляється на пошту кожного учня, хоча за необхідності можна змінити оцінку. Також є можливість експортувати всі оцінки курсу до таблиці.

6. Комунікація в Classroom. Завдяки поєднанню можливостей сервісу “Оголошення” і коментування завдань в Classroom, вчителі та учні завжди підтримують зв'язок і слідкують за станом виконання/перевірки кожного завдання.

7. Звіти для батьків. У Classroom з'явилась ще одна дуже корисна функція – можливість розсилки звітів батькам/опікунам учнів. Батьки отримують запрошення на будь-яку існуючу електронну адресу і мають можливість щодня або щотижня отримувати звіт про невиконані або заплановані роботи й успіхи учня. За бажанням у будь-який момент опікун може відмовитись від отримання розсилки.

**Формування ключових компетентностей у процесі вивчення
математики старшої школи**

Таблиця Д.1

**Формування деяких ключових компетентностей в процесі вивчення
математики старшої школи**

з/п	Ключова компетентність	Компоненти
.	Математична компетентність	<p>Уміння: оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати математичні і прикладні задачі; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.</p> <p>Ставлення: усвідомлення значення математики для суспільного життя, розвитку держави, успішного вивчення інших дисциплін.</p> <p>Навчальні ресурси: математичні і прикладні задачі.</p>
.	Інформаційно-цифрова компетентність	<p>Уміння: структурувати дані; працювати за алгоритмом та складати алгоритми; визначати достатність даних та доводити справедливості тверджень; використовувати різні знакові системи; знаходити, оцінювати та працювати з інформацією.</p>

		<p>Ставлення: критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного розв'язування математичних і прикладних задач.</p> <p>Навчальні ресурси: візуалізація даних, в т. ч. за допомогою програмних засобів.</p>
.	<p>Уміння вчитися впродовж життя</p>	<p>Уміння: визначати мету, завдання навчальної діяльності та підбирати і застосовувати потрібні знання, вміння і способи діяльності для їх реалізації; організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість.</p> <p>Ставлення: усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань і вмінь; мотивація у пізнанні світу та розуміння важливості вчитися впродовж життя; прагнення до вдосконалення результатів своєї діяльності.</p> <p>Навчальні ресурси: моделювання власної освітньої траєкторії; статистична інформація; історичні задачі; завдання ймовірного змісту.</p>

Додаток Е

**Порівняння навчальної програми з теми «Похідна та її застосування» для
профільного та поглибленого рівнів 2018-2019 навчальний рік**

Таблиця Е.1

Порівняння навчальної програми з теми «Похідна та її застосування»

Профільний рівень 54 години	Поглиблений рівень 50 годин
<ul style="list-style-type: none"> • Задачі, які приводять до поняття похідної. • Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції. • Похідні степеневі та тригонометричних функцій. • Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. • Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей. 	<ul style="list-style-type: none"> • Задачі, які приводять до поняття похідної. • Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції <i>та оберненої функції</i>. • Похідна степеневі, тригонометричних <i>та обернених тригонометричних функцій</i>. • <i>Основні теореми диференціального числення.</i> • Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. • Застосування похідної для розв'язування рівнянь і доведення нерівностей <i>та тотожностей</i>.

<ul style="list-style-type: none"> • Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину. • Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину. • Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків. • Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту. 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Похідні вищих порядків.</i> Поняття опуклості функції та точки перегину. • Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину. • Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій та побудови їх графіків. <i>[Нерівність Йєнсена та її застосування.]</i> • Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Додаток Ж

Аналіз програми ЗНО з теми «Похідна та її застосування»

Таблиця Ж.1

Витяг з програми ЗНО з математики 2018 року

Назва розділу, теми	Учень повинен знати	Предметні вміння та способи навчальної діяльності
Розділ: ФУНКЦІЇ		
Похідна функції, її	– означення похідної	– знаходити кутовий
геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання	<p>функції в точці;</p> <p>– фізичний та геометричний зміст похідної;</p> <p>– рівняння дотичної до графіка функції в точці;</p> <p>– таблиця похідних елементарних функцій;</p> <p>– правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій;</p> <p>– правило знаходження похідної складеної функції</p>	<p>коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в точці;</p> <p>– знаходити похідні елементарних функцій;</p> <p>– знаходити числове значення похідної функції в точці для заданого значення аргументу;</p> <p>– знаходити похідну суми, добутку і частки двох функцій;</p> <p>– знаходити похідну складеної функції;</p> <p>– розв'язувати задачі з використанням геометричного та фізичного змісту похідної</p>

Задача про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці

Умова задачі. Розглянемо довільну неперервну функцію $y = f(x)$, графіком якої є крива лінія (рисунок 1.3.). Нехай точки M_0 та M належать цій функції, проведемо січну MM_0 та зафіксуємо точку M_0 , а точка M , рухаючись по кривій, наближається до точки M_0 , при цьому в граничному положенні при наближенні точки M до точки M_0 січна займе положення прямої M_0T .

Пряму M_0T називають дотичною до даної кривої в точці M_0 . Потрібно знайти рівняння дотичної M_0T .

Розв'язання.

Для початку вчитель малює графік довільної функції разом з січною та дотичною. Подібний графік міститься на рисунку 1.4.

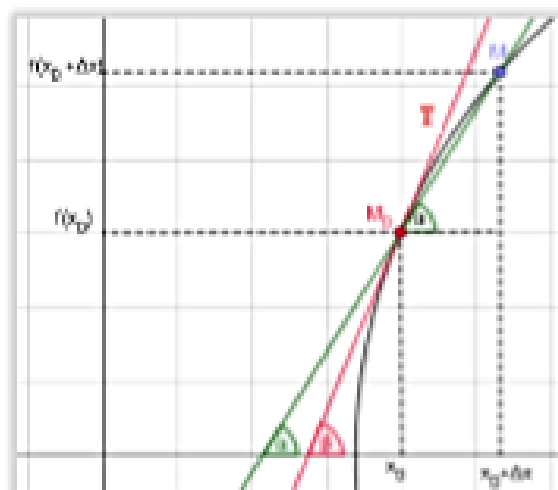


Рис. 1.4. Дотична до графіка функції

Далі пояснюється, що дотична M_0T – це пряма, а положення прямої $y = kx + b$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = \operatorname{tg} \beta$, де β – кут між прямою і додатнім напрямом вісі OX . Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число k , а для цього використовують розглянутий вище алгоритмом.

- 1) Надають аргументу x_0 приросту Δx та одержують нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.
- 2) Відносно приросту аргументу знаходять відповідний приріст самої функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- 3) Знаходять кутовий коефіцієнт січної MM_0 , який дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- 4) Обчислюють кутовий коефіцієнт дотичної M_0T , який дорівнює $\operatorname{tg} \beta$:

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Записують рівняння дотичної M_0T у вигляді $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, де $k = \operatorname{tg} \beta$ і тим самим знаходять розв'язок задачі.

Зміст похідної

<p>Механічний зміст похідної</p> <p>$s(t)$ – закон руху матеріальної точки</p> <p>$v(t)$ – миттєва швидкість</p> <p>$s'(t_0) = v(t_0)$</p>	<p>Миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює похідній функції, що визначає закон руху матеріальної точки по координатній прямій у точці t_0.</p>
<p>Геометричний зміст похідної</p> <p>$f'(x_0) = k(x_0) = \operatorname{tg} \beta$,</p> <p>де</p> <p>$f$ – дана функція</p> <p>$\angle \beta$ – кут нахилу дотичної до графіка f</p> <p>k – кутовий коефіцієнт дотичної</p> <p>$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – рівняння дотичної до графіка функції f в точці x_0</p>	<p>Похідна функції в заданій точці є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції в цій точці, тобто дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці.</p> <p>(Кут відлічують від додатного напрямку осі OX проти годинникової стрілки.)</p>

Таблиця похідних

№	Дана функція	Похідна даної функції
1	$c, c = \text{const}$	0
2	x	1
3	x^2	$2x$
4	$x^n, n \in R$	nx^{n-1}
5	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила обчислення похідних

Теорема 1 [про похідну суми (різниці) функцій].

У тих точках, у яких є диференційованими функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ також є диференційованою функція $y = f(x) \pm g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

Тобто, можна сказати, що похідна суми дорівнює сумі похідних.

Теорема 2 [про похідну добутку функцій].

У тих точках, де є диференційованими функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційованою функція $y = f(x) \cdot g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

Наслідок з теореми про похідну добутку функцій.

У тих точках, де є диференційованою функція $y = f(x)$, також є диференційованою функція $y = kf(x)$, де k – деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність $(kf(x))' = kf'(x)$.

Для учнів буде простішим таке формулювання даного наслідку, як: постійний множник можна вносити за знак похідної.

Теорема 3 [про похідну частки функцій].

У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційованими і значення функції $y = g(x)$ не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційованою, причому для всіх таких точок виконується рівність:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Диференціюючи функції, учні обов'язково зіткнуться зі складеними функціями виду $h(x) = f(g(x))$, для таких випадків існує наступна теорема.

Теорема 4 [про похідну складеної функції].

Якщо функція $t = g(x)$ диференційована в точці x_0 , а функція $y = f(x)$ диференційована в точці t_0 , де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційованою в точці x_0 , причому $h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$.

Після теореми 4, з метою формування дослідницької компетентності засобами розвитку дедуктивного методу, перед учнями ставлять питання про зв'язок між похідними взаємно обернених функцій та встановлюють його за допомогою наступної теореми.

Теорема 5 [про похідну оберненої функції].

Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0 , де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція g диференційована в точці y_0 і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Приклади завдань до теми «Похідна та її застосування»

Приклад 1. Побудувати графік функції

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

Розв'язання.

1) Область визначення функції f :

$$X = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

2) Функція парна. Тому її графік симетричний відносно осі ординат.

3) Функція не є періодичною. Це впливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

4) Графік функції перетинає вісь ординат у точці $(0; 1)$. Нулі функції відсутні. Отже, графік функції не перетинає вісь абсцис.

5) Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки. Для цього знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2};$$

$$\frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0;$$

$x=0$ —критична точка.

Для $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$ $f'(x) > 0$. Отже, на цих проміжках функція зростає. Оскільки функція парна, то на проміжках $(0; 2) \cup (2; +\infty)$ вона спадає. Тоді точка $x=0$ є точкою локального максимуму. Знайдемо його значення

$$f(0) = -1.$$

6) Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину:

$$f''(x) = -16 \left(\frac{x}{(x^2 - 4)^2} \right) = -16 \frac{(x-4)^2 - x \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} =$$

$$= -16 \frac{-3x^2 - 4}{(x^2 - 4)^3} = 16 \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}.$$

На проміжках $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вниз. На проміжку $(-2; 2)$ $f''(x) < 0$, а тому графік функції опуклий вгору.

Точки перегину відсутні.

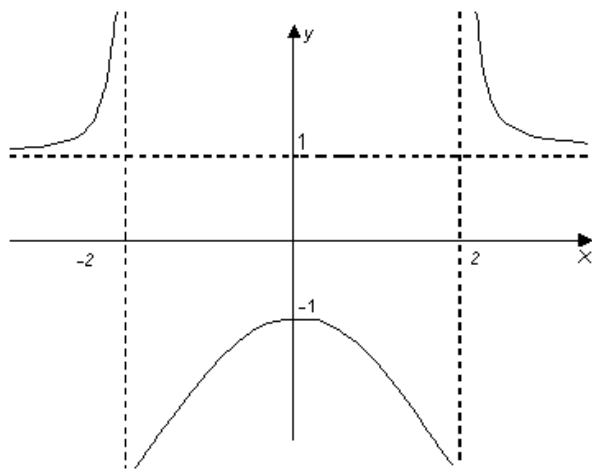
7) Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 1$, то пряма $y=1$ є горизонтальною асимптотою

для графіка функції.

Дослідимо поведінку функції біля точок $x=2$, $x=-2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = -\infty.$$

Отже, в точці $x=2$ функція має розрив другого роду, а пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою. Враховуючи парність функції, робимо висновки, що пряма $x=-2$ також є вертикальною асимптотою.



Приклад 2. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \sin x - \ln \sin x$$

Розв'язання.

1. Область визначення функції f :

$$x = (2\pi k; \pi + \pi k).$$

2. Функція не належить ні до парних, ні до непарних. Це безпосередньо впливає з того, що область її визначення несиметрична відносно нуля.

3. Період функції $T = 2\pi$. Тому дослідження функції достатньо спочатку провести на проміжку $(0; \pi)$. Крім того, враховуючи, що $\sin(\pi - x) = \sin x$, робимо висновок про симетричність графіка відносно прямої $x = \frac{\pi}{2}$ на проміжку $(0; \pi]$. Тому можна обмежитися дослідженням функції на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Для цього знайдемо її похідну

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x \left(1 - \frac{1}{\sin x}\right).$$

Для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) < 0$. Тому функція на цьому проміжку спадає. Тоді на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ вона зростає, а в точці $x = \frac{\pi}{2}$ має мінімум, який дорівнює 1.

Враховуючи періодичність функції, робимо висновок, що вона на проміжках $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ і зростає на проміжках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ набуває мінімального значення, яке дорівнює 1.

5. Дослідимо функцію на опуклість на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f''(x) = -\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

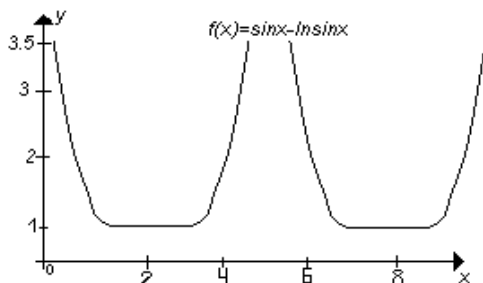
Звідси безпосередньо випливає, що для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вниз. Тоді і на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ він опуклий вниз. Таким чином, на проміжках $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ графік функції опуклий вниз.

6. Визначимо поведінку функції біля нуля справа і біля π зліва:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x - \ln \sin x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} (\sin x - \ln \sin x) = +\infty.$$

Отже, прямі $x=0$, $x=\pi$ – вертикальні асимптоти. Тоді і прямі $x=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – вертикальні асимптоти.



Розглянемо застосування похідної до розв'язування рівнянь на конкретних прикладах.

Приклад 3. Яким умовам повинні задовольняти параметри p та q , щоб рівняння $x^3 + px + q = 0$ мало три різних дійсних корені?

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

Для того щоб дана функція мала три різні нулі, необхідно, щоб її похідна

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

мала два різних нулі. А це буде тоді, коли $p < 0$. Звідси $x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Отже, похідна має один додатний і один від'ємний корінь. Тоді функція f має обов'язково один від'ємний корінь. А це можливо за умови, що $q > 0$.

Отже, $p < 0, q > 0$.

Приклад 4. Скільки дійсних коренів має рівняння

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0?$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1.$$

Знайдемо її похідну $f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} + x = x(1 - e^{-x})$.

Нехай

а) $x < 0$, тоді очевидно, $f'(x) > 0$;

б) $x = 0$, тоді $f'(0) = 0$;

в) $x > 0$, тоді знову ж таки $f'(x) > 0$.

Отже, похідна всюди додатна, за винятком однієї ізольованої точки $x = 0$. це означає, що функція f зростає на всій числовій осі. Тому дане рівняння не може мати більше одного кореня. Оскільки $f'(0) = 0$, то нуль і є тим єдиним коренем.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$2x + \sin x = 0.$$

Тривіальним коренем рівняння є $x = 0$. доведемо, що інших коренів рівняння не має. Розглянемо функцію

$$f(x) = 2x + \sin x.$$

Знайдемо її похідну $f'(x) = 2 + \cos x > 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Отже, функція f зростає на всій числовій осі. Тому рівняння не має більше коренів.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$x^5 + x^3 + 5x - 7 = 0.$$

Розглянемо функцію $f(x) = x^5 + x^3 + 5x - 7$.

Вона диференційована на всій області визначення. Знайдемо її похідну

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 5.$$

Очевидно, $f'(x) > 0$ для $\forall x \in \mathbb{R}$.

А це означає, що рівняння має лише один корінь (найвищий показник степеня непарний). Тривіальним коренем є $x = 1$.

Відповідь: 1.

Текстові задачі на екстремум

Приклад 1. Яке із десяти чисел $1^{10}, 2^9, 3^8, 4^7, 5^6, 6^5, 7^4, 8^3, 9^2, 10^1$ найбільше?

Розв'язання. Зрозуміло, що це число міститься в середині цієї скінченної послідовності чисел і його можна знайти безпосереднім обчисленням.

Знайдемо це число за допомогою похідної. Для цього розглянемо функцію $f(x) = x^{11-x}$.

Знайдемо її похідну, записавши функцію в такому вигляді:

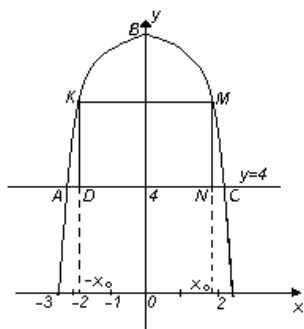
$$f(x) = e^{(11-x)\ln x}.$$

$$\text{Тоді } f'(x) = e^{(11-x)\ln x} \left(\frac{11-x}{x} - \ln x \right).$$

Знак похідної залежить лише від виразу, що знаходиться в дужках. Функція $g(x) = \frac{11}{x} - \ln x - 1$ спадає на інтервалі $(0; +\infty)$, причому $g(4) = 1,75 - \ln 4 > 0$, а $g(5) = 1,2 - \ln 5 < 0$. Тому на інтервалі $(0; x_0)$ функція f зростає, а на інтервалі $(x_0; +\infty)$ – спадає. Тоді найбільше число буде $f(4) = 4^7$ або $f(5) = 5^6$. Безпосереднє обчислення дає відповідь на поставлене в задачі запитання: 4^7 є найбільшим серед десяти даних чисел.

Приклад 2. У плоску фігуру, обмежену параболою $y = 9 - x^2$ і прямою $y=4$, вписати прямокутник найбільшої площі так, щоб нижня основа лежала на прямій $y = b$, а вершини верхньої основи на параболі.

Розв'язання. Нехай у фігуру ABC вписано прямокутник DKMN.



Позначимо абсциси точок M і N через x_0 , а тоді точки D і K матимуть абсцисою точку $-x_0$.

Отже, $DN = 2x_0$, де DN – ширина прямокутника. Висота прямокутника буде дорівнювати різниці ординат точок M і N, тобто $MN = 9 - x_0^2 - 4 = 5 - x_0^2$.

Тоді площу прямокутника DKMN запишемо у такому вигляді:

$$S = DN \cdot MN = 2x_0(5 - x_0^2).$$

Розглянемо функцію $S(x_0) = 2x_0(5 - x_0^2)$. Її похідна $S'(x_0) = 10 - 6x_0^2$. Точка $x_0 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ є точкою максимуму для функції $S(x_0)$. Тоді

$$S = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\left(5 - \frac{5}{3}\right) = \frac{20}{9}\sqrt{15}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{20}{9}\sqrt{15}.$$

Приклад 3. Криволінійна трапеція обмежена графіком функції $f(x) = e^x + e^{-x}$ та прямими $x=-1$, $x=2$, $y=0$. У якій точці графіка функції треба провести дотичну, щоб вона відтинала від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі?

Розв'язання. Позначимо шукану точку через x_0 , де $-1 \leq x_0 \leq 2$. Запишемо рівняння дотичної, яка проходить через точку графіка з абсцисою x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = e^{x_0} + e^{-x_0} + (e^{x_0} - e^{-x_0})(x - x_0).$$

Знайдемо значення цієї дотичної в точках $x=-1$, $x=2$:

$$y(-1) = e^{x_0} + e^{-x_0} + (e^{x_0} - e^{-x_0})(-1 - x_0),$$

$$y(2) = e^{x_0} + e^{-x_0} + (e^{x_0} - e^{-x_0})(2 - x_0).$$

Площу звичайної трапеції запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} S(x_0) &= \frac{y(-1) + y(2)}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}(2e^{x_0} + 2e^{-x_0} + e^{x_0} - e^{-x_0} - 2x_0(e^{x_0} - e^{-x_0})) = \\ &= \frac{3}{2}(3e^{x_0} + e^{-x_0} - 2x_0(e^{x_0} - e^{-x_0})). \end{aligned}$$

Розглянемо функцію

$$S(x_0) = \frac{3}{2}(3e^{x_0} + e^{-x_0} - 2x_0(e^{x_0} - e^{-x_0})).$$

Знайдемо її похідну:

$$\begin{aligned} S'(x_0) &= \frac{3}{2}(3e^{x_0} - e^{-x_0} - 2(e^{x_0} - e^{-x_0}) - 2x_0(e^{x_0} + e^{-x_0})) = \\ &= \frac{3}{2}(e^{x_0} + e^{-x_0} - 2x_0(e^{x_0} + e^{-x_0})) = \frac{3}{2}(e^{x_0} + e^{-x_0})(1 - 2x_0). \end{aligned}$$

Функція $S(x_0)$ має єдину критичну точку $x_0 = \frac{1}{2}$, в якій вона досягає максимуму.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Задачі прикладного змісту

Задача 1. Молодий підприємець Юрій в період економічної кризи зкріплює викупити нерентабельне переробне підприємство і запросив економіста Германа допомогти з розрахунками по оптимізації витрат. Одна із задач, поставлених перед Германом, була наступна: знайти, за яких умов витрата жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданої ємності буде найменша.

Розв'язання.

Перший етап. Складання математичної моделі.

Складання моделі полегшується тим, що відома форма банки і обумовлено, що вона повинна бути заданої ємності. Це істотно для складання моделі. Істотним є також вимога, щоб витрата жерсті виготовлення банки була мінімальною. Ця вимога означає, що площа повної поверхні банки, що має форму циліндра, повинна бути найменшою; істотні і розміри банки. Несуттєві для складання математичної моделі чисельне значення ємності банки і вид консервів, для яких банка призначена.

Позначивши ємність банки через V (од. дов.)³. Сформулюємо задачу: Визначити розміри циліндра з об'ємом V (од. дов.)³ так, що б площа його повної поверхні була найменшою.

Для розв'язання завдання позначимо радіус основи циліндра через x , а висоту його через h (всі вимірювання в сантиметрах). Тоді об'єм циліндра $V = \pi x^2 h \rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$. Повна поверхня циліндра $S = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + \frac{2\pi xV}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Отже, $S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Оскільки змінна x може набувати тільки додатні значення, то розв'язання задачі зводиться до знаходження найменшого значення $S(x)$ на проміжку $(0, \infty)$.

Другий етап. Робота з складеною моделлю.

Знайдемо похідну $S'(x)$:

$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x} \right)' = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $S'(x) = 0$.

Корінь рівняння: $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

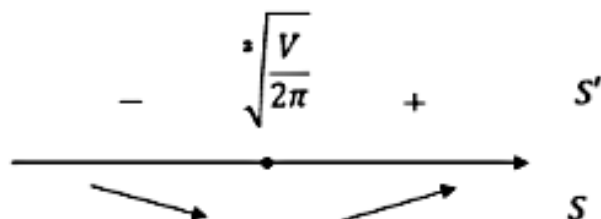


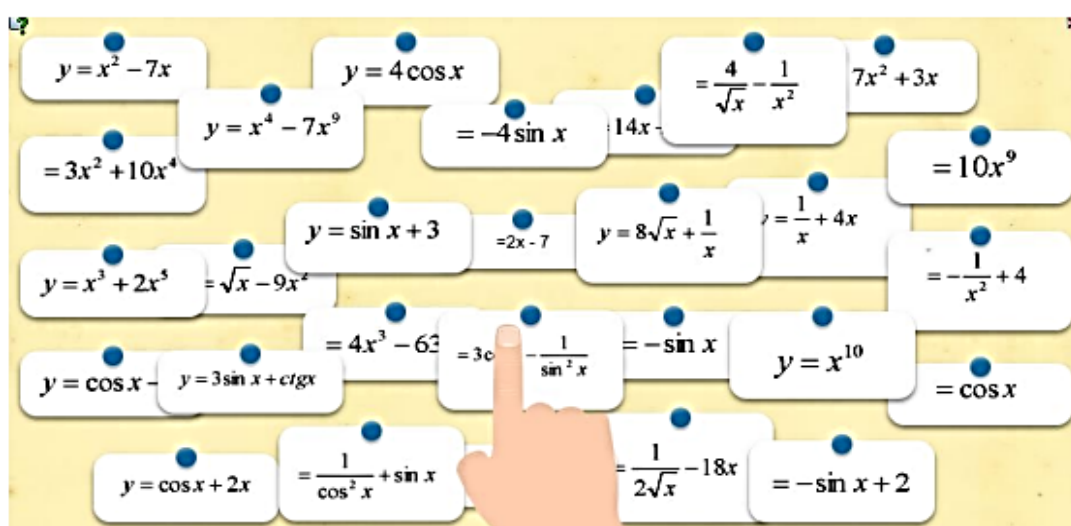
Рис. 2.17. Дослідження на точки екстремуму

Отже, в точці $x = S(x)$ маємо мінімум. Отже, функція в цій точці досягає найменшого значення. Таким чином, площа повної поверхні циліндра, що має об'єм V , буде найменшою при $h = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, тобто коли циліндр рівносторонній.

Приклади онлайн-вправ до теми «Похідна та її застосування»

Інтерактивні вправи

1. Означення похідної – <https://learningapps.org/5559666>
2. Приріст функції та приріст аргументу – <https://learningapps.org/5559786>
3. приріст функції, вказаної на графіку – <https://learningapps.org/5560052>
4. Похідна функції – <https://learningapps.org/5579387>
5. <https://learningapps.org/5892016>



6. <https://learningapps.org/5892010>

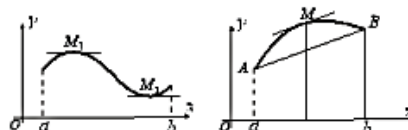
1 / 6

Знайдіть похідну функції $y(x) = (x+1)(x+2)-(x-1)(x-3)$

<input type="radio"/>	1	<input type="radio"/>	-7
<input type="radio"/>	7	<input type="radio"/>	-1

8. <https://learningapps.org/5815961>

Теорема Ферма



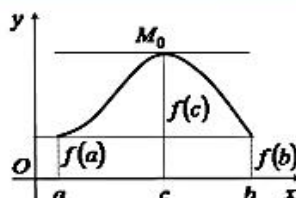
Нехай функція $y=f(x)$

1) неперервна на від a до b

2) на від a до b .

Якщо дана функція в деякій точці c , що належить інтервалу (a, b) набуває локального .

то $f'(c) = \text{}$.



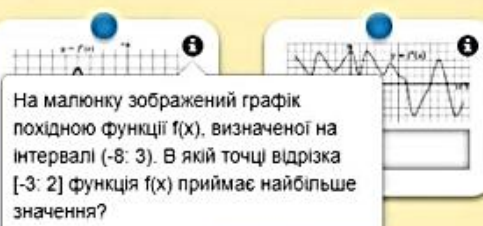
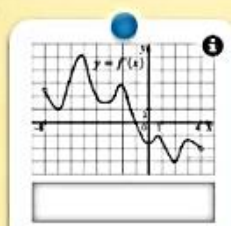
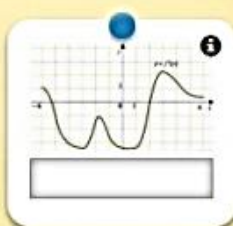
Нехай функція $y=f(x)$

1) на $[a, b]$

2) на (a, b)

3) $f(a) \text{ } f(b)$

Тоді на (a, b) знайдеться хоча б одна точка c , що виконується $f'(c) = \text{}$



На малюнку зображений графік похідної функції $f'(x)$, визначеної на інтервалі $(-8; 3)$. В якій точці відрізка $[-3; 2]$ функція $f(x)$ приймає найбільше значення?

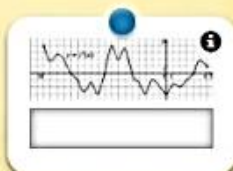


Рис. В.7. Виконати завдання за допомогою малюнків

12. Хто хоче стати мільйонером – <https://learningapps.org/5579466>

13. Сканфорд «Терміни» – <https://learningapps.org/5579694>