Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Побудова геометричних місць точок з використанням програм динамічної математики // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 1(7). – С. 127-133.

Semenikhina O.V., Drushlyak M.G. The Construction of the Locus Using Dynamic Mathematics Software // Physics and Mathematics Education : scientific journal. – 2016. – Issue 1 (7). – P.127-133.

УДК 378.14: 371.214.46:[004.78:51]

О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ПОБУДОВА ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ ТОЧОК З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

Постановка проблеми. Поняття геометричного місця точок (ГМТ) є одним із базових у математичній освіті, оскільки на його основі вводяться деякі типові геометричні об’єкти. Геометричні місця точок у просторі надзвичайно різноманітні. Деякі з них є природним узагальненням геометричних місць точок на площині (наприклад, сфера у просторі є аналог кола на площині). Знайти ГМТ означає геометрично або аналітично описати цю множину.

Розв’язування задач на ГМТ простору у більшості випадків починається із побудови гіпотези про вид шуканої фігури. Знайдена гіпотеза має бути перевірена на множині тестових (а також граничних) випадків. Саме на цьому етапі в нагоді стануть програми динамічної математики (ПДМ), використання яких допомагає уявити і потім визначити вигляд шуканого ГМТ. Зауважимо, що пошук ГМТ простору вважається більш складним, ніж на площині, оскільки його важко змоделювати. Це і зумовлює використання згаданих засобів, які передбачають можливість такого моделювання.

Серед всього розмаїття ПДМ підтримку розв’язування задач на ГМТ простору можуть забезпечити лише ті з них, де передбачено інструмент побудови сліду геометричних об’єктів в просторі. Це програми *Cabri 3D* (інструмент *Trajectory*) та *GeoGebra 5.0* (властивість об’єкта *Оставлять след*). До того ж у згаданих програмах передбачена можливість візуалізувати побудову 3d-об’єкта як динамічного сліду не тільки для точки, але і для відрізка, лінії, кола, многокутника тощо.

Виклад основного матеріалу. Продемонструємо використання вищезазначених ПДМ при розв’язуванні типових задач на ГМТ простору, що відповідають вимогам програм різних рівнів для старшої школи.

Рівень стандарту. Рівень стандарту забезпечує обов’язковий мінімум змісту шкільного курсу математики, який не передбачає подальшого його вивчення. Математика на рівні стандарту вивчається, наприклад, учнями класів гуманітарного профілю.

Зауваження. 1. Розв'язування задач на ГМТ простору лежить за межами програми рівня стандарту, але використання такої візуалізації при вивченні основних понять курсу вважаємо доцільним та ефективним.

2. Для класів гуманітарного (зокрема, філологічного) профілю корисним буде вибір програми з іншомовним інтерфейсом (при встановленні програм *Cabri3D* та *GeoGebra5.0* можна обрати потрібну мову, не обмежуючись англійською). У такий спосіб учні додатково розширюють свій словниковий запас.

Приклад 1 (*Cabri3D*). Визначити форму тіла, яке утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо одного з катетів [2, с.244].

Розв'язання. Алгоритм розв'язання у програмі *Cabri3D* може бути наступним:

1) будуємо коло в базовій площині (*Circle*);

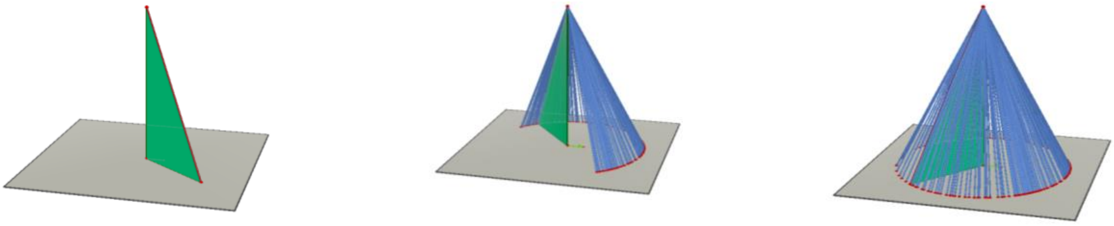
2) будуємо пряму (*Line)*, яка проходить через центр кола перпендикулярно до базової площини;

3) будуємо трикутник, вершинами якого є центр кола, довільна точка на колі и довільна точка на прямій (*Triangle*);

4) ховаємо за допомогою контекстного меню (*Hide/Show*) вертикальну пряму і коло як допоміжні об'єкти конструкції (рис.1а);

5) будуємо динамічний слід гіпотенузи трикутника (*Trajectory*) (рис.1б).

Змінюючи положення вершини трикутника в базовій площині (вершина рухатиметься по колу), обертаючи трикутник навколо його катета, отримуємо зображення шуканого тіла. Це конус (рис.1в).



а) б) в)

Рис. 1. Побудова конуса як тіла обертання

Приклад 2 (*GeoGebra 5.0*). Визначити форму тіла, всі точки якого рівновіддалені на однакову відстань від заданої точки [2, с.202].

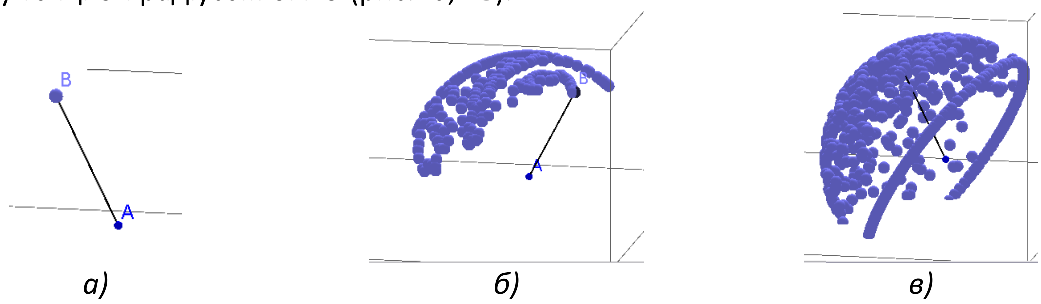
Розв'язання. Обираємо програму *GeoGebra 5.0*, оскільки в ній є інструмент *Отрезок с фиксированной длинной*:

1) будуємо довільну точку *O*;

2) будуємо відрізок фіксованої довжини *OA* (наприклад, довжини 3) (рис.2а);

3) у властивостях точки *A* відмічаємо *Оставлять след*.

Змінюємо положення точки *A* у просторі і отримуємо зображення сфери з центром у точці *O* і радіусом *OA=3* (рис.2б, 2в).



а) б) в)

Рис. 2. Побудова сфери як множини точок, рівновіддалених на однакову відстань від заданої точки

Академічний та профільний рівні. Академічний рівень передбачає обсяг змісту, який необхідний для подальшого вивчення математики у вищих навчальних закладах. Математика на академічному рівні вивчається, наприклад, у класах природничого (біолого-хімічного, біолого-фізичного, фізико-хімічного) профіля.

Профільний рівень забезпечує загальноосвітню підготовку з математики, достатню для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу природничих, предметів, та можливість продовження навчання у вищих навчальних закладах освіти за спеціальностями, безпосередньо пов’язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів. Математика на профільному рівні вивчається в класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів.

Приклад 2. (*GeoGebra 5.0*) Знайдіть ГМТ вершин рівновеликих пірамід зі спільною основою [3; 220].

Розв’язання. Гіпотеза полягає у тому, що всі рівновеликі піраміди (як прямі, так і похилі) зі спільною основою будуть мати рівні за довжинами висоти. Тому шукане ГМТ – це площина, рівновіддалена від площини основи пірамід на відстань, що дорівнює висоті пірамід. Дане ГМТ описують сліди вершин рівновеликих пірамід.

Побудуємо, наприклад, трикутну піраміду. Для цього побудуємо основу піраміди – довільний трикутник *ABC*. Візьмемо довільну точку в площині основи *D* і проведемо перпендикуляр до площини основи через цю точку. На перпендикулярі оберемо довільну точку *E* і проведемо висоту піраміди *DE*. Побудуємо піраміду за основою та вершиною. Побудуємо слід вершини *E* піраміди при русі основи піраміди *D* по площині основи (рис.3)

Складається враження що всі сліди належать одній площині. Перевіримо цю гіпотезу, побудувавши площину, яка паралельна площині основи піраміди і проходить через її вершину. Змінюючи ракурс зображення, переконаємося, що дійсно всі точки-сліди належать одній площині.

Приклад 3. (*GeoGebra5.0)* Знайти ГМТ, яке є серединами хорд сфери, що проведені з однієї точки (рис. 4) [3, с.189].

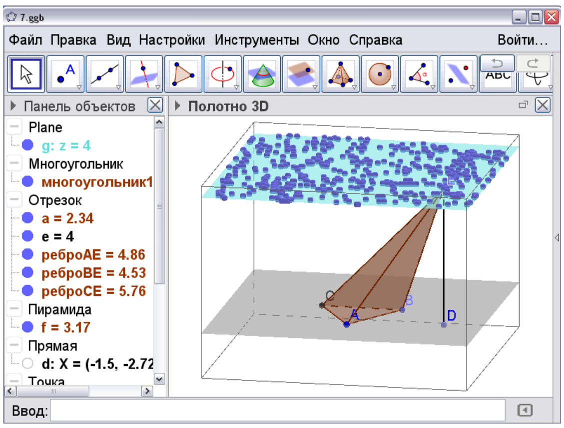


Рис. 3. Побудова ГМТ вершин рівновеликих пірамід зі спільною основою

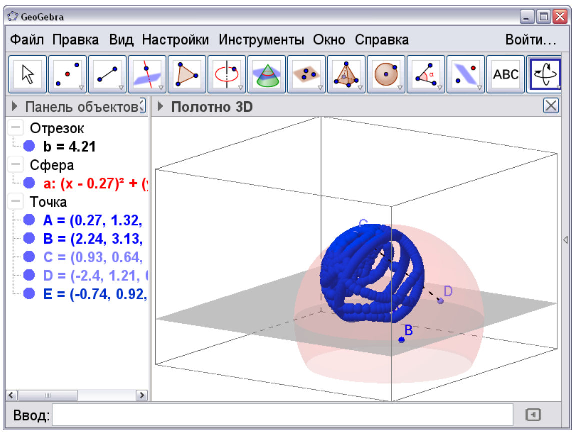


Рис. 4. Побудова ГМТ середин хорд сфери, які проведено з однієї точки

Зауваження. 1. Конфігурація приклада 3 дає можливість учням мислити «ширше», тобто зрозуміти, що задача не обмежується лише прямими пірамідами (піраміда може бути і похилою), що основа висоти піраміди лежить в площині основи, але не обов’язково в середині трикутника, що є її основою.

2. При розв’язуванні приклада 3 краще використовувати програму *GeoGebra5.0.* Програма *Cabri3D* при побудові сліду об’єкта залишає лише обмежену кількість слідів і якщо ця кількість завелика, то попередні сліди зникають. Тому зображення сфери як шуканого ГМТ може бути частковим.

Поглиблений рівень. Поглиблений рівень забезпечує рівень підготовки учнів з математики, необхідний для подальшого вибору й успішного опанування професією, яка потребує високого рівня математичних знань, тобто спеціальностями теоретичної та прикладної математики або спеціальностями тих галузей, які потребують розвиненого математичного апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів, у підготовці до навчання у вищому навчальному закладі з відповідним фахом спрямування.

Приклад 4. (*GeoGebra5.0*) Знайдіть ГМТ точок простору, для кожної з яких сума відстаней від двох даних точок простору є величина стала. [3, с.158]

Розв’язання. Алгоритм побудови може бути наступним.

1. Відмітимо точки *D* та *E*.

2. Побудуємо на окремій прямій відрізки *AC* та *CB* так, щоб *DE<AB*, а пряму заховаємо.

3. Побудуємо сферу радіуса *AC* з центром в точці *D* та сферу радіуса *BC* з центром в точці *E*.

4. Знайдемо коніку *d(t)*, яка є перетином побудованих сфер.

5. Заховаємо сфери.

6. У властивостях коніки замовимо послугу *Оставлять след*.

7. Рухаємо точку *C* вздовж відрізка *AB*. Коніка *d(t)* при цьому вимальовує поверхню, яка утворює еліпсоїд (рис.5).

Приклад 5. (*GeoGebra5.0*) На прямій, яка проходить через точку *A* перпендикулярно до площини трикутника *ABC*, взято довільну точку *D*. Знайти ГМТ перетину висот трикутника *DBC*. [4, с.36]

Розв’язання. Алгоритм побудови може бути таким:

1) будуємо трикутник *ABC*;

2) через точку *A* проводимо пряму, яка перпендикулярна площині *ABC*;

3) на побудованій прямій беремо довільну точку *D*;

4) будуємо трикутник *DBC*;

5) проводимо висоти *BE* та *CF* трикутника *DBC*;

6) знаходимо точку *G* перетину висот *BE* і *CF*;

7) у властивостях точки *G* вказуємо *Оставлять след*.

Рухаючи точку *D* вздовж прямої, отримаємо шукане ГМТ (рис.5).

Виявляється, що це коло з діаметром *HL* (*H* – точка перетину висот трикутника *ABC, L* – основа висоти, яка опущена з точки *A* на сторону *BC*), яке лежить в площині, що перпендикулярна площині трикутника *ABC*.

Зауваження. 1. Аналогія відіграє велике значення у розвитку самостійного продуктивного мислення, це важливе джерело асоціацій, які забезпечують глибоке засвоєння матеріалу. Тому здатність її побачити, а в даному випадку розв’язати аналогічну задачу, «вийшовши» з площини у простір, або навіть самостійно її сформулювати, свідчить про високий рівень математичної інтуїції.

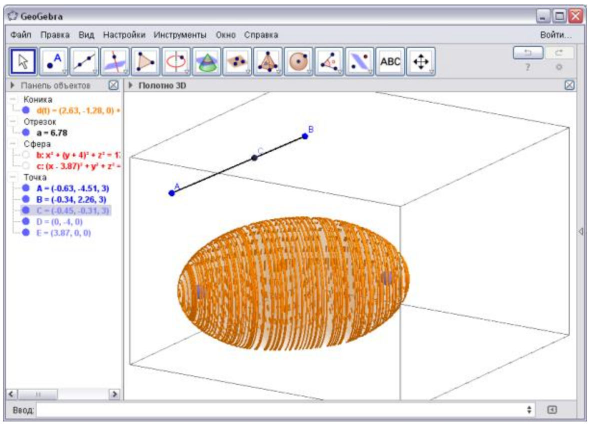


Рис. 5. Побудова еліпсоїда як ГМТ

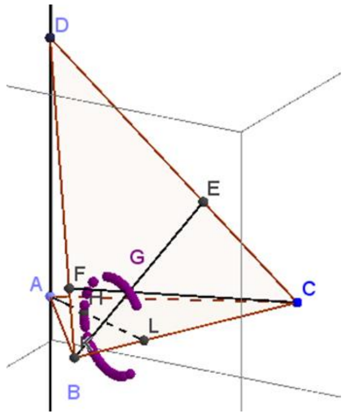


Рис. 6. Побудова ГМТ інструментом Слід (приклад 5)

Висновки. Описані розв'язання не лише спрощують сприйняття складного стереометричного матеріалу, а і збагачують арсенал старшокласників емпіричним методом розв'язування задач на ГМТ. Вважаємо це важливим з огляду на інформатизацію суспільства та його запити щодо фахівців, які володіють вміннями моделювати проблеми, візуалізувати пошук розв'язків і навичками аналізувати задачі, у тому числі ті, що зводяться до стереометричних задач на ГМТ.

Список використаних джерел

1. Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання. Ч.ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с.
2. Бевз Г. П. Математика 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Генеза, 2011. – 320 с.
3. Апостолова Г. В. Геометрія: 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень / Г. В. Апостолова. – К.: Генеза, 2011. – 304 с.
4. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (стереометрия) / И. Ф. Шарыгин. – М.: Наука, 1984. – 160 с.
5. Семеніхіна О.В. Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і Geogebra: порівняльний аналіз / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Фізико-математична освіта. – 2015. – № 1(4). – С. 21-30.
6. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Обґрунтування доцільності використання програм динамічної математики як засобів комп'ютерної візуалізації математичних знань // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 3 (6). – С. 67-75.
7. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Практика використання параметричного кольору в програмах динамічної математики при розв'язуванні задач на ГМТ / Олена Семеніхіна, Марина Друшляк // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 2 (5). – С. 65-72.
8. Бабич О., Семеніхіна О. До питання про співвідношення понять наочність і візуалізація // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2014. – № 2(3). – С. 47-53.
9. Безуглий Д. Прийоми візуального подання навчальної інформації // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2014. – № 2(3). – С. 7-15.

Анотація. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Побудова геометричних місць точок з використанням програм динамічної математики.

Авторами акцентується увага на проблемі візуалізації тривимірних побудов і проблемі формування умінь у учнів старшої школи візуалізувати математичний матеріал засобами інформаційних технологій. Зазначено програми динамічної математики Cabri3D і GeoGebra 5.0, де сьогодні є можливою така візуалізація через використання інструментів Траєкторія і Слід. Наводяться приклади розв'язування задач на побудову геометричних місць точок у тривимірному просторі, алгоритми побудов із використанням цих програм в класах різних профілів на академічному, профільному і поглибленому рівнях. Надаються методичні коментарі щодо створення і аналізу динамічних конструкцій.

Ключові слова*: програми динамічної математики, задачі на ГМТ простору, Cabri3D, GeoGebra 5.0.*

***Аннотация. Семенихина Е.В., Друшляк М.Г. Построение геометрических мест точек с использованием программ динамической математики*.**

Авторами акцентируется внимание на проблеме визуализации трехмерных построений и проблеме формирования умений у учащихся старшей школы визуализировать математический материал средствами информационных технологий. Указано программы динамической математики Cabri3D и GeoGebra 5.0, в которых сегодня возможна такая визуализация, используя инструменты Траектория и След. Приводятся примеры решения задач на построение геометрических мест точек в трехмерном пространстве, алгоритмы построений с использованием этих программ в классах разных профилей на академическом, профильном и углубленном уровнях. Предоставляются методические комментарии относительно создания и анализа динамических конструкций.

Ключевые слова*: программы динамической математики, задачи на ГМТ пространства, Cabri3D, GeoGebra 5.0.*

Abstract. Semenikhina O.V., Drushlyak M.G. The Construction of the Locus Using Dynamic Mathematics Software.

The authors focus on the problem of visualization of three-dimensional constructions and the problem of formation of skills of high school students to visualize mathematical material by means of information technology. This visualization is especially helpful in the operation with locus. The concept of locus is one of the basic in mathematics education, since it introduces some common geometric objects. The locus problem in space in most cases begins with the formulation of a hypothesis about the form of the figure. This hypothesis needs to be tested on the set of test (and limit) cases. At this stage such means of visualization as dynamic mathematics software (DMS) become useful. The use of them helps to represent and then determine the form of the locus. Among the variety of dynamic mathematics software just Cabri3D and GeoGebra 5.0 have the opportunity to visualize the locus through the use of tools Trajectory and Trace.

Examples of solving locus problems in three-dimensional space, algorithms of construction with the use of these software in classes of different profiles in academic, specialized and in-depth levels are made. Methodological comments are provided regarding the establishment and analysis of dynamic structures. It is noted that the solution of locus problems in space lies beyond the curriculum of the standard level, but the use of such visualization in the study of the basic concepts of the course is appropriate and effective. In

addition the work with software with the foreign-language interface is helpful to students of classes of philological profile. It is a means of expanding vocabulary. For students who study mathematics at higher level, the ability to see an analogy (in some cases to solve a similar problem), "coming out" from the plane into space is useful. It indicates a high level of mathematical intuition.

The described solution not only facilitate the perception of complex stereometrical material, but also enrich the arsenal of students with empirical method of solving locus problems. Authors believe that it is important in the view of the computerization of society and its requests regarding professionals who possess the skills to model problems, visualize the solutions and the skills to analyze tasks, including those that are reduced to stereometric locus problems.

Key words: *dynamic mathematics software, locus problems in space, Cabri3D, GeoGebra 5.0.*